

8₃ 結び目の A-多項式について

東京都立大学大学院・理学研究科・数学専攻

田村 奈穂子 (Naoko Tamura)

横田 佳之 (Yoshiyuki Yokota)

March 5, 2002

1 8₃ 結び目の A-多項式

この報告では、研究集会で紹介した [Y] の四面体分割を用いて、[CCGLS] には結果が載っていない 8₃ 結び目 (図 1) の A-多項式を求める方法を示す。

まずはじめに、計算結果を示す。

$$\begin{aligned} & x^{16} + (-2x^8 + 3x^{10} - 2x^{12} + x^{14} + 8x^{16} + x^{18} - 2x^{20} + 3x^{22} - 2x^{24})y \\ & + (1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 - 4x^8 - 9x^{10} + 15x^{12} + 13x^{14} - 2x^{16} + 13x^{18} + 15x^{20} - 9x^{22} - 4x^{24} - x^{26} \\ & + 3x^{28} - 3x^{30} + x^{32})y^2 \\ & + (-4 + 16x^2 - 14x^4 - 21x^6 + 24x^8 + 16x^{10} - 56x^{12} + 17x^{14} + 100x^{16} + 17x^{18} - 56x^{20} + 16x^{22} \\ & + 24x^{24} - 21x^{26} - 14x^{28} + 16x^{30} - 4x^{32})y^3 \\ & + (6 - 26x^2 + 22x^4 + 40x^6 - 59x^8 - 64x^{10} + 82x^{12} + 50x^{14} - 32x^{16} + 50x^{18} + 82x^{20} - 64x^{22} \\ & - 59x^{24} + 40x^{26} + 22x^{28} - 26x^{30} + 6x^{32})y^4 \\ & + (-4 + 16x^2 - 14x^4 - 21x^6 + 24x^8 + 16x^{10} - 56x^{12} + 17x^{14} + 100x^{16} + 17x^{18} - 56x^{20} + 16x^{22} \\ & + 24x^{24} - 21x^{26} - 14x^{28} + 16x^{30} - 4x^{32})y^5 \\ & + (1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 - 4x^8 - 9x^{10} + 15x^{12} + 13x^{14} - 2x^{16} + 13x^{18} + 15x^{20} - 9x^{22} - 4x^{24} - x^{26} \\ & + 3x^{28} - 3x^{30} + x^{32})y^6 \\ & + (-2x^8 + 3x^{10} - 2x^{12} + x^{14} + 8x^{16} + x^{18} - 2x^{20} + 3x^{22} - 2x^{24})y^7 + x^{16}y^8 \end{aligned}$$

この多項式を式 (a) と呼ぶことにする。

2 構造方程式

8₃ 結び目を [Y] の方法に従って四面体分割する。それぞれの四面体の modulus を図 2 のように定めると、カスプの図は図 3, 4 のようになる。

次に、四面体分割して残った modulus を次のように変数変換する。

$$\begin{aligned} c_2 &= dx \\ a_3 &= \frac{1}{dx}, b_3 = ax, d_3 = \frac{d}{a} \\ a_4 &= \frac{1}{ax}, c_4 = cx, d_4 = \frac{a}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_5 &= \frac{c}{x}, b_5 = \frac{e}{c}, c_5 = \frac{x}{e} \\
 a_6 &= \frac{b}{e}, c_6 = \frac{x}{b} \\
 a_7 &= \frac{b}{x}
 \end{aligned}$$

meridian (x^2 とする) を Figure:3 の破線矢印にそってよむと、上述の変数変換により構造方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \frac{cx(1 - \frac{d}{a})}{1 - \frac{e}{a}} \\
 &= \frac{e}{x} \left(1 - \frac{d}{a}\right) \\
 &= \frac{(1 - \frac{e}{x})(1 - \frac{1}{cx})}{(1 - \frac{e}{e})(1 - \frac{a}{c})} \\
 &= \frac{1 - \frac{a}{d}}{ax} \\
 &= \frac{x(1 - \frac{b}{e})}{b(1 - \frac{e}{c})}
 \end{aligned}$$

3 longitude のよみ方について

次に、longitude (y^2 とする) の求め方を示す。

Figure3, 4 の実線の矢印にそってよむ。このとき、Figure3 から読み取れる部分を κ 、Figure4 から読み取れる部分を λ とし、図のようにそれぞれ 13~14 の部分に分けると、表 1 のようになっている。ここで、

$$y^2 = \kappa \cdot \lambda \quad (1)$$

となっている。

Table 1 より、 $\kappa = \alpha \cdot \lambda$ という形になっている事がわかる。また、ここで $\alpha = \left\{ \frac{c_2 a_3 a_6 x^2}{a_4 a_5 c_6 a_7} \right\}^2$ であるから、 $\alpha = \alpha'^2$ とおくと、(1) より

$$\begin{aligned}
 y^2 &= \kappa \cdot \lambda \\
 &= \alpha \cdot \lambda^2 \\
 &= \{\alpha' \cdot \lambda\}^2
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow y = \alpha' \cdot \lambda$$

となる。最後に、 λ を Figure 4 の破線矢印にそってよんだものとおきかえる。これを λ' とすると

$$\begin{aligned}
 \lambda' &= \frac{c_6^2}{a_6 a_5^2 d_4 d_3 \left(1 - \frac{1}{a_5}\right)} \\
 y &= \alpha' \cdot \lambda' \\
 &= \frac{c_2 a_3 a_6 x^2}{a_4 a_5 c_6 a_7} \frac{c_6^2}{a_6 a_5^2 d_4 d_3 \left(1 - \frac{1}{a_5}\right)} \\
 &= \frac{c_6}{a_4 a_5^2 a_7 d_4 d_3 \left(1 - \frac{1}{a_5}\right)}
 \end{aligned}$$

これに2章の変数変換をすると,

$$y = \frac{ax^4}{b^2c^2d(1 - \frac{x}{c})}$$

とできる。これと2章の x^2 に関する式を合わせた連立方程式から x, y 以外の文字を消去することで, 式(a)が得られる。

参考文献

- [CCGLS] Cooper, D., Culler, M., Gillet, H., Long, D. D., Shalen, P. B., *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, *Invent. math.* **118**, 47-84 (1994)
- [Y] Y. Yokota, *On the volume conjecture for hyperbolic knots*, available at http://www.comp.metro-u.ac.jp/~jojo/volume_conjecture.ps.

| | κ | λ |
|----|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1 | c_2 | $\frac{1}{c_2 x^2}$ |
| 2 | $\frac{1-d_3}{1-d_4}$ | $\frac{1-d_5}{1-d_4}$ |
| 3 | $\frac{1}{a_4}$ | $\frac{a_4}{x^2}$ |
| 4 | $1 - \frac{1}{c_4}$ | $1 - \frac{1}{c_4}$ |
| 5 | $\frac{1}{a_7}$ | $c_4 b_5 b_6$ |
| 6 | $1 - b_6$ | $1 - b_6$ |
| 7 | $\frac{1}{a_5}$ | $a_5 x^2$ |
| 8 | $\frac{1-a_5}{1-d_4}$ | $\frac{1-a_5}{1-d_4}$ |
| 9 | a_3 | $\frac{1}{a_3 x^2}$ |
| 10 | $c_2(1-d_3)$ | $c_2(1-d_3)$ |
| 11 | $\frac{1}{1-b_5} \frac{1-b_5}{1-b_6}$ | $\frac{1}{1-b_5} \frac{1-b_5}{1-b_6}$ |
| 12 | a_6 | $\frac{x^2}{a_6}$ |
| 13 | 1 | 1 |
| 14 | | $\frac{1}{c_4 b_5 b_6} a_7 x^2$ |

表 1:

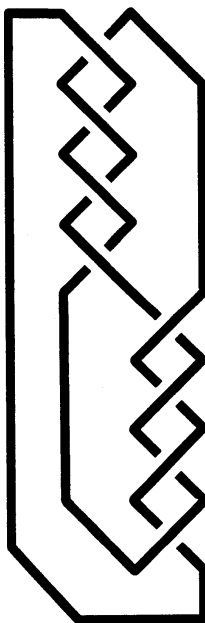


Figure 1 : 83-knot

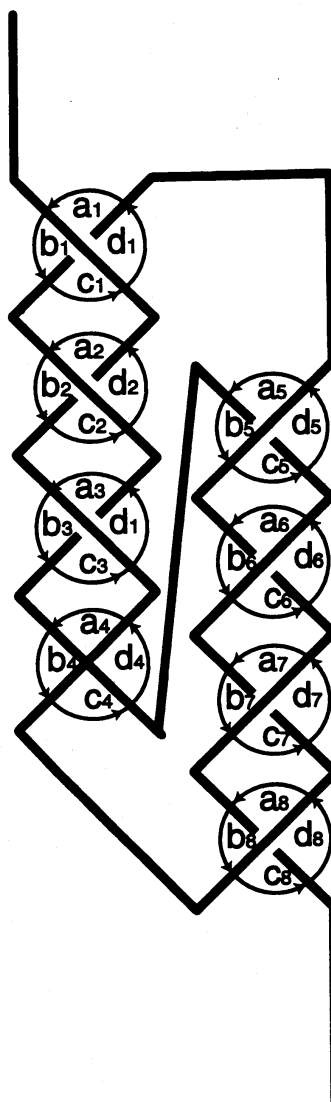


Figure 2:

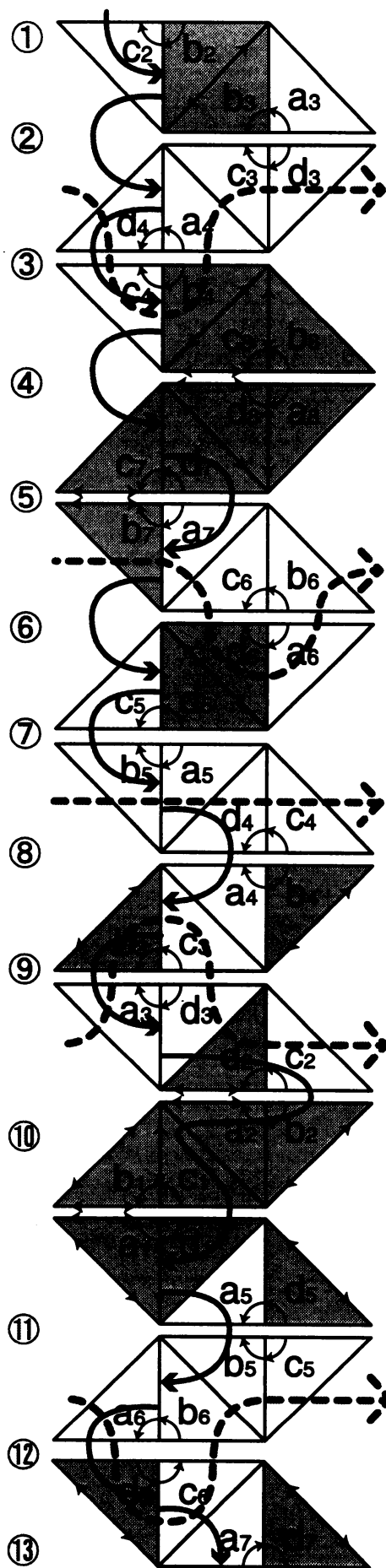


Figure 3

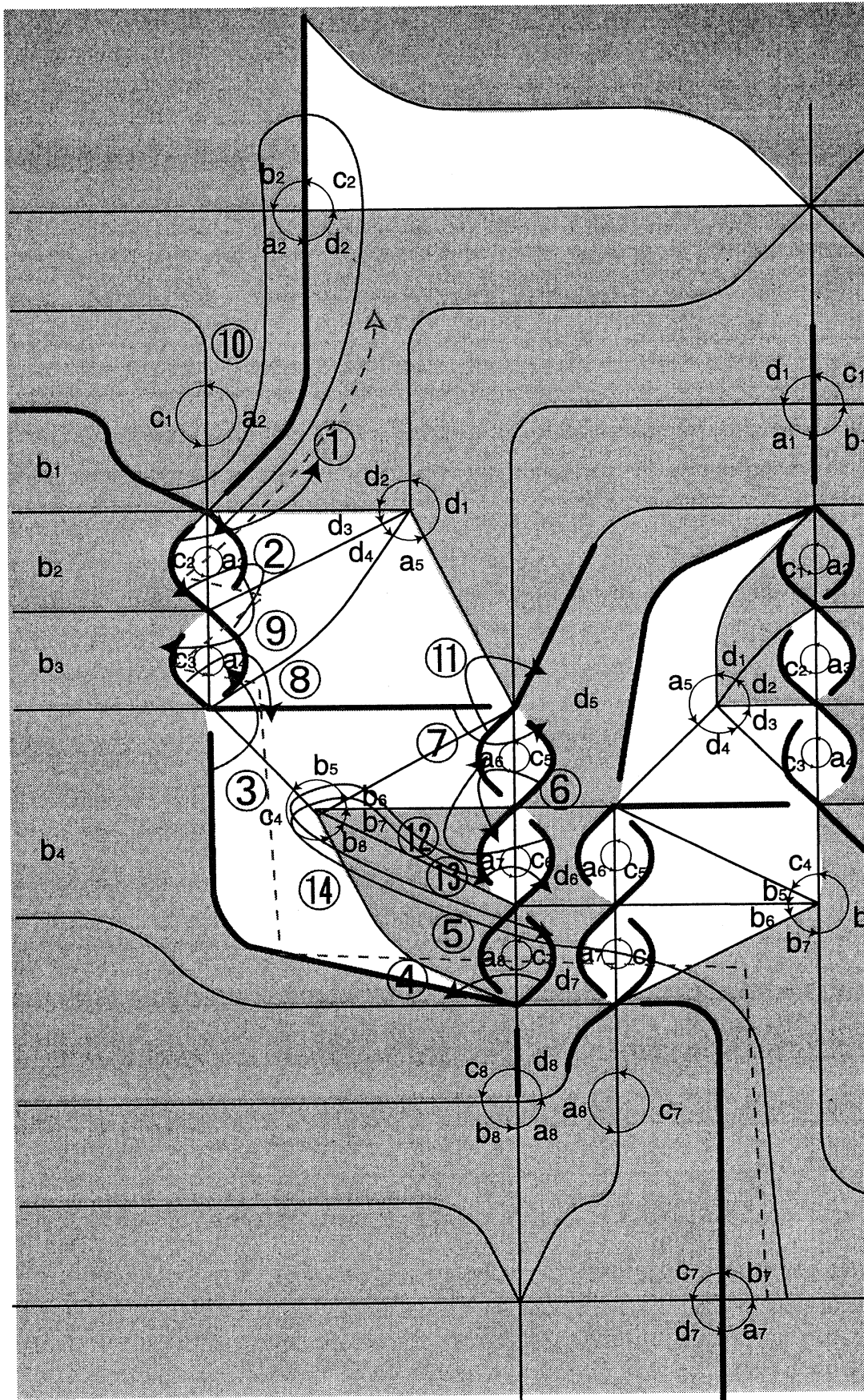


Figure 4