数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 1-13



# $Sp(2,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数と Novodvorsky のゼータ積分について

東京大学数理科学 森山 知則
(Tomonori Moriyama)

## §0. 序.

$\mathrm{G}=GSp(2)$ を, 有理数体 $\mathbf{Q}$ 上で定義された種数 2 の一般斜行群とする。$F$ をアデール群 $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$ 上の尖点形式であって, その大域的 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F$ が消滅しないものとする。さらに $F$ は無限素点において大きな離散系列表現を生成すると仮定する。本稿では, 尖点形式 $F$ に付随した 4 次のオイラー積を持つ $L$-関数 (spinor $L$-関数) が, 全 $s$-平面上の整関数に解析接続され関数等式を満たすことが証明できたことを報告する。なお, 講演時には spinor $L$-関数が, 全 $s$-平面上の 有理型関数 に解析接続されると述べたが, しばらくして, 整関数 になることも証明することができた。

上述の結果は, Novodvorsky [No, §1] による spinor $L$-関数の積分表示 (Novodvorsky のゼータ積分) を用いて証明される。Novodvorsky の理論は, G の極大べき単部分群 N に沿った Fourier 展開に基づいており, そこに表題の Whittaker 関数が現れる。中でも, ここでの議論の核心は $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}=GSp(2,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数の Mellin-Barnes 型の積分表示 ([Mo-1],[Mo-2]) を使って Novodvorsky のゼータ積分の実素点における因子を明示的に計算することで,「局所関数等式」(後述の**命題 4**) を証明することである。

$GSp(2)_{\mathbf{A}}$ 上の保型形式に付随した spinor $L$-関数の積分表示としては, 他に Andrianov [An] の方法 (なお, [Ps] も参照) や Murase-Sugano [MS] の方法などが知られている。特に, Andrianov の積分表示はよく調べられている。原論文 [An] はスカラー値の正則保型形式を扱っているが, その手法と結果は, Arakawa [Ar] (ベクトル値の正則保型形式), Hori [Ho] (無限素点で spherical な主系列表現を生成する場合, いわゆる波動形式), Miyazaki [Mi] (無限素点で大きな離散系列表現を生成する場合) らによって拡張されている。なお, 各々の積分表示法ごとに適用できる保型形式のクラスは異なることを注意しておこう。なぜなら, いずれの方法においても, 保型形式 $F$ の適当な部分群に沿った Fourier 展開における「Fourier 係数」を用いるので, この「Fourier 係数」が消滅しない場合にのみそれぞれの積分表示が可能となるからである (§1 の終わりの注意を参照)。

## §1. 主定理.

**(1.1) 主結果.** まず, 主定理を定式化しよう。G を次数 2 の similitude 付き symplectic 群とする:

$$\mathrm{G}=GSp(2):=\{g\in GL(4)\,|\,{}^t gJ_4g=\nu(g)J_4 \text{ for some } \nu(g)\in\mathbf{G}_m\},\ J_4=\left(\begin{array}{c|c} & 1_2\\ \hline -1_2 & \end{array}\right),$$

ここで G を $\mathbf{Q}$ 上の代数群と考える。$\Pi\hookrightarrow\mathcal{A}^{cusp}(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}\backslash\mathrm{G}_{\mathbf{A}})$ を $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$ の尖点保型表現とする ($\Pi$ を 尖点形式の空間 $\mathcal{A}^{cusp}(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}\backslash\mathrm{G}_{\mathbf{A}})$ の部分空間とみなす)。$\omega_\Pi:\mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times\to\mathbf{C}^\times$ をその central character とする ($\Pi(z1_4)=\omega_\Pi(z)\mathrm{id}_\Pi$)。複素数 $\omega_\infty\in\mathbf{C}$ を $\omega_\Pi(z_\infty)=z_\infty^{\omega_\infty}$ ($z_\infty\in\mathbf{R}_{>0}$) で決める。さて, 主定理を述べるために $\Pi$ について次の仮定 **A.1** および **A.2** をおく。

**A.1** $\Pi$ に付随した大域的 Whittaker 模型が存在する。

尖点保型表現 $\Pi$ は $\Pi = \otimes'_v \Pi_v$ と $G_{\mathbf{Q}_v}$ の既約許容表現 $\Pi_v$ の制限テンソル積に分解しているが, この仮定 **A.1** から，各 $\Pi_v$ は（局所）Whittaker 模型を持つ。ここでは次の場合を考える:

**A.2** $\Pi_\infty$ の $Sp(2,\mathbf{R}) := \{g \in G_{\mathbf{R}} | \nu(g) = 1\}$ への制限は二つの (D.Vogan の意味で) 大きな (=large in the sense of Vogan) 離散系列表現 $D_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ と $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ との直和である。

ここで 表現のパラメータ $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{Z}^{\oplus 2}$ は $1-\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ を満たす整数の組であるが詳しくはすぐ後の小節で説明する。また, この条件と $\Pi_\infty(z_\infty 1_4) = z_\infty^{\omega_\infty}\mathrm{id}\ (z_\infty \in \mathbf{R}_{>0})$ によって $\Pi_\infty$ が一通りに決まる。

さて $\Pi$ に付随した spinor $L$-関数 $L(s,\Pi)$ および $\epsilon$-因子は $\epsilon(s,\Pi)$ は,

$$L(s,\Pi) := \prod_{p<\infty} L(s,\Pi_p) \qquad \epsilon(s,\Pi) := (-1)^{\lambda_1} \prod_{p<\infty} \epsilon(s,\Pi_p,\psi_p)$$

で定義される。ここで，$L(s,\Pi_p)$ および $\epsilon(s,\Pi_p,\psi_p)$ は後述の**定義-命題 3** で定義される局所的な $L$-因子，$\epsilon$-因子である。ほとんどすべての有限素点において，$L(s,\Pi_p)$ は 4 次の Euler 因子であり，$\epsilon(s,\Pi_p,\psi_p) = 1$ である。後で説明するように，$L(s,\Pi)$ は $\mathrm{Re}(s) > (5-\mathrm{Re}(\omega_\infty))/2$ で絶対収束する。これに $\Gamma$-因子

$$L(s,\Pi_\infty) := \Gamma_{\mathbf{C}}\Big(s+\frac{\omega_\infty}{2}+\frac{\lambda_1-1}{2}+\frac{\lambda_2}{2}\Big)\Gamma_{\mathbf{C}}\Big(s+\frac{\omega_\infty}{2}+\frac{\lambda_1-1}{2}-\frac{\lambda_2}{2}\Big)$$

を掛けて完備化された spinor $L$-関数 $\widehat{L}(s,\Pi)$ を

$$\widehat{L}(s,\Pi) := L(s,\Pi_\infty) \times L(s,\Pi)$$

で定義する。

尖点形式 $F \in \Pi$ に対して

$$\tilde{F}(g) = \omega_\Pi(\nu(g))^{-1}F(g\eta), \quad \eta := \left(\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & -1 & & \\ 1 & & & \end{array}\right) \in G_{\mathbf{Q}},$$

とおくと, $\tilde{\Pi} := \{\tilde{F} \in \mathcal{A}^{cusp}(G_{\mathbf{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}}) | F \in \Pi\}$ も上の条件 **A.1**, **A.2** を満たす既約な尖点保型表現であることが分かる。また，$\tilde{\Pi} = \otimes'_v \tilde{\Pi}_v$ と書くとき，$G_{\mathbf{Q}_v}$ の表現 $\tilde{\Pi}_v$ は $\Pi_v$ の反傾表現である ( $v$ が有限素点のときは, [TB, Proposition 2.3] による。無限素点では, $D_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ の反傾表現が $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ であることから分かる)。従って，$\tilde{\Pi}$ は，$\Pi$ の反傾表現である。$\tilde{\Pi}$ も上の条件 **A.1**, **A.2** を満たすから，$L(s,\tilde{\Pi}) := \prod_{p<\infty} L(s,\tilde{\Pi}_p)$, $L(s,\tilde{\Pi}_\infty)$ および $\widehat{L}(s,\tilde{\Pi})$ が定義されていることに注意しよう。

主定理は次のように述べられる:

**定理 1.** 尖点保型表現 $\Pi$ に対して，上の **A.1** および **A.2** を仮定する。このとき, 完備化された *spinor* $L$-関数 $L(s,\Pi)$ は全 $s$-平面上の整関数として解析接続され, 関数等式

$$\widehat{L}(s,\Pi) = \epsilon(s,\Pi)\widehat{L}(1-s,\tilde{\Pi}),$$

**注意** ここでは基礎体を有理数体としたが，証明 (§3) からすぐわかるように基礎体が総実代数体の場合にも同様の結果が成立する。

**(1.2) $Sp(2,\mathbf{R})$ の離散系列表現.** この小節では，Harish-Chandra による半単純リー群の離散系列表現のパラメータ付けを，$Sp(2,\mathbf{R}) := \{g \in \mathsf{G}_{\mathbf{R}} | \nu(g) = 1\}$ の場合に思い出す (詳しくは，[Kn, Ch. VII] を参照)。

$G := Sp(2,\mathbf{R})$ の極大コンパクト部分群として $K = Sp(2,\mathbf{R}) \cap O(4)$ をとる。$K$ とユニタリ群 $U(2) := \{g \in GL(2,\mathbf{C}) | {}^t\overline{g}g = I_2\}$ との同型 $u : U(2) \cong K$ を

$$u : U(2) \ni A + \sqrt{-1}B \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in K, \quad (A, B \in M(2,\mathbf{R})).$$

と固定する。また $\mathfrak{g}$ の部分リー環 $\mathfrak{l}$ に対して，その複素化 $\mathfrak{l} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ を $\mathfrak{l}_{\mathbf{C}}$ と書き，その双対空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{l}_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ を $\mathfrak{l}_{\mathbf{C}}^*$ で表す。$u$ が引き起こすリー環の同型を $u_* : \mathfrak{gl}(2,\mathbf{C}) \cong \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ で表し，

$$T_1 := u_*(\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}); \quad T_2 := u_*(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}),$$

とおくと，$\mathfrak{t} := \mathbf{R}T_1 \oplus \mathbf{R}T_2$ は単純リー環 $\mathfrak{g}$ のコンパクトな Cartan subalgebra である。$\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$ の $\mathbf{C}$-基底 $\{\beta_1, \beta_2\}$ を $\beta_i(T_j) = \sqrt{-1}\delta_{ij}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 2)$ で定義する。$(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ に関するルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ は $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}) = \{\pm 2\beta_1, \pm 2\beta_2, \pm(\beta_1 \pm \beta_2)\}$ で与えられる。$\Delta$ の正ルート系 $\Delta^+$ として $\Delta^+ := \{2\beta_1, \beta_1 + \beta_2, 2\beta_2, \beta_1 - \beta_2\}$ をとる。コンパクトルートの全体は $\Delta_c := \{\pm(\beta_1 - \beta_2)\}$ で与えられる。$\Delta_c^+ := \Delta^+ \cap \Delta_c$ とおく.

$K$ の有限次元既約表現の $\Delta_c^+$ に関する最高ウェイトは $q_1\beta_1 + q_2\beta_2 = (q_1, q_2)$ $(q_i \in \mathbf{Z}, q_1 \geqslant q_2)$ と書ける。逆に，各 $(q_1, q_2) \in \mathbf{Z}^{\oplus 2}$, $(q_1 \geqslant q_2)$ に対して $\Delta_c^+$ に関する最高ウェイト $q_1\beta_1 + q_2\beta_2$ を持つ $K$ の有限次元既約表現 $\tau$ が同値を除いて丁度一つ存在する。これを，$\tau = \tau_{(q_1,q_2)}$ と書く。

さて，$\Delta_c^+$ を含むような $\Delta$ の正ルート系は次の４つである:

$\Delta_I^+ = \{(1,-1), (2,0), (1,1), (0,2)\}$;　　$\Delta_{II}^+ = \{(1,-1), (0,-2), (2,0), (1,1)\}$;

$\Delta_{III}^+ = \{(1,-1), (-1,-1), (0,-2), (2,0)\}$;　$\Delta_{IV}^+ = \{(1,-1), (-2,0), (-1,-1), (0,-2)\}$.

各 $J \in \{I, II, III, IV\}$ に対して，

$$\Xi_J := \{\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2) | \langle \Lambda, \beta \rangle > 0, \forall \beta \in \Delta_J^+\}, \quad \Delta_{J,n}^+ := \Delta_J^+ \setminus \Delta_c^+$$

とおく。すると，集合 $\cup_{I \leqslant J \leqslant IV} \Xi_J$ によって $Sp(2,\mathbf{R})$ の離散系列表現がパラメータ付けされる。$\Lambda \in \Xi_J$ をパラメータにもつ $Sp(2,\mathbf{R})$ の離散系列表現を $\pi_\Lambda$ で表し，$\Lambda$ を $\pi_\Lambda$ の Harish-Chandra パラメータという。$\pi_\Lambda$ の Blattner パラメータ $\lambda_{min}$ は $\lambda_{min} := \Lambda - \rho_{c,J} + \rho_{n,J}$ で与えられる。ここで，$\rho_{c,J} := \sum_{\beta \in \Delta_{J,c}} \beta$ および $\rho_{n,J} := \sum_{\beta \in \Delta_{J,n}} \beta$ とおいた。$\pi_\Lambda|_K$ の $K$-タイプの最高ウェイトは

$$\lambda_{min} + \sum_{\alpha \in \Delta_{J,n}^+} m_\alpha \alpha, \qquad m_\alpha \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0},$$

という形をしている。さらに，$\tau_{\lambda_{min}}$ は $\pi_\Lambda|_K$ に重複度 1 で現れ，$\pi_\Lambda$ の極小 $K$-タイプと呼ばれる。極小 $K$-タイプ $\tau_{(q_1,q_2)}$ を持つ $Sp(2,\mathbf{R})$ の離散系列表現を $D_{(q_1,q_2)}$ であらわす。$Sp(2,\mathbf{R})$ の離散系列表現 $\pi_\Lambda$ は，$\Lambda \in \Xi_{II} \cup \Xi_{III}$ のとき，(Vogan の意味で) 大きいという。$\Lambda \in \Xi_{II}$ (resp. $\Xi_{III}$) のとき，$\pi_\Lambda = D_{\Lambda+(1,0)}$ (resp. $\pi_\Lambda = D_{\Lambda+(0,-1)}$) である。

**注意** $Sp(2,\mathbf{R})$ の離散系列表現 $\pi_\Lambda$ は，$\Lambda \in \Xi_I \cup \Xi_{IV}$ のとき (反) 正則離散系列表現と呼ば

れる。**A.2** の代わりに, $\Pi_\infty$ が二つの (反) 正則離散系列表現の直和であると仮定した場合には, Novodvorsky の積分表示は適用できない。すなわち, $\Pi_\infty$ は局所 Whittaker 模型を持たないので (このことは, たとえば, Kostant の定理 [Kos, Theorem 6.8.1] からわかる), 大域的 Whittakerk 関数 $\mathcal{W}_F$ が恒等的にゼロになってしまい次節以降の議論が展開できない。

## §2. Novodvorsky のゼータ積分についてのまとめ.

序で述べたように, 我々は Novodvorsky のゼータ積分を用いて定理を証明する。Novodvorsky の理論をここでまとめておこう（さらに詳しくは [No, §1], [Bu-1, §3], [TB] を参照)。

**(2.1) 大域的ゼータ積分.** 尖点形式 $F \in \mathcal{A}^{cusp}(\mathsf{G}_{\mathbf{Q}}\backslash\mathsf{G}_{\mathbf{A}})$ をとる。$F$ から定まる Novodvorsky のゼータ積分は

$$Z_N(s,F) := \int_{\mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times}\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{\oplus 3}} F\left(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & x_1 & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & z & -x_0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc|cc} y & & & \\ & y & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)\right)$$
$$\times\, \mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_0)|y|_{\mathbf{A}}^{s-1/2} dx_0 dx_1 dz d^\times y.$$

で定義される。ただし, ここで $\mathbf{e}_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}/\mathbf{Q} \to \mathbf{C}^{(1)}$ は $\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(t_\infty) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t_\infty)$ $(t_\infty \in \mathbf{R})$ で特徴づけられる additive character である。$F$ は尖点形式であるとしたから, この積分は $s \in \mathbf{C}$ について広義一様に絶対収束し $s \in \mathbf{C}$ の整関数を定める。

**(2.2) Whittaker 関数と基本等式.** $F$ に付随した大域的 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F$ を導入しよう。まず $\mathsf{G}$ の極大べき単部分群として

$$\mathsf{N} = \left\{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ \hline & & 1 & \\ & & * & 1 \end{array}\right) \in \mathsf{G}\right\}$$

をとる。$\mathsf{N}_{\mathbf{A}}$ の非退化指標を

$$\psi : \mathsf{N}_{\mathbf{A}} \ni \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) \mapsto \mathbf{e}_{\mathbf{A}}(-x_0 - x_3) \in \mathbf{C}^{(1)}.$$

と固定しておく。さて, $\mathsf{G}_{\mathbf{A}}$ 上の保型形式 $F$ に付随した大域的 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F : \mathsf{G}_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}$ を

$$\mathcal{W}_F(g) := \int_{\mathsf{N}_{\mathbf{Q}}\backslash\mathsf{N}_{\mathbf{A}}} F(ng)\psi(n^{-1})dn, \quad g \in \mathsf{G}_{\mathbf{A}},$$

で定義する。仮定 **A.1** の意味するところは, ある (したがって, 任意の) $F(\neq 0) \in \Pi$ に対して $\mathcal{W}_F \neq 0$ ということである。

尖点形式 $F \in \Pi$ が制限テンソル積分解 $\otimes'_v \Pi_v$ において $F = \otimes' \xi_v^F$ と書けているとき, $F$ は *decomposable* であるという。各素点 $v$ にたいして $\psi$ の $\mathsf{N}_{\mathbf{Q}_v}$ への制限を $\psi_v$ と書いて, $\Pi_v$ の $\psi_v$ に関する 局所 Whittaker 模型を $\mathsf{Wh}(\Pi_v, \psi_v)$ で表す。局所 Whittaker 模型の一意性 ( 有限素点では [R, Theorem 3], 無限素点では [Wa, Theorem 8.8(1)] による, なお

[Sh, Theorem 3.1] も参照) から, $F$ が decomposable ならば大域的 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F$ は局所 Whittaker 関数の積に分解する:

$$\mathcal{W}_F(g) = \prod_v \mathcal{W}_F^{(v)}(g_v), \qquad g = (g_v) \in \mathsf{G}_{\mathbf{A}}, \quad \mathcal{W}_F^{(v)} \in \mathsf{Wh}(\Pi, \psi_v).$$

このとき, 局所ゼータ積分 $Z_N^{(v)}(s, \mathcal{W}_F^{(v)})$ を

$$Z_N^{(v)}(s, \mathcal{W}_F^{(v)}) = \int_{\mathbf{Q}_v^\times} d^\times y \int_{\mathbf{Q}_v} dx \mathcal{W}_F^{(v)}(\left(\begin{array}{cc|cc} y & & & \\ & y & & \\ \hline & & 1 & \\ & x & & 1 \end{array}\right))|y|_v^{s-3/2}$$

で定義する。このとき, 次の基本等式 (Basic identity) が成立する（証明は付録 1 を参照)。

**命題 2** (Novodvorsky ?). $F \in \Pi$ を *decomposable* な尖点形式とする。無限素点における局所ゼータ積分 $Z_N^{(\infty)}(s, \mathcal{W}_F^{(\infty)})$ は $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ ($\sigma_0 \in \mathbf{R}$ は定数) で絶対収束すると仮定する。このとき,
(i) 積分

$$(\bigstar): \qquad \int_{\mathbf{A}^\times} \int_{\mathbf{A}} \mathcal{W}_F(\left(\begin{array}{cc|cc} y & & & \\ & y & & \\ \hline & & 1 & \\ & x & & 1 \end{array}\right))|y|_{\mathbf{A}}^{s-3/2}\, dx\, d^\times y.$$

は $\mathrm{Re}(s) > \max\{\sigma_0, (5 - \mathrm{Re}(\omega_\infty))/2\}$ で絶対収束し $Z_N(s, F)$ に等しい。
(ii) ゼータ積分 $Z_N(s, F)$ は局所ゼータ積分の積に分解する:

$$Z_N(s, F) = \prod_v Z_N^{(v)}(s, \mathcal{W}_F^{(v)}).$$

ここで, 右辺は $\mathrm{Re}(s) > \max\{\sigma_0, (5 - \mathrm{Re}(\omega_\infty)/2\}$ で絶対収束する。

**(2.3) 有限素点における $L$-因子, $\epsilon$-因子.** 有限素点 $p < \infty$ を固定する。$\pi_p$ を $\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p}$ の既約許容表現 $\pi_p$ とし, $\omega_{\pi_p}$ をその central character とする。$\pi_p$ の表現空間に $g \in \mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p}$ を $\omega_{\pi_p}(\nu(g)^{-1})\pi_p(g)$ でもって作用させて得られる表現を $\tilde{\pi}_p$ 書く。$\tilde{\pi}_p$ は $\pi_p$ の反傾表現に同値である ([TB, Proposition 2.3])。$\pi_p$ は局所 Whittaker 模型 $\mathsf{Wh}(\pi_p, \psi_p)$ を持つとしよう。自然な埋め込み $\mathsf{G}_{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p}$ による $\eta \in \mathsf{G}_{\mathbf{Q}}$ の像を $\eta_p \in \mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p}$ と書いて, 局所 Whittaker 関数 $W \in \mathsf{Wh}(\pi_p, \psi_p)$ に対して, $\tilde{W}(g) := \omega_{\pi_p}(\nu(g)^{-1})W(g\eta_p)$ $(g \in \mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p})$ とおく。すると, $\tilde{W}$ は $\tilde{\pi}_p$ の Whittaker 模型 $\mathsf{Wh}(\tilde{\pi}_p, \psi_p)$ に属すことに注意する。$\pi_p$ の $L$-因子, $\epsilon$-因子を次のように定義する:

**定義-命題 3** (Novodvorsky, [TB],[B] も参照). 有限素点 $p < \infty$ に対して, $\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p}$ の不分岐とは限らぬ既約許容表現 $\pi_p$ で局所 *Whittaker* 模型 $\mathsf{Wh}(\pi_p, \psi_p)$ を持つものを考える。
(1) このとき $Q_{\pi_p}(0) = 1$ なる一変数多項式 $Q_{\pi_p}(X) \in \mathbf{C}[X]$ で

$$\{Z_N^{(p)}(s, W^{(p)}) \in \mathbf{C}(p^{-s}) |\ W^{(p)} \in \mathsf{Wh}(\pi_p, \psi_p)\} = Q_{\pi_p}(p^{-s})^{-1}\mathbf{C}[p^{-s}, p^s]$$

なるものが（ただひとつ）存在する。表現 $\pi_p$ の $L$-因子 $L(s, \pi_p)$ を

$$L(s, \pi_p) := Q_{\pi_p}(p^{-s})^{-1}$$

定義する。
(2) $p^{-s}$ の単項式 $\epsilon(s,\pi_p,\psi_p)=ap^{-fs}$ $(a\in\mathbf{C}^\times, f\in\mathbf{Z})$ が存在して,

$$\frac{Z_N^{(p)}(1-s,\tilde{W})}{L(1-s,\tilde{\pi}_p)}=\epsilon(s,\pi_p,\psi_p)\times\frac{Z_N^{(p)}(s,W)}{L(s,\pi_p)}$$

が任意の $W\in \mathsf{Wh}(\pi_p,\psi_p)$ に対して成立する。
(3) $\pi_p$ を佐武パラメータ $A_p\in GSp(2,\mathbf{C})$ を持つ既約な不分岐主系列表現とし，その不分岐ベクトルに対応した局所 *Whittaker* 関数を $W^0$ と書く。このとき，$Z_N^{(p)}(s,W^0)$ は $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ で絶対収束して，そこで

$$Z_N^{(p)}(s,W^0)=\left[\det(1_4-A_p\cdot p^{-s})\right]^{-1}$$

が成立する。さらに，$L(s,\pi_p)=\left[\det(1_4-A_p\cdot p^{-s})\right]^{-1}$ かつ $\epsilon(s,\pi_p,\psi_p)=1$ である。

**注意** (i) (3) は，不分岐有限素点における局所ゼータ積分を，$W^0$ の明示公式 ([K], [CS]) を用いて計算して示される (詳しくは, **付録 2** を参照)。また，Takloo-Bighash [TB] は全ての局所 Whittaker 模型を持つような $\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p}$ の既約許容表現 $\pi_p$ に対して $L$-因子 $L(s,\pi_p)$ を決定した。
(ii) 不分岐ベクトルを持つような $\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p}$ の既約許容表現 $\pi_p$ が局所 Whittaker 模型を持つならば, $\pi_p$ はある既約な不分岐主系列表現に同型である ([BM, Theorem 5.1],[Li, Theorem 2.7])。

## §3. 証明.

**(3.1) 無限素点での話に帰着すること.** $\Pi$ を仮定 **A.1** 及び **A.2** を満たす $\mathsf{G}_{\mathbf{A}}$ の尖点保型表現としよう。まず, 容易に分かるように

$$Z_N(s,F)=Z_N(1-s,\tilde{F}),\qquad F\in\Pi,$$

が成立する。decomposable な尖点形式 $F\in\Pi$ を, 各有限素点 $p<\infty$ で $Z^{(p)}(s,\mathcal{W}_F^{(p)})=L(s,\pi_p)$ となるようにとる。すると，命題 2 および 3 より,

$$Z_N(s,F)=Z_N^{(\infty)}(s,\mathcal{W}_F^{(\infty)})\times L(s,\Pi),$$
$$Z_N(1-s,\tilde{F})=\prod_{p<\infty}\epsilon(s,\Pi_p,\psi_p)\times Z_N^{(\infty)}(1-s,\mathcal{W}_{\tilde{F}}^{(\infty)})\times L(1-s,\tilde{\Pi}),$$

となる。ただし，自然な埋め込み $\mathsf{G}_{\mathbf{Q}}\hookrightarrow\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ による $\eta\in\mathsf{G}_{\mathbf{Q}}$ の像を $\eta_\infty\in\mathsf{G}_{\mathbf{R}}$ と書いて，$\mathcal{W}_{\tilde{F}}^{(\infty)}(g):=\omega_\Pi(\nu(g)^{-1})\mathcal{W}_F^{(\infty)}(g\eta_\infty)$ $(g\in\mathsf{G}_{\mathbf{R}})$ とおいた。一般に，局所 Whittaker 関数 $W\in\mathsf{Wh}(\Pi_\infty,\psi_\infty)$ に対して, $\tilde{W}\in\mathsf{Wh}(\tilde{\Pi}_\infty,\psi_\infty)$ を

$$\tilde{W}(g_\infty)=\omega_\Pi(\nu(g)^{-1})W(g_\infty\eta_\infty),\qquad(g_\infty\in\mathsf{G}_{\mathbf{R}}),$$

で定義する。すると，主定理のうち, $\hat{L}(s,\Pi)$ が整関数になること以外は次の命題から従う:

**命題 4** (「局所関数等式」). 次の (i) および (ii) を満たすような 局所 *Whitakker* 関数 $W\in\mathsf{Wh}(\Pi_\infty,\psi_\infty)$ が存在する。
(i) 局所ゼータ積分 $Z_N^{(\infty)}(s,W)$ および $Z_N^{(\infty)}(s,\tilde{W})$ は $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ で絶対収束して, 全 $s$-平面にゼロでない有理型関数として解析接続される ;
(ii) 等式

$$\frac{Z_N^{(\infty)}(1-s,\tilde{W})}{L(1-s,\tilde{\Pi}_\infty)}=(-1)^{\lambda_1}\times\frac{Z_N^{(\infty)}(s,W)}{L(s,\Pi_\infty)}$$

が成立する。

また，$\hat{L}(s,\Pi)$ が整関数になることは次の命題からわかる:

**命題 5.** 任意に固定した複素数 $s_0 \in \mathbf{C}$ に対して，$\Pi_\infty$ に属す局所 *Whittaker* 関数 $W_{[s_0]}$ : $G_{\mathbf{R}} \to \mathbf{C}$ が存在して次の (条件) を満たす:
(条件) : $Z_N^{(\infty)}(s, W_{[s_0]})$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束し，$Z_N^{(\infty)}(s, W_{[s_0]})/L(s,\Pi_\infty)$ は $s = s_0$ で零点を持たない全 $s$-平面上定義された有理型関数に解析接続される。

以下§3 の終わりまで，命題 4 の証明を述べる。命題 5 については，ここでは省略する ([Mo-3] を参照)。

**(3.2) Whittaker 関数の明示公式.** 容易にわかるように，$\omega_\infty = 0$ の場合に示せば十分なので，以下これを仮定する。$v_0 \in \Pi_\infty$ を $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ の極小 $K$-タイプ $\tau_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ の最低ウェイトベクトルとする。言い換えると，$v_0 \neq 0$ は

$$\Pi(u_*(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}))v_0 = 0, \quad \Pi(T_1)v_0 = -\sqrt{-1}\lambda_1 v_0, \quad \Pi(T_2)v_0 = -\sqrt{-1}\lambda_2 v_0,$$

で定数倍を除いて特徴づけられる $\Pi_\infty$ の元である。$v_0$ に対応する局所 Whittaker 関数を $W_{v_0} \in \mathrm{W}(\Pi_\infty, \psi_\infty)$ で表す。次節で，この $W_{v_0}$ が命題 4 の条件 (i) および (ii) を満たすことを証明するが，そのために次の命題で与えられる $W_{v_0}$ および $\tilde{W}_{v_0}$ の明示的な公式を用いる。公式を記述するために，$G_{\mathbf{R}}$ のベクトル部分群 $A := \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}) | a_i > 0\ (i = 1,2)\}$ 上の座標 $x = (x_1, x_2)$ を

$$x_1 := \sqrt{4\pi^3}\, a_1, \quad x_2 := \sqrt{4\pi}\, a_2,$$

で導入しておく。

**命題 6** ([O], [Mo-1], [Mo-2]). (1) 実素点における局所 *Whittaker* 関数 $W_{v_0}$ と $\tilde{W}_{v_0}$ の台は $G_{\mathbf{R}}$ の単位元の連結成分に含まれる。
(2) 二つの実数 $(\sigma_1, \sigma_2)$ を

$$\sigma_1 + \sigma_2 + 1 > 0, \quad \text{および} \quad \sigma_1 > 0 > \sigma_2$$

をみたすようにとる。すると $C \in \mathbf{C}^\times$ を定数として

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & W_{v_0}\big(\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1})\big) \\
&= C \times \exp(-x_2^2/2) \times \int_{L(\sigma_1)} x_1^{-s_1+\lambda_1+1} ds_1 \int_{L(\sigma_2)} x_2^{-s_2+\lambda_2} ds_2 \\
&\quad \times \Gamma(\frac{s_1+s_2-2\lambda_2+1}{2})\Gamma(\frac{s_1+s_2+1}{2})\Gamma(\frac{s_1}{2})\Gamma(\frac{-s_2}{2}), \\
\text{(ii)} \quad & \tilde{W}_{v_0}\big(\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1})\big) \\
&= C \times (-1)^{\lambda_1} 2^{-\lambda_1+\lambda_2} \exp(-x_2^2/2) \times \int_{L(\sigma_1)} x_1^{-s_1+\lambda_2+1} ds_1 \int_{L(\sigma_2)} x_2^{-s_2+\lambda_1} ds_2 \\
&\quad \times (s_1)_{\lambda_1-\lambda_2} \times \Gamma(\frac{s_1+s_2-2\lambda_2+1}{2})\Gamma(\frac{s_1+s_2+1}{2})\Gamma(\frac{s_1}{2})\Gamma(\frac{-s_2}{2}).
\end{aligned}$$

が成立する (定数 $C$ は，二つの式で共通である)。ここで積分路 $L(\sigma_j)$ $(j = 1,2)$ は $\sigma_j - \sqrt{-1}\infty$ から $\sigma_j + \sqrt{-1}\infty$ へ向かう垂直な路である。

この公式の導出の仕方を述べる (詳しくは, [Mo-1], [Mo-2] を参照)。T. Oda ([O]) は局所 Whittaker 関数の動径成分の満たす微分方程式系をリー環の作用を見ることによって構成した。たとえば, $\phi(x_1,x_2)\in C^\infty(\mathbf{R}^2_{>0})$ を

$$W_{v_0}(\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1^{-1},a_2^{-1})) = x_1^{\lambda_1+1}x_2^{\lambda_2}\exp(-x_2^2/2)\phi(x_1,x_2)$$

で定義すると, $\phi(x)$ はつぎの二つの偏微分方程式をみたす:

- $\left[\partial_1\partial_2+4(x_1/x_2)^2\right]\phi(x)=0;$
- $\left[(\partial_1+\partial_2+2\lambda_2-1)(\partial_1+\partial_2-1)-2x_2^2\partial_2\right]\phi(x)=0.$

この微分方程式系の解として

$$\phi(x)=\int_{L(\sigma_1)}x_1^{-s_1}ds_1\int_{L(\sigma_2)}x_2^{-s_2}ds_2\times\Gamma\Big(\frac{s_1+s_2-2\lambda_2+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s_1+s_2+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s_1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{-s_2}{2}\Big)$$

が取れることはすぐにわかるが, 実はこの解のみが, 緩増大な Whittaker 関数に対応することも示せる。なお, [O] では上の微分方程式系から次のような積分表示を得ている:

$$\begin{aligned}&W_{v_0}\big(\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1^{-1},a_2^{-1})\big)\\ =&C'\times\exp(-x_2^2/2)x_1^{\lambda_1+1}x_2^{\lambda_2}\times\int_0^\infty t^{-k+1/2}W_{0,\nu_1}(t)\exp\Big(-\frac{t^2}{16x_2^2}-\frac{16x_1^2}{t^2}\Big)\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

ここで, $W_{0,\nu_1}(t)$ は通常の Whittaker 関数 ([W-W, Ch.16])。我々の公式を, この式から Mellin 変換によって導くことも容易である。

**(3.3) 局所ゼータ積分の計算 (証明の完結).** 上の明示公式を局所ゼータ積分 $Z_N^{(\infty)}(s,W_{v_0})$ および $Z_N^{(\infty)}(s,\tilde{W}_{v_0})$ に代入して計算すると, これらは $\mathrm{Re}(s)>\frac{-\lambda_1-\lambda_2+1}{2}$ で絶対収束して, $C_1\in\mathbf{C}^\times$ を共通の定数として,

- $$\begin{aligned}\frac{Z_N^{(\infty)}(s,W_{v_0})}{L(s,\Pi_\infty)}=&C_1\times\sum_{l=1}^{-\lambda_2}(-4\pi)^{-l}\frac{(l-1)!}{(-\lambda_2-l)!}\\ &\times\Gamma\Big(\frac{s+l+\frac{\lambda_1+\lambda_2+1}{2}}{2}\Big)^{-1}\Gamma\Big(\frac{-s+l+\frac{-\lambda_1+3\lambda_2+3}{2}}{2}\Big)^{-1};\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{Z_N^{(\infty)}(s,\tilde{W}_{v_0})}{L(s,\Pi_\infty)}=&C_1\times(-1)^{\lambda_1}\times\sum_{l=1}^{-\lambda_2}(-4\pi)^{-l}\frac{(l-1)!}{(-\lambda_2-l)!}\\ &\times\Gamma\Big(\frac{s+l+\frac{-\lambda_1+3\lambda_2+1}{2}}{2}\Big)^{-1}\Gamma\Big(\frac{-s+l+\frac{\lambda_1+\lambda_2+3}{2}}{2}\Big)^{-1},\end{aligned}$$

となることがわかる。これから, $W_{v_0}$ が命題 4 の二つの条件を満たすことは直ちにわかる。なお, 上の局所ゼータ積分の計算の詳細は [Mo-3] に譲るが, 次の 2 つの積分公式を用いることを注意しておく。

**補題 7** (cf. [Bu 2, Proposition 2.6.3]). $\alpha,\beta$ は複素数で, $\mathrm{Re}(\alpha)<-1/2$ を満たすとする。このとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^\alpha\left(\frac{1+\sqrt{-1}x}{1-\sqrt{-1}x}\right)^\beta dx=2^{2\alpha+2}\pi\times\frac{\Gamma(-1-2\alpha)}{\Gamma(-\alpha-\beta)\Gamma(-\alpha+\beta)}.$$

ただし, ここで $\frac{1+\sqrt{-1}x}{1-\sqrt{-1}x}=e^{\sqrt{-1}\theta_x}$ $(\theta_x\in\mathbf{R},|\theta_x|<\pi)$ と書いて, $\left(\frac{1+\sqrt{-1}x}{1-\sqrt{-1}x}\right)^\beta=e^{\sqrt{-1}\theta_x\beta}$ と理解する。

**補題 8** (Barnes' 1st Lemma [W-W, p.289]). 4つの複素数 $a,b,c,d$ が $a+c, a+d, b+c, b+d \notin \mathbf{Z}_{\leqslant 0}$ を満たしているとする。このとき，

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_L \Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)ds = \frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}.$$

ここで, 積分路 $L$ は $-\sqrt{-1}\infty$ から出発して, $\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)$ の極を左に, $\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)$ の極を右にみて, $+\sqrt{-1}\infty$ へ向かう路である。

**付録 1．命題 2 (Basic identity) の証明.** Basic identity の証明は，[Bu-1, §3] にも概略があるが，念のため書いておく。

はじめに積分 (★) の収束範囲を調べる。まず, 局所ゼータ積分 $Z_N^{(p)}(s, \mathcal{W}_F^{(p)})$ は $\mathrm{Re}(s) > (3-\mathrm{Re}(\omega_\infty))/2$ で絶対収束することが次のようにしてわかる。$F \in \Pi$ は自明な central character を持つ尖点形式だから，$\mathsf{G}^1_{\mathbf{A}} := \{g \in \mathsf{G}_{\mathbf{A}} \mid |\nu(g)|_{\mathbf{A}} = 1\}$ 上で有界である。よって，$F$ に付随した大域的 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F$ も $\mathsf{G}^1_{\mathbf{A}}$ 上で有界である。したがって，各局所 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F^{(v)}$ に対して, 関数 $\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_v} \ni g_v \mapsto |\nu(g_v)|_v^{-\mathrm{Re}(\omega_\infty)/2}\mathcal{W}_F^{(v)}(g_v) \in \mathbf{C}$ は有界である。一方，各有限素点 $p<\infty$ ごとに, $C>0$ が存在して, 関数

$$(\sharp):\qquad \mathbf{Q}_p \times \mathbf{Q}_p^\times \ni (x,y) \mapsto \mathcal{W}_F^{(p)}\left(\left(\begin{array}{cc|cc} y & & & \\ & y & & \\ \hline & & 1 & \\ & x & & 1 \end{array}\right)\right) \in \mathbf{C}$$

の台は $\{(x,y) \in \mathbf{Q}_p \times \mathbf{Q}_p^\times \mid |x|_p < C, |y|_p < C\}$ に含まれる。これら二つの事実から, 有限素点 $p<\infty$ における局所ゼータ積分 $Z_N^{(p)}(s,\mathcal{W}_F^{(p)})$ は $\mathrm{Re}(s) > (3-\mathrm{Re}(\omega_\infty))/2$ で絶対収束する。しかもほとんどの有限素点において，$Z_N^{(p)}(s,\mathcal{W}_F^{(p)})$ は, $\det[1_4 - A_p p^{-s}]^{-1}$ という形だから, 積分 (★) は $\mathrm{Re}(s) > \max\{\sigma_0, (5-\mathrm{Re}(\omega_\infty)/2\}$ で絶対収束することが分かる。

Basic identity を示すために, まず次の補題を示そう:

**補題 9.** $F$ を $\mathsf{G}_{\mathbf{A}}$ 上の尖点形式とするとき，任意の $g \in \mathsf{G}_{\mathbf{A}}$ に対して，

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{\oplus 3}} F\left(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 & 1 \end{array}\right) g\right)\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_0)dx_1dx_2dx_0$$
$$= \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}^\times} \mathcal{W}_F\left(\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) g\right).$$

*Proof.* $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ 上の関数 $F_1$ を，

$$F_1(x_3) := \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{\oplus 3}} F\left(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 & 1 \end{array}\right) g\right)\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_0)dx_1dx_2dx_0$$

で定める。すると，

$$(\text{左辺}) = F_1(0) = \sum_{\alpha\in\mathbf{Q}} \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} F_1(x_3)\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(\alpha x_3)dx_3$$

$\alpha = 0$ の項は Siegel 型放物部分群に沿った定数項ゆえゼロなので

$$= \sum_{\alpha\in\mathbf{Q}^\times} \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} F_1(\alpha^{-1}x_3)\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_3)dx_3$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathbf{Q}^\times} \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} dx_3 \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{\oplus 3}} F(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & \alpha^{-1}x_3 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 & 1 \end{array}\right) g)$$
$$\times\, \mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_0 + x_3)dx_1dx_2dx_0$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathbf{Q}^\times} \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} dx_3 \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{\oplus 3}} F(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) g)$$
$$\times\, \mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_0 + x_3)dx_1dx_2dx_0$$
$$= (\text{右辺}).$$

□

補題 9 を用いて，次が示される：

**補題 10.** $F$ を $\mathsf{G}_{\mathbf{A}}$ 上の尖点形式とするとき，任意の $g \in \mathsf{G}_{\mathbf{A}}$ に対して，

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{\oplus 2}} F(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & x_1 & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 & 1 \end{array}\right) g)\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_0)dx_0dx_1 = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathbf{Q}^\times\times\mathbf{Q}} \mathcal{W}_F(\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ \hline & & 1 & \\ & \beta & & 1 \end{array}\right) g).$$

*Proof.* 関数 $F_2 : \mathbf{A}/\mathbf{Q} \to \mathbf{C}$ を

$$F_2(x_2) := \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{\oplus 2}} F(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 & 1 \end{array}\right) g)\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_0)dx_0dx_1,$$

で定めると，

$$(\text{左辺}) = F_2(0) = \sum_{\beta\in\mathbf{Q}} \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} F_2(x_2)\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(\beta x_2)dx_2$$

となる。一方，補題 9 から，示すべき式の右辺は

$$\sum_{\beta\in\mathbf{Q}} \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{\oplus 3}} F(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & \beta & & 1 \end{array}\right) g)$$
$$\times\, \mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_0)dx_1dx_2dx_0$$

$$= \sum_{\beta \in \mathbf{Q}} \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{\oplus 3}} F(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 + x_2^2\beta & x_2 \\ & 1 & x_2 & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 + x_2\beta & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 - x_2\beta & 1 \end{array}\right) g)$$

$$\times \mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_0) dx_1 dx_2 dx_0$$

$$= \sum_{\beta \in \mathbf{Q}} \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{\oplus 3}} F(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 & 1 \end{array}\right) g)$$

$$\times \mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_0 - \beta x_2) dx_1 dx_2 dx_0$$

$$= \sum_{\beta \in \mathbf{Q}} \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})} F_2(x_2) \mathbf{e}_{\mathbf{A}}(-\beta x_2) dx_2.$$

となるので，補題 10 が示された。 □

この補題 10 を用いると，

$$Z_N(s, F) = \int_{\mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times} d^\times y \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} dz \sum_{(\alpha,\beta) \in \mathbf{Q}^\times \times \mathbf{Q}}$$

$$\times \mathcal{W}_F(\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ \hline & & 1 & \\ & \beta & & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & z & & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} y & & & \\ & y & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)) |y|_{\mathbf{A}}^{s-1/2}$$

$$= \int_{\mathbf{A}^\times} d^\times y \int_{\mathbf{A}} dz \mathcal{W}_F(\left(\begin{array}{cc|cc} y & & & \\ & y & & \\ \hline & & 1 & \\ & yz & & 1 \end{array}\right)) |y|_{\mathbf{A}}^{s-1/2}$$

となり Basic identity が出る。

**付録 2．命題 3 (3) の前半の証明 (不分岐有限素点における計算)．** まず，G の双対群の単位連結成分 ${}^L\mathrm{G}^0$ が $GSp(2, \mathbf{C})$ に同型であることを確認しておこう。G の極大 (分裂) トーラス T として $\mathrm{T} := \{t = \mathrm{diag}(t_0t_1, t_0t_2, t_1^{-1}, t_2^{-1}) | t_i \in \mathbf{G}_m (0 \leqslant i \leqslant 2)\}$ をとる。T の指標群 $X^*(\mathrm{T})$ の基底 $\{e_i | 0 \leqslant i \leqslant 2\}$ を $e_i(t) = t_i$ で定める。$\{f_j | 0 \leqslant j \leqslant 2\}$ を余指標群 $X_*(\mathrm{T})$ の基底で $\langle e_i, f_j \rangle = \delta_{i,j}$ を満たすものとする。同じく，$GSp(2, \mathbf{C})$ の極大トーラス $T_{\mathbf{C}} = \{a = \mathrm{diag}(a_0a_1, a_0a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}) | a_i \in \mathbf{C}^\times\}$ をとって，その指標群 $X^*(T_{\mathbf{C}})$ の基底 $\{f'_j | 0 \leqslant j \leqslant 2\}$ を $f'_j(a) = a_j$ で定める。余指標群 $X_*(T_{\mathbf{C}})$ の基底として $\{e'_i | 0 \leqslant i \leqslant 2\}$ を $\langle e'_i, f'_j \rangle = \delta_{i,j}$ なるものをとっておく。(G, T) に関するルート系の単純ルート系として，$\{e_1 - e_2, e_0 + 2e_2\}$ がとれる。対応する，余ルート系の単純余ルートは $\{f_1 - f_2, f_2\}$ となる。同様に，$(GSp(2, \mathbf{C}), T_{\mathbf{C}})$ に関するルート系の単純ルート系として，$\{f'_1 - f'_2, f'_0 + 2f'_2\}$ がとれ，これに対応する余ルート系の単純余ルート系は $\{e'_1 - e'_2, e'_2\}$ である。従って，$X^*(\mathrm{T})$ と $X_*(T_{\mathbf{C}})$ を

$$e_0 = 2e'_0 - e'_1 - e'_1, \qquad e_1 = -e'_0 + e'_1 + e'_2, \qquad e_2 = -e'_0 + e'_1,$$

と同一視すると，同型 ${}^L\mathrm{G}^0 \cong GSp(2, \mathbf{C})$ が分かる。

さて，$W^0 \in \mathsf{Wh}(\pi_p,\psi_p)$ を $\pi_p$ の不分岐ベクトルに対応する Whittaker 関数で $W^0(1_4)=1$ と正規化したものする。$W^0$ の明示公式 ([Ka],[C-S]) を思い出そう。$\mathbf{m}=\sum_j m_j f_j \in X_*(\mathsf{T})$ に対して $p^{\mathbf{m}} := \prod_{j=0}^2 f_j(p)^{m_j} \in \mathsf{T}_{\mathbf{Q}_p}$ と書くことにすると，$W^0$ の $p^{\mathbf{m}}$ での値は

$$W^0(p^{\mathbf{m}}) = p^{(-3m_0-4m_1-2m_2)/2} \times \mathrm{tr}(\rho_{\mathbf{m}}(A_p))$$

で与えられる。ただし，ここで $\rho_{\mathbf{m}}$ は最高ウェイト $\mathbf{m} \in X^*(T_{\mathbf{C}}) = X_*(\mathsf{T})$ を持つ $GSp(2,\mathbf{C})$ の複素解析的有限次元表現を表す。一方，$\mathbf{m}=\sum_j m_j f_j = \sum_j m'_j f'_j$ によって，$m'_j \in \mathbf{Z}$ を定めると，Weyl の指標公式 (例えば, [Kob, 定理 9.47] を参照) から，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(\rho_{\mathbf{m}}(\alpha_0 \mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1^{-1},\alpha_2^{-1}))\\
=&\alpha_0^{2m'_0-m'_1-m'_2} \times \frac{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}\sum_{\epsilon_j=\pm1}\mathrm{sgn}(\sigma)\epsilon_1\epsilon_2\alpha_{\sigma(1)}^{\epsilon_1(m'_1+2)}\alpha_{\sigma(2)}^{\epsilon_2(m'_2+1)}}{(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1^{-1}-\alpha_2^{-1})(\alpha_1-\alpha_1^{-1})(\alpha_2-\alpha_2^{-1})}
\end{aligned}$$

となる。

この公式を用いて，$Z_N^{(p)}(s,W^0)$ を計算しよう。まず, [Bu-1] にもあるように, 標準的な議論により，付録 1 の ($\sharp$) で与えられる $(x,y)$ の関数は, $\{(x,y)\in\mathbf{Q}_p\times\mathbf{Q}_p^\times \mid |x|,|y|\leqslant 1\}$ に台を持つことがわかる。従って，$A_p=\alpha_0\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1^{-1},\alpha_2^{-1})\in GSp(2,\mathbf{C})$ とすると

$$\begin{aligned}
Z_N^{(p)}(s,W^0) &= \sum_{m=0}^{\infty} W^0(\mathrm{diag}(p^m,p^m,1,1)p^{-m(s-3/2)}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{tr}(\rho_{mf_0}(A_p))p^{-sm} = \sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{tr}(\rho_{m(f'_0+f'_1)}(A_p))p^{-sm}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}\sum_{\epsilon_j=\pm1}\mathrm{sgn}(\sigma)\epsilon_1\epsilon_2\alpha_{\sigma(1)}^{\epsilon_1(m+2)}\alpha_{\sigma(2)}^{\epsilon_2(m+1)}}{(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1^{-1}-\alpha_2^{-1})(\alpha_1-\alpha_1^{-1})(\alpha_2-\alpha_2^{-1})}(\alpha_0 p^{-s})^m\\
&= \det[1_4 - A_p p^{-s}]^{-1}
\end{aligned}$$

となって命題 3 (3) の前半が示された。 □

## References


[An] ANDRIANOV, A. N., Dirichlet series with Euler product in the theory of Siegel modular forms of genus two, Trudy Mat. Inst. Steklov. **112** (1971), 73-94,

[Ar] ARAKAWA, T., Vector-valued Siegel's modular forms of degree two and the associated Andrianov $L$-functions. Manuscripta Math. **44** (1983), 155-185.

[B-M] BARBASCH, D. AND MOY, A., Whittaker models with an Iwahori fixed vector. In: Representation theory and analysis on homogeneous spaces, Contemp. Math. 177, Amer. Math. Soc. (1994), 101-105.

[Bu-1] BUMP, D., The Rankin-Selberg method: a survey. In: Number theory, trace formulas and discrete groups, Academic Press (1989), 49-109.

[Bu-2] BUMP, D., *Automorphic forms and representations*, Cambridge University Press, (1997).

[C-S] CASSELMAN, W AND SHALIKA, J. A., The unramified principal series of $p$-adic groups. II. The Whittaker function. Compositio Math. 41 (1980), 207-231.

[H] HORI, A., Andrianov's $L$-functions associated to Siegel wave forms of degree two, Math. Ann. **303** (1995), 195-226.

[Ka] KATO, S, $P$ 進体上の Chevalley 群の class-1 Whittaker 函数, 東京大学修士論文 (1978).

[Kn] KNAPP, A. W., *Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples.* Princeton Mathematical Series, 36. Princeton University Press, Princeton, NJ, (1986).

[Kob] KOBAYASHI, T., Lie 群と Lie 環 2 . 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店, (2000).

[Kos] KOSTANT, B., On Whittaker vectors and representation theory, Invent. Math. **48** (1978), 101-184.

[Li] LI, J-S., Some results on the unramified principal series of $p$-adic groups, Math. Ann. **292** (1992), 747–761.

[Mi] MIYAZAKI, T., The generalized Whittaker functions for $Sp(2,\mathbf{R})$ and the gamma factor of the Andrianov $L$-functions, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **7,** 241-295 (2000).

[Mo-1] MORIYAMA, T., A remark on Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{R})$. to appear in J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 241-295 (2000).

[Mo-2] MORIYAMA, T., $Sp(2,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数と Novodvorsky のゼータ積分について．２００１年度表現論シンポジウム講演集，127-136 (2001).

[Mo-3] MORIYAMA, T., Spinor $L$-functions for generic cusp forms on $GSp(2)$ belonging to large discrete series representations. preprint, http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/users/preprint/preprint2002.html

[M-S] MURASE, A. AND SUGANO, T.: Shintani function and its application to automorphic $L$-functions for classical groups I, the orthogonal group case. Math. Ann. **299,** 17-56 (1994).

[No] NOVODVORSKY, M. E., Automorphic $L$-functions for symplectic group $GSp(4)$. Proc. Sympos. Pure Math. **33** Part 2, 87-95, (1979).

[O] ODA, T, An explicit integral representation of Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{R})$ for large discrete series representations, Tôhoku Math. J. **46** (1994), 261-279.

[Ps] PIATETSKI-SHAPIRO, I. I., $L$-functions for $\mathrm{GSp}_4$. Olga Taussky-Todd: in memoriam. Pacific J. Math. (1997), Special Issue, 259-275.

[R] RODIER, F., Whittaker models for admissible representations of reductive $p$-adic split groups. Proc. Sympos. Pure Math. **26** (1973), 425-430.

[Sh] SHALIKA, J. A., The multiplicity one theorem for $GL_n$, Ann. of Math. **100**, 171–193 (1974).

[TB] TAKLOO-BIGHASH, R, $L$-functions for the $p$-adic group GSp(4)., Amer. J. Math. **122**, 1085–1120, (2000).

[Wa] WALLACH, N., Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups. Lecture Notes in Mathematics **1024**, Springer-Verlag (1983).

[W-W] WHITTAKER, E. T. AND WATSON, G. N., *A course of modern analysis*, Reprint of the fourth (1927) edition, Cambridge University Press, (1996).

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA MEGURO-KU, TOKYO 153-8914, JAPAN

*E-mail address*: `moriy-to@ms.u-tokyo.ac.jp`