数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 14-24

Fourier-Jacobi Expansion of Kudla Lift

村瀬 篤(京都産業大学・理)
菅野 孝史(金沢大学・理)

§1. $U(2,1)$ 上の保型形式

1.1 K を,判別式 D の虚 2 次体とする. $\mathcal{O}_K$ を K の整数環, σ を $K/\mathbf{Q}$ の非自明な自己同型とする. $\mathbf{Q}$ の各素点 v に対し, $K_v = K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_v$ とおく.また,有限素点 p に対し,

$$\mathcal{O}_{K,p} = \begin{cases} \mathbf{Z}_p \oplus \mathbf{Z}_p & \cdots \quad K_p = \mathbf{Q}_p \oplus \mathbf{Q}_p \\ K_p \text{ の整数環} & \cdots \quad K_p \text{ は体} \end{cases}$$

とおき, $\mathcal{O}_{K,f} = \prod_{p<\infty} \mathcal{O}_{K,p}$ および $K^1 = \{t \in K^\times \mid tt^\sigma = 1\}$ とする.今後, K の 0 でない分数イデアルを単にイデアルということにする.

1.2

$$S = \begin{bmatrix} & & \kappa^{-1} \\ & 1 & \\ -\kappa^{-1} & & \end{bmatrix}$$

とおく.ここに, $\kappa = \sqrt{D}$ である. S は,符号 $(2,1)$ のエルミート行列である. G を S に関するユニタリ群とする.すなわち, $G_{\mathbf{Q}} = \{g \in GL_3(K) \mid {}^t g^\sigma S g = S\}$. N と R を

$$N_{\mathbf{Q}} = \left\{(w,x) := \begin{bmatrix} 1 & \kappa w^\sigma & x + \frac{\kappa}{2} w w^\sigma \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid w \in K, x \in \mathbf{Q}\right\}$$

$$R_{\mathbf{Q}} = \left\{n \operatorname{diag}(1,t,1) \mid n \in N_{\mathbf{Q}}, t \in K^1\right\}$$

で与えられる G の部分群とする.簡単のため, $n \operatorname{diag}(1,t,1)$ を nt と書く.スカラー行列 $\operatorname{diag}(t,t,t)$ は常に $t \cdot 1_3$ と書くことにする. $w, w' \in K, x, x' \in \mathbf{Q}, t \in K^1$ に対し, $(w,x)(w',x') = (w+w', x+x'+\frac{1}{2}\langle w, w'\rangle)$, および $t(w,x)t^{-1} = (tw, x)$

が成り立つ．ここに，$\langle w, w'\rangle = Tr_{K/\mathbf{Q}}(\kappa w^{\sigma} w')$．$a \in K^{\times}$ に対し，

$$\mathbf{d}(a) = \begin{bmatrix} a^{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \in G_{\mathbf{Q}}$$

とおく．

1.3　$G_{\infty} = G(\mathbf{R})$ の有界対称領域 $\mathcal{D} = \{{}^t(z,w) \in \mathbf{C}^2 \mid (z-\overline{z})/\kappa - w\overline{w} > 0\}$ への作用と，正則保型因子 $J\colon G_{\infty} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}^{\times}$ を次のように定める:

$$g \cdot Z^{\sim} = J(g,Z) \cdot (g\langle Z\rangle)^{\sim} \qquad (g \in G_{\infty}, Z \in \mathcal{D}).$$

ここで，$Z = {}^t(z,w) \in \mathcal{D}$ に対し $Z^{\sim} = {}^t(z,w,1) \in \mathbf{C}^3$ とおいた．G_{∞} における $Z_0 = {}^t(\kappa/2, 0) \in \mathcal{D}$ の固定化部分群を $\mathcal{K}_{\infty}$ とする．$\mathcal{K}_{\infty}$ は G_{∞} の極大コンパクト部分群である．

1.4　$L = \mathcal{O}_K^3$ を K^3 の lattice とし，$L_f = \prod_{p<\infty} L_p$ とおく．ここに，各有限素点 p に対し，$L_p = L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$ である．また，$\mathcal{K}_p = \{g_p \in G_p \mid g_p L_p = L_p\}$，$\mathcal{K}_f = \prod_{p<\infty} \mathcal{K}_p$ とおくと，$\mathcal{K}_p$ (resp. $\mathcal{K}_f$) は，G_p (resp. $G_{\mathbf{A},f} = G_{\mathbf{A}}$ の有限部分) の極大コンパクト部分群である．

1.5　正の偶数 l に対し，$\mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f)$ を $G_{\mathbf{Q}} \backslash G_{\mathbf{A}}$ 上の smooth な関数 F で次の性質を満たすもののなす空間とする．

(i) $F(gk_f k_{\infty}) = J(k_{\infty}, Z_0)^{-l} F(g) \quad (g \in G_{\mathbf{A}}, k_f \in \mathcal{K}_f, k_{\infty} \in \mathcal{K}_{\infty})$

(ii) 任意の $g_f \in G_{\mathbf{A},f}$ に対し，$J(g_{\infty}, Z_0)^l F(g_{\infty} g_f)$ は $g_{\infty}\langle Z_0\rangle \in \mathcal{D}$ に関し正則である．

$\mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f)$ を $\mathcal{K}_f$ 上の weight l の正則保型形式の空間と呼ぶ．$\mathcal{Y}_l$ を $K_{\mathbf{A}}^{\times}/K^{\times}$ のユニタリ指標 Ω で，$\mathcal{O}_{K,f}^{\times} = \prod_{p<\infty} \mathcal{O}_{K,p}^{\times}$ 上 trivial，かつ $\Omega(z_{\infty}) = (z_{\infty}/|z_{\infty}|)^{-l}$ $(z_{\infty} \in K_{\infty}^{\times})$ を満たすものの集合とする．このとき，

$$\mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f) = \bigoplus_{\Omega \in \mathcal{Y}_l} \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f; \Omega)$$

が成り立つ．ここで，$\mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f;\Omega)$ は中心指標 Ω を持つ $F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f)$ の空間である．

$$\mathfrak{S}_l(\mathcal{K}_f) = \left\{ F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f) \mid \int_{N_{\mathbf{Q}} \backslash N_{\mathbf{A}}} F(ng)\, dn = 0 \ \ (g \in G_{\mathbf{A}}) \right\}$$

とおく．$\mathfrak{S}_l(\mathcal{K}_f)$ を $\mathcal{K}_f$ 上の weight l の尖点形式の空間という．

$$\mathfrak{S}_l(\mathcal{K}_f) = \bigoplus_{\Omega \in \mathcal{Y}_l} \mathfrak{S}_l(\mathcal{K}_f;\Omega),\quad \mathfrak{S}_l(\mathcal{K}_f;\Omega) = \mathfrak{S}_l(\mathcal{K}_f) \cap \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f;\Omega)$$

が成り立つ．

1.6 $\mathcal{H}(G_p,\mathcal{K}_p)$ を $(G_p,\mathcal{K}_p)$ に関する通常の Hecke algebra とする．$\mathcal{H}(G_p,\mathcal{K}_p)$ は $\mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f;\Omega)$ に次のように作用する：

$$F * \Phi(g) = \int_{G_p} F(gx^{-1})\Phi(x)\,dx \qquad (F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f;\Omega), \Phi \in \mathcal{H}(G_p,\mathcal{K}_p)).$$

ここに dx は $\mathrm{vol}(\mathcal{K}_p) = 1$ となるように正規化されている．各有限素点 p に対し，$\mathcal{H}(G_p,\mathcal{K}_p)$ から $\mathbf{C}$ への $\mathbf{C}$-algebra homomorphism Λ_p で，$F*\Phi = \Lambda_p(\Phi)\cdot F$ $(\Phi \in \mathcal{H}(G_p,\mathcal{K}_p))$ が成り立つようなものが存在するとき，$F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f;\Omega)$ を *Hecke eigenform* と呼ぶ．

1.7 $\mathbf{Q}_\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ の加法指標で $\psi(x_\infty) = \mathbf{e}[x_\infty] := \exp(2\pi\sqrt{-1}x_\infty)$ $(x_\infty \in \mathbf{R})$ により定まるものを ψ とする．$F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f), m \in \mathbf{Q}$ と K のイデアル $\mathfrak{a}$ に対し

$$F_\mathfrak{a}^m(r) = \int_{\mathbf{Q}\backslash\mathbf{Q}_\mathbf{A}} \psi_m(-x)\,F((0,x)r\mathbf{d}(\alpha_f))\,dx \quad (r \in R_\mathbf{A})$$

とおく．ここで，$\psi_m(x) = \psi(mx)$ $(x \in \mathbf{Q}_\mathbf{A})$．また，$\alpha_f \in K_{\mathbf{A},f}^\times$ は $\mathfrak{a}_f = \alpha_f\mathcal{O}_{K,f}$ $(\mathfrak{a}_f = \mathfrak{a} \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{Z}_f)$ となるように選ぶ．このとき F は $\{F_\mathfrak{a}^m\}_{m,\mathfrak{a}}$ たちによって決まる．$m < 0$ か $mN_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{a})$ が整イデアルでないときは，$F_\mathfrak{a}^m = 0$ であることに注意する．F が cuspidal ならば，任意の $\mathfrak{a}$ に対し，$F_\mathfrak{a}^0 = 0$ である．

§2. 原始的テータ関数

2.1 この節を通じて，m を正の有理数とする．$\mathbf{T}_{hol}^m$ を $R_\mathbf{Q}\backslash R_\mathbf{A}$ 上の smooth な関数 Θ で次の条件を満たすもののなす空間とする：

(i) $\Theta((0,x)r) = \psi_m(x)\,\Theta(r)$ $(x \in \mathbf{Q}_\mathbf{A}, r \in R_\mathbf{A})$

(ii) $\Theta(rt_\infty) = \Theta(r)$ $(r \in R_\mathbf{A}, t_\infty \in K_\infty^1)$

(iii) 任意の $r_f \in R_{\mathbf{A},f}$ に対し，$w_\infty \mapsto \mathbf{e}\left[-\dfrac{m\kappa}{2}\,w_\infty\overline{w_\infty}\right]\,\Theta((w_\infty,0)r_f)$ は $\mathbf{C}$ 上正則である．

$\mathbf{T}_{hol}^m$ を指数 m の正則テータ関数の空間と呼ぶ.

2.2 次に, $\mathbf{T}_{hol}^m$ 上の $K_{\mathbf{A}}^1$ の metaplectic 表現を定義しよう. $K/\mathbf{Q}$ に対応する $\mathbf{Q}$ の Hecke 指標を ω とする. K の Hecke 指標 χ で, $\chi|_{\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}^\times} = \omega$ をみたすものの集合を $\mathcal{X}$ とする. また, $\mathcal{X}_0 = \{\chi \in \mathcal{X} \mid \chi(z_\infty) = |z_\infty|/z_\infty \ (z_\infty \in K_\infty^\times = \mathbf{C}^\times)\}$ とおく. $\mathbf{Q}$ の素点 v に対し, $\lambda_{K_v}(\psi_m)$ を, $(K_v/\mathbf{Q}_v, \psi_m)$ に付随する Weil constant とする (cf. [MS1], §3.2). $\chi \in \mathcal{X}_0, \chi_v = \chi|_{K_v^\times}$ とする. $t_v \in K_v^1$ に対し, $\mathbf{T}_{hol}^m$ の自己準同型 $\mathcal{M}_{\chi_v}(t_v)$ を次のように定める: $t_v = 1$ のときは $\mathcal{M}_{\chi_v}(t_v) = \mathrm{Id}_{\mathbf{T}_{hol}^m}$ とおく. $t_v \neq 1$ のときは,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{\chi_v}(t_v)\,\Theta(r) \\
&\quad = \lambda_{K_v}(\psi_m)^{-1}\,\chi_v\left(\frac{1-t_v}{\kappa}\right) \\
&\quad \times \int_{K_v} \psi_m\left(\frac{1}{2}\langle w_v, t_v w_v\rangle\right)\,\Theta(r\,((1-t_v)w_v, 0))\,dw_v \quad (\Theta \in \mathbf{T}_{hol}^m, r \in R_{\mathbf{A}})
\end{aligned}$$

とおく. ここに, dw_v は K_v の Haar 測度で, pairing $(w_v, w_v') \mapsto \psi_m(\langle w_v, w_v'\rangle)$ に関し self-dual なものとする. $t = (t_v)_v \in K_{\mathbf{A}}^1$ に対し, $\mathcal{M}_\chi(t) = \otimes_v \mathcal{M}_{\chi_v}(t_v)$ とおく. $\mathcal{M}_\chi$ は $K_{\mathbf{A}}^1$ の $\mathbf{T}_{hol}^m$ 上の smooth な表現を定め, $\mathcal{M}_\chi(t) \circ \rho'(n_f) \circ \mathcal{M}_\chi(t^{-1}) = \rho'(t n_f t^{-1})$ $(t \in K_{\mathbf{A}}^1, n_f \in N_{\mathbf{A},f})$ を満たすことが知られている. ここに, ρ' は $R_{\mathbf{A},f}$ の $\mathbf{T}_{hol}^m$ 上の右移動表現を表す (cf. [MS2]).

2.3 $\chi \in \mathcal{X}_0$ に対し, $\mathbf{T}_{hol,\chi}^m = \{\Theta \in \mathbf{T}_{hol}^m \mid \mathcal{M}_\chi(t)\,\Theta(r) = \Theta(rt) \ (r \in R_{\mathbf{A}}, t \in K_{\mathbf{A}}^1)\}$ とおくと, 直交分解 $\mathbf{T}_{hol}^m = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}_0} \mathbf{T}_{hol,\chi}^m$ が得られる. K のイデアル $\mathfrak{a}$ と $\chi \in \mathcal{X}_0$ に対し, $\mathbf{T}_{hol}^m(\mathfrak{a}) = \{\Theta \in \mathbf{T}_{hol}^m \mid \Theta(r r_0) = \Theta(r) \ (r \in R_{\mathbf{A}}, r_0 \in R(\mathfrak{a})_f)\}$ および $\mathbf{T}_{hol}^m(\mathfrak{a}, \chi) = \mathbf{T}_{hol}^m(\mathfrak{a}) \cap \mathbf{T}_{hol,\chi}^m$ とおく. ここに $R(\mathfrak{a})_f$ は

$$\begin{aligned}
R(\mathfrak{a})_f &= \{nt \mid n \in N(\mathfrak{a})_f, t \in \mathcal{O}_{K,f}^1\} \\
N(\mathfrak{a})_f &= \{(w, x) \in N_{\mathbf{A},f} \mid w \in \mathfrak{a}_f, x + \frac{\kappa}{2} w w^\sigma \in N_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{a}_f)\mathcal{O}_{K,f}\}
\end{aligned}$$

で与えられる $R_{\mathbf{A},f}$ の開コンパクト部分群である. $F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f)$ に対し, $F_{\mathfrak{a}}^m \in \mathbf{T}_{hol}^m(\mathfrak{a})$ であることに注意する.

2.4 $(m, \mathfrak{a}, \chi)$ に関して原始的なテータ関数の空間 $\mathbf{T}_{hol,prim}^m(\mathfrak{a}, \chi)$ を次のように定義する:

$$\mathbf{T}_{hol,prim}^m(\mathfrak{a}, \chi) = \{\Theta \in \mathbf{T}_{hol}^m(\mathfrak{a}, \chi) \mid \mathcal{P}_{\mathfrak{b}}'\,\Theta = 0 \ (\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \neq \mathfrak{a})\}$$

ここに, $\mathcal{P}_{\mathfrak{b}}'$ は

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{b}}'\,\Theta = \int_{N(\mathfrak{b})_f} \rho'(n)\Theta\,d_{\mathfrak{b}}n \qquad (\Theta \in \mathbf{T}_{hol}^m(\mathfrak{a}))$$

により与えられる $\mathbf{T}^m_{hol}(\mathfrak{a})$ の自己準同型写像である．ただし，$d_{\mathfrak{b}}n$ は $N(\mathfrak{b})_f$ の Haar 測度で，$\mathrm{vol}(N(\mathfrak{b})_f)=1$ により正規化されたものである．$\mathbf{T}^m_{hol,prim}(\mathfrak{a},\chi)$ は高々1次元であることが知られている．このことは，$K=\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ のときに Shintani ([Shin]) によって，一般の CM field の場合には Glauberman-Rogawski ([GlRo]) よって証明された ([MS2], Theorem 3.4 も参照).

2.5 原始的テータ関数の存在条件を述べるために，記号等を準備する．$\chi\in\mathcal{X}_0$ とする．任意の有限素点 p に対し，$\mu_p(\mathfrak{a},m):=\mathrm{ord}_p\, mN_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{a})\ge 0$ を仮定する．$a(\chi_p)=\mathrm{Min}\{a\ge 0\mid \chi_p|_{(1+\mathfrak{P}_p^a)\cap\mathcal{O}_{K,p}^\times}=1\}$ とおく．ここで，

$$\mathfrak{P}_p=\begin{cases} p\mathbf{Z}_p\oplus p\mathbf{Z}_p & \cdots\quad K_p=\mathbf{Q}_p\oplus\mathbf{Q}_p\\ \mathcal{O}_{K,p}\text{の極大イデアル} & \cdots\quad K_p\ \text{は体}. \end{cases}$$

$\epsilon(s,\chi_p,\psi_{m,K_p})$ を Tate の epsilon factor ([Ta]) とする．ここに，$\psi_{m,K_p}=\psi_m\circ\mathrm{Tr}_{K_p/\mathbf{Q}_p}\in K_p^\wedge$．簡単のため，$\epsilon\left(\chi_p,\psi_{m,K_p}\right)=\epsilon\left(\frac{1}{2},\chi_p,\psi_{m,K_p}\right)$ とおく．このとき，$\epsilon(\chi_p,\psi_{m,K_p})=\pm\chi_p(\kappa^{-1})$ が成り立つ．

$\mathcal{X}_{0,prim}(\mathfrak{a},m)$ を，次の条件を満たす $\chi\in\mathcal{X}_0$ のなす集合とする：任意の有限素点 p に対し，

$$a(\chi_p)=\begin{cases} \mu_p(\mathfrak{a},m) & \cdots\quad \delta_p=0\\ 2(\mu_p(\mathfrak{a},m)+\delta_p) & \cdots\quad \delta_p>0\ \text{および}\ \mu_p(\mathfrak{a},m)>0\\ 2\delta_p\ \text{or}\ 2\delta_p-1 & \cdots\quad \delta_p>0\ \text{および}\ \mu_p(\mathfrak{a},m)=0. \end{cases}$$

ここに，$\delta_p=\mathrm{ord}_p D$．最後に，

$$\mathcal{X}^+_{0,prim}(\mathfrak{a},m)=\{\chi\in\mathcal{X}_{0,prim}(\mathfrak{a},m)\mid \text{任意の有限素点}p\text{に対し},\ \epsilon(\chi_p,\psi_{m,K_p})=\chi_p(\kappa^{-1})\}$$

とおく．

2.6 Theorem (cf. [MS2]) $m>0$ および $mN_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{a})$ は整と仮定する．このとき，$\chi\in\mathcal{X}_0$ に対し，次が成り立つ：

$$\dim\mathbf{T}^m_{hol,prim}(\mathfrak{a},\chi)=1\iff\chi\in\mathcal{X}^+_{0,prim}(\mathfrak{a},m).$$

2.7 Proposition (cf. [Shin], [MS2]) 直和分解

$$\mathbf{T}^m_{hol}(\mathfrak{a})=\sum_{\mathfrak{b}}\sum_{\chi\in\mathcal{X}^+_{0,prim}(\mathfrak{b},m)}\mathbf{T}^m_{hol,prim}(\mathfrak{b},\chi),$$

が成り立つ．ここで，$\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ かつ $mN_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{b})$ が整であるような K のイデアルを渡る．

2.8 $\Theta \in \mathbf{T}^m_{hol,prim}(\mathfrak{a},\chi)$ の周期を

$$I(\Theta) = \int_{K^1\backslash K^1_{\mathbf{A}}} \Theta(t)\, d^\times t$$

により定義する．ここに，$d^\times t$ は $\mathrm{vol}(K^1\backslash K^1_{\mathbf{A}}) = h(K^1) := \#(K^1\backslash K^1_{\mathbf{A}}/K^1_\infty \prod_{p<\infty} \mathcal{O}^1_{K,p})$ により正規化されているものとする．

2.9 Theorem ([Yang]) $\Theta \in \mathbf{T}^m_{hol,prim}(\mathfrak{a},\chi) - \{0\}$ に対し

$$I(\Theta) \neq 0 \iff L\left(\chi; \frac{1}{2}\right) \neq 0 \,.$$

2.10 $F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f), \chi \in \mathcal{X}^+_{0,prim}(\mathfrak{a}, m), \Theta \in \mathbf{T}^m_{hol,prim}(\mathfrak{a},\chi), \Theta \neq 0$ とする．内積

$$(F^m_{\mathfrak{a}}, \Theta) = \int_{R_{\mathbf{Q}}\backslash R_{\mathbf{A}}} F^m_{\mathfrak{a}}(r)\overline{\Theta(r)}\, dr$$

を $(m, \mathfrak{a}, \chi)$ に関する F の原始成分と呼ぶ．ここに，dr は $\mathrm{vol}(R_{\mathbf{Q}}\backslash R_{\mathbf{A}}) = h(K^1)$ により正規化されているとする．[Shin] によって次が知られている．

2.11 Theorem $F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f; \Omega)$ を Hecke eigenform とする．このとき，F が消えないための必要十分条件は，少なくともひとつの $(m, \mathfrak{a}, \chi)$ に対して，$(m, \mathfrak{a}, \chi)$ に関する F の原始成分が消えないことである．

§3. $U(1,1)$ 上の保型形式

3.1 $H = U(T)$ を，歪エルミート行列 $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ に関するユニタリ群とする．有限素点 p に対し，$\mathcal{U}_p = H_p \cap GL_2(\mathcal{O}_{K,p})$ および

$$\mathcal{U}_0(D)_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_p \mid c \in D \cdot \mathcal{O}_{K,p} \right\}$$

とおく．以下，$\chi_0 \in \mathcal{X}_0$ を固定する．$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_0(D)_p$ に対し，

$$\widetilde{\chi}_{0,p}(u) = \begin{cases} \chi_0(a) & \cdots \quad c \in p\mathcal{O}_{K,p} \\ \chi_0(c) & \cdots \quad c \in \mathcal{O}_{K,p} - p\mathcal{O}_{K,p} \end{cases}$$

とおく．このとき，$\tilde{\chi}_{0,p}$ は $\mathcal{U}_0(D)_p$ のユニタリ指標を定めることが知られている．$\tilde{\chi}_0 = \prod_{p<\infty} \tilde{\chi}_{0,p}$ は $\mathcal{U}_0(D)_f = \prod_{p<\infty} \mathcal{U}_0(D)_p$ のユニタリ指標である．$H_\infty = H(\mathbf{R})$ の $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ への作用と正則保型因子 $j\colon H_\infty \times \mathfrak{H} \to \mathbf{C}^\times$ を通常のように定義し，$\mathcal{U}_\infty$ を $z_0 = \sqrt{-1} \in \mathfrak{H}$ の H_∞ における固定化部分群とする．

3.2 $S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0)$ を $H_\mathbf{Q}\backslash H_\mathbf{A}$ 上の smooth な関数 f で次の条件を満たすものたちのなす空間とする：

(i) $f(hu_f u_\infty) = (\det u_\infty)^{l-1} j(u_\infty, z_0)^{-(l-1)} \tilde{\chi}_0(u_f) f(h)$

$(h \in H_\mathbf{A}, u_f \in \mathcal{U}_0(D)_f, u_\infty \in \mathcal{U}_\infty)$.

(ii) 任意の $h_f \in H_f$ に対し，$(\det h_\infty)^{-(l-1)} j(h_\infty, z_0)^{l-1} f(h_f h_\infty)$ は $h_\infty\langle z_0\rangle \in \mathfrak{H}$ に関して正則である．

(iii) $$\int_{\mathbf{Q}\backslash\mathbf{Q}_\mathbf{A}} f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h\right) dx = 0 \qquad (h \in H_\mathbf{A}).$$

また，$S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0) = \bigoplus_{\Omega\in\mathcal{Y}_l} S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0\Omega^{-1})$ が成り立つ．ここに、各成分は $S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0)$ の元で中心指標 $\chi_0\Omega^{-1}$ をもつもののなす空間である．

3.3 $(H_p, \mathcal{U}_0(D)_p)$ の指標付き Hecke 環を $\mathcal{H}^{\chi_0} = \{\varphi \in C_c^\infty(H_p) \mid \varphi(uhu') = \tilde{\chi}_{0,p}(uu')\varphi(h)\ (u, u' \in \mathcal{U}_0(D)_p, h \in H_p)\}$ とする．Hecke 環 $\mathcal{H}^{\chi_0}$ における積を

$$\varphi_1 * \varphi_2(h) = \int_{H_p} \varphi_1(hx^{-1})\varphi_2(x)\, dx \qquad (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_p^{\chi_0})$$

により定める．ここに，dx を $\mathrm{vol}(\mathcal{U}_0(D)_p) = 1$ となるように正規化しておく．$\mathcal{H}_p^{\chi_0}$ は $\mathbf{C}$-algebra をなし，$S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0\Omega^{-1})$ に次のように作用する：

$$f * \varphi(h) = \int_{H_p} f(hx^{-1})\varphi(x)\, dx \qquad (f \in S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0\Omega^{-1}), \varphi \in \mathcal{H}_p^{\chi_0}).$$

3.4 $p|D$ となる有限素点に対し，Π_p を K_p の素元とする．$\varphi_p^\pm \in \mathcal{H}_p^{\chi_0}$ を $\mathrm{Supp}(\varphi_p^\pm) \subset \mathcal{U}_0(D)_p \mathbf{d}_H(\Pi_p^{\pm 1})\mathcal{U}_0(D)_p$ および $\varphi_p^\pm(\mathbf{d}_H(\Pi_p^{\pm 1})) = \chi_0^{-1}(\Pi_p^{\pm 1})$ により定義する．$\varphi_p^\pm$ は Π_p の選び方に依存しないこと，また φ_p^+ と φ_p^- は可換であることに注意する．

$$\mathcal{H}_p' = \begin{cases} \mathcal{H}^{\chi_0}(H_p, \mathcal{U}_0(D)_p) & \cdots\ p \nmid D \\ \mathbf{C}[\varphi_p^+, \varphi_p^-] & \cdots\ p|D \end{cases}$$

とおくと, $\mathcal{H}'_p$ は $\mathcal{H}^{\chi_0}(H_p, \mathcal{U}_0(D)_p)$ の可換な部分環をなす.

3.5 $S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0\Omega^{-1})$ の元 f が *Hecke eigenform* であるとは, 任意の有限素点 p に対し, $\mathcal{H}'_p$ から $\mathbf{C}$ への $\mathbf{C}$-algebra homomorphism λ_p で, 任意の $\varphi \in \mathcal{H}'_p$ に対し $f * \varphi = \lambda_p(\varphi) f$ となるものが存在することである.

§4. Kudla lift

4.1 v を $\mathbf{Q}$ の素点とする. $G_v \times H_v$ の $\mathcal{S}(K_v^3)$ 上の metaplectic 表現 $\mathbf{M}_v^{\chi_0}$ を次のように定める:

$$\mathbf{M}_v^{\chi_0}\left(g, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^\sigma & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right)\Psi(X) = \chi_0(a)\,|N(a)|_v^{3/2}\,\psi_v(b\cdot X^*SX)\,\Psi(ag^{-1}X)$$

$$\mathbf{M}_v^{\chi_0}\left(1_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)\Psi(X) = \lambda_{K_v}(\psi_v)\,\hat{\Psi}(X).$$

ここに, $g \in G_v, b \in \mathbf{Q}_v, a \in K_v, \Psi \in \mathcal{S}(K_v^3), X \in K_v^3$, $X^* = {}^tX^\sigma$ および

$$\hat{\Psi}(X) = \int_{K_v^3} \psi_v(\mathrm{Tr}_{K_v/\mathbf{Q}_v}(Y^*SX))\,\Psi(Y)\,dY$$

(dY は K_v^3 の $(X,Y) \mapsto \psi_v(\mathrm{Tr}_{K_v/\mathbf{Q}_v}(Y^*SX))$ に関して self-dual な Haar 測度である).

4.2 $\mathbf{M}^{\chi_0} = \otimes_v \mathbf{M}_v^{\chi_0}$ とおく. このとき, $\mathbf{M}^{\chi_0}$ は $G_\mathbf{A} \times H_\mathbf{A}$ の $\mathcal{S}(K_\mathbf{A}^3)$ 上の smooth な表現である. 各有限素点 p に対し, $\Psi_{0,p}$ を $\mathcal{O}_{K,p}^3$ の特性関数とする. また, $\Psi_{0,\infty}(X_\infty) = (\xi^*X_\infty)^l \exp(-2\pi X_\infty^* S_0 X_\infty)$ $(X_\infty \in \mathbf{C}^3)$ とおく. ここに, $S_0 = \mathrm{diag}(-2/D, 1, 1/2)$, および $\xi = {}^t(-1/\sqrt{D}, 0, 1/2)$ である. $\Psi_0(X) = \prod_v \Psi_{0,v}(X_v)$ とおく. 次のように theta kernel $T\colon G_\mathbf{Q}\backslash G_\mathbf{A} \times H_\mathbf{Q}\backslash H_\mathbf{A} \to \mathbf{C}$ を定める (cf. [Ku]):

$$T(g,h) = \sum_{X \in K^3} (\mathbf{M}^{\chi_0}(g,h)\,\Psi_0)(X) \qquad (g \in G_\mathbf{A}, h \in H_\mathbf{A}).$$

このとき, $g \in G_\mathbf{A}, k_f \in \mathcal{K}_f, k_\infty \in \mathcal{K}_\infty, h \in H_\mathbf{A}, u_f \in \mathcal{U}_0(D)_f, u_\infty \in \mathcal{U}_\infty$ に対し, $T(gk_fk_\infty, hu_fu_\infty) = J(k_\infty, Z_0)^{-l}\,\tilde{\chi}_0^{-1}(u_f)\,(\det u_\infty)^{-(l-1)}\,j(u_\infty, z_0)^{l-1}\,T(g,h)$ が成り立つ.

4.3 $\Omega \in \mathcal{Y}_l$ とする. $f \in S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0\Omega^{-1})$ に対し,

$$\mathcal{L}(f)(g) = \int_{H_\mathbf{Q}\backslash H_\mathbf{A}} f(h)\,T(g,h)\,dh \qquad (g \in G_\mathbf{A})$$

とおく．$\mathcal{L}(f)$ を f の Kudla lift という．

4.4 Theorem ([Ku])

(i) $\mathcal{L}(f) \in \mathcal{S}_l(\mathcal{K}_f;\Omega)$.

(ii) f が Hecke eigenform ならば，$\mathcal{L}(f)$ も Hecke eigenform である．

§5. 主結果

5.1 $\mathcal{O}_K$ の元 θ で次の条件を満たすものを一つ取り固定する：

(i) $\mathcal{O}_K = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\cdot\theta$

(ii) $\mathrm{Im}(\theta) > 0$

(iii) D を割る各素数 p に対し，$\mathrm{ord}_p N(\theta) = 1$ となる．

この節を通じて，K のイデアル $\mathfrak{a}$，および $m \in \mathbf{Q}, m > 0$ で $mN(\mathfrak{a})$ が整であるものを固定する．簡単のため，$\mu_p(\mathfrak{a}, m)$ を μ_p と書く．うめこみ $\iota_m : K^1 \to H_{\mathbf{Q}}$ を

$$\iota_m(z^\sigma/z) = \frac{1}{z}\begin{pmatrix} x & m\theta\theta^\sigma y \\ -y/m & x+\beta y \end{pmatrix} \qquad (z = x+\theta y \in K^\times)$$

により定める．

5.2 $\chi \in \mathcal{X}^+_{0,prim}(\mathfrak{a}, m)$ および $f \in S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0\Omega^{-1})$ に対し，$(U(1,1), U(1))$ 上の球関数 $W^m_{\chi,f}$ を

$$W^m_{\chi,f}(h) = \int_{K^1\backslash K^1_{\mathbf{A}}} (\chi/\chi_0)^1(t^{-1})\, f(\iota_m(t)h)\, d^\times t \qquad (h \in H_{\mathbf{A}})$$

により定める．ただし，$(\chi/\chi_0)^1$ は $(\chi/\chi_0)^1(z^\sigma/z) = (\chi/\chi_0)(z)$ $(z \in K^\times_{\mathbf{A}})$ により定まる $K^1_{\mathbf{A}}/K^1$ のユニタリ指標である．局所球関数の一意性（[MS3]）より，f が Hecke eigenform ならば $W^m_{\chi,f}$ は局所成分の積に分解する．

5.3 $A(\chi)$ を，$\delta_p = \mathrm{ord}_p D > 0$ かつ $a(\chi_p) = 2\delta_p - 1$ となる有限素点 p の集合とする．H_∞ の元 $h_{\infty,m\theta}$ で $h_{\infty,m\theta}\langle z_0\rangle = m\theta$ となるものをとる．

$$P^m_{\mathfrak{a}}(\chi, f) = \chi_0^{-1}(\alpha_f)|N(\alpha_f)|^{3/2}_{\mathbf{A}} \cdot W^m_{\chi,f}\left(\begin{pmatrix} (\alpha_f^\sigma)^{-1} & \\ & \alpha_f \end{pmatrix} h_{\infty,m\theta}\right)$$

を f の $(m, \mathfrak{a}, \chi)$ に関する周期と呼ぶ．主結果を述べよう．

5.4 Theorem $(m, \mathfrak{a}, \chi)$ を上の通りとする．また，$f \in S_{l-1}(\mathcal{U}'_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0\Omega^{-1})$，$\Theta \in \mathbf{T}^m_{hol,prim}(\mathfrak{a}, \chi)$ とする．各 $p \in A(\chi)$ に対し，$f * \varphi_p^{\pm} = \nu_p^{\pm} f$ となると仮定する．このとき，

$$(\mathcal{L}(f)^m_{\mathfrak{a}}, \Theta) = c_\infty \prod_{p<\infty} c_p \prod_{p \in A(\chi)} c'_p \times \overline{I(\Theta)}\, P^m_{\mathfrak{a}}(\chi, f)$$

が成り立つ．ここに，

$$\begin{aligned} c_\infty &= (-1)^{l/2}\, 2^{l-2} \left|\frac{m\kappa}{2}\right|^{(l-3)/2} \mathbf{e}\left[\frac{m\kappa}{2}\right] \\ c_p &= p^{\mu_p - \delta_p/2} \times \begin{cases} 1 & \cdots \quad \delta_p = 0, \mu_p = 0 \\ 1 - \left(\dfrac{D}{p}\right) p^{-1} & \cdots \quad \delta_p = 0, \mu_p > 0 \\ \dfrac{2p}{1+p} & \cdots \quad \delta_p > 0 \end{cases} \\ c'_p &= 1 + p^{-1/2} \nu_p^- \qquad (p \in A(\chi)). \end{aligned}$$

Theorem 5.4, Theorem 2.9 および Theorem 2.11 より次の Kudla lift に関する non-vanishing criterion を得る．

5.5 Corollary $f \in S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0\Omega^{-1})$ を Hecke eigenform とする．このとき，$\mathcal{L}(f) \neq 0$ となるための必要十分条件は，ある $(m, \mathfrak{a}, \chi)$ に対し，

$$L\left(\chi; \frac{1}{2}\right) P^m_{\mathfrak{a}}(\chi, f) \neq 0$$

となることである．

References

[GR] *G. I. Glauberman and J. D. Rogawski*, On theta functions with complex multiplication, J. reine angew. Math. **395** (1989), 68–101.

[Ku] *S. Kudla*, On certain Euler products for $SU(2,1)$, Compositio Math. **42** (1981), 321–344.

[MS1] *A. Murase and T. Sugano*, Local theory of primitive theta functions, Compositio Math. **123** (2000), 273–302.

[MS2] *A. Murase and T. Sugano*, Fourier-Jacobi expansion of Eisenstein series on unitary groups of degree three, to appear in J. Math. Sci. Univ. Tokyo.

[MS3] *A. Murase and T. Sugano*, Spherical functions on $(U(1,1), U(1))$, in preparation.

[Shin] *T. Shintani*, On automorphic forms on unitary groups of order 3, unpublished manuscript (1979).

[Ta] *J. Tate*, Number theoretic background, Proc. Symp. in Pure Math. **33**, part 2 (1979), 3–26.

[Yang] *T. Yang*, Theta liftings and Hecke L-functions, J. reine angew. Math. **485** (1997), 25–53.

Atsushi Murase
Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto Sangyo University, Motoyama, Kamigamo, Kita-ku, Kyoto 603-8555, Japan, e-mail: murase@cc.kyoto-su.ac.jp

Takashi Sugano
Department of Mathematics, Faculty of Science, Kanazawa University, Kakuma-machi, Kanazawa 920-1192, Japan, e-mail: sugano@kappa.s.kanazawa-u.ac.jp