数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 25-32

Unitary 群上の nearly holomorphic な保型形式への Galois action

京都大学理学研究科数学教室　山内淳生

0 Introduction

上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の SL(2, $\mathbb{Q}$) についての正則保型形式（elliptic modular form）f は、Fourier 展開を持つ。つまり、

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\exp(2\pi\sqrt{-1}mz/N)\qquad(N\in\mathbb{N}).$$

このとき、任意の $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ について f^{σ} という

$$f^{\sigma}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m^{\sigma}\exp(2\pi\sqrt{-1}mz/N)\qquad(N\in\mathbb{N})$$

なる Fourier 展開を持つ正則保型形式が存在することはよく知られている。なお、$\mathfrak{H}$ 上の nearly holomorphic な保型形式（重さ 2 の Eisenstein 級数 E_2 が有名）は、一般に

$$f(z)=\sum_{j=0}^{p}\left\{(\pi\mathrm{Im}(z))^{-j}\sum_{m=0}^{\infty}c_{(f,j,m)}\exp(2\pi\sqrt{-1}mz/N)\right\}$$

という展開を持ち、やはり任意の $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ について

$$f^{\sigma}(z)=\sum_{j=0}^{p}\left\{(\pi\mathrm{Im}(z))^{-j}\sum_{m=0}^{\infty}c^{\sigma}_{(f,j,m)}\exp(2\pi\sqrt{-1}mz/N)\right\}$$

なる nearly holomorphic な保型形式が存在している。

このような Galois action を 3 次 unitary 群上の nearly holomorphic な保型形式の Fourier-Jacobi 展開について構成する。

1 正則な保型形式への Galois action

まず、unitary 群上の（Fourier-Jacobi 展開を持つ場合の）正則保型形式への Galois action について述べることにする。この節の内容は、[7] の要約である。

次のように記号を定義する。

F : 有限次総実代数体
K : F の CM（総虚２次）拡大体
ρ : $\mathrm{Gal}(K/F)$ の生成元（複素共役）
$\mathbf{a}$: F の（K の）無限素点全体のなす集合
$X^{\mathbf{a}} := \{x = (x_v)_{v\in\mathbf{a}} \,|\, x_v \in X\}$
$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}) \curvearrowright X^{\mathbf{a}}$ by $x^{\sigma} = y = (y_v)_{v\in\mathbf{a}}$ where $y_{v\sigma} = x_v$.
$\mathbf{Z}^{\mathbf{a}}$: 自由加群 $\sum_{v\in\mathbf{a}} \mathbf{Z}\cdot v$ と同一視。　$\mathbf{1} := \sum_{v\in\mathbf{a}} v$.
$\mathbf{e}_{\mathbf{a}}(x) := \exp(2\pi\sqrt{-1}\sum_{v\in\mathbf{a}} x_v)$ for $x = (x_v)_{v\in\mathbf{a}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{a}}$.

このとき K 上の m 次非退化 skew-hermitian R を（$m = 2q + n$）

$$R = \begin{pmatrix} & & 1_q \\ & S & \\ -1_q & & \end{pmatrix} \qquad \text{但し} \quad S = \begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{pmatrix},$$

$s_j^{\rho} = -s_j \ (1 \le j \le n)$,　$\sqrt{-1}S$ は、K の全ての無限素点で definite

となるようにとる。（K 上の m 次 skew-hermitian R で、$\sqrt{-1}R$ の signature が全ての無限素点で $(q, n+q)$ か $(n+q, q)$ になっているものは、基底を適当にとれば、この形になる。）この R についての unitary similitudes 群 $G^{(q,n)}(S,\Psi)$ を、

$$G^{(q,n)}(S,\Psi)(\mathbf{Q}) = \left\{\gamma \in \mathrm{GL}(m,K) \,\middle|\, {}^t\gamma^{\rho} R \gamma = \nu(\gamma) R \quad \text{with} \quad \nu(\gamma) \in F^{\times}\right\}$$

ととる。なお、$\Psi = (\Psi_v)_{v\in\mathbf{a}}$ は K の CM-type で、各 $v \in \mathbf{a}$ で $-\sqrt{-1}S^{\Psi_v}$ が positive definite となるもの。（以後、$b \in K$ について b^{Ψ} で $(b^{\Psi_v})_{v\in\mathbf{a}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{a}}$ を表すものとする。つまり、CM-type を K の $\mathbf{C}^{\mathbf{a}}$ への dense な埋め込みとみる。）また、special unitary 群 $G_1^{(q,n)}(S,\Psi)$ を、

$$G_1^{(q,n)}(S,\Psi)(\mathbf{Q}) = \left\{\gamma \in G^{(q,n)}(S,\Psi)(\mathbf{Q}) \,\middle|\, \nu(\gamma) = \det(\gamma) = 1\right\}$$

とする。これらの作用する対称領域 $\mathfrak{D}^{(q,n)}(S,\Psi)$ を

$$\mathfrak{D}^{(q,n)}(S,\Psi) = \prod_{v\in\mathbf{a}} \left\{ \mathfrak{z}_v = \begin{pmatrix} z_v \\ w_v \end{pmatrix} \in \mathbf{C}_q^{q+n} \,\middle|\, \begin{array}{l} z_v \in \mathbf{C}_q^q,\ w_v \in \mathbf{C}_q^n, \\ \sqrt{-1}({}^t\overline{w_v} S^{\Psi_v} w_v + {}^t\overline{z_v} - z_v) > 0 \end{array} \right\}$$

ととる。（以後、環 A について、A 係数の a 行 b 列の行列全体のなす集合を A_b^a と書く。）この対称領域への $G^{(q,n)}(S,\Psi)(\mathbf{Q})$ の作用を以下のよ

うに定義する。任意の $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_v)_{v\in\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} z_v \\ w_v \end{pmatrix}_{v\in\mathbf{a}} \in \mathfrak{D}^{(q,n)}(S,\Psi)$ と $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in G^{(q,n)}(S,\Psi)(\mathbb{Q})$ (block の分け方は、順に、q 行、n 行、q 行、q 列、n 列、q 列)に対して、

$$\alpha(\mathfrak{z}) = \begin{pmatrix} (a_1^{\Psi_v} z_v + b_1^{\Psi_v} w_v + c_1^{\Psi_v})(a_3^{\Psi_v} z_v + b_3^{\Psi_v} w_v + c_3^{\Psi_v})^{-1} \\ (a_2^{\Psi_v} z_v + b_2^{\Psi_v} w_v + c_2^{\Psi_v})(a_3^{\Psi_v} z_v + b_3^{\Psi_v} w_v + c_3^{\Psi_v})^{-1} \end{pmatrix}_{v\in\mathbf{a}},$$

また、各 $v \in \mathbf{a}$ ごとに保型因子を

$$\begin{aligned} \lambda_v(\alpha,\mathfrak{z}) = & \begin{pmatrix} \overline{a_3^{\Psi_v}}{}^t z_v + \overline{c_3^{\Psi_v}} & \overline{a_3^{\Psi_v}}{}^t w_v - \overline{b_3^{\Psi_v}}(S^{\Psi_v})^{-1} \\ -S^{\Psi_v}\overline{a_2^{\Psi_v}}{}^t z_v - S^{\Psi_v}\overline{c_2^{\Psi_v}} & -S^{\Psi_v}\overline{a_2^{\Psi_v}}{}^t w_v + S^{\Psi_v}\overline{b_2^{\Psi_v}}(S^{\Psi_v})^{-1} \end{pmatrix}, \\ \mu_v(\alpha,\mathfrak{z}) = & \ a_3^{\Psi_v} z_v + b_3^{\Psi_v} w_v + c_3^{\Psi_v}, \end{aligned}$$

と定める。このとき、当然 $(\alpha\beta)(\mathfrak{z}) = \alpha(\beta(\mathfrak{z}))$ と $\lambda_v(\alpha\beta,\mathfrak{z}) = \lambda_v(\alpha,\beta(\mathfrak{z}))\lambda_v(\beta,\mathfrak{z})$, $\mu_v(\alpha\beta,\mathfrak{z}) = \mu_v(\alpha,\beta(\mathfrak{z}))\mu_v(\beta,\mathfrak{z})$ が成り立つ。

任意の $k = (k_v)_{v\in\mathbf{a}} \in \mathbb{Z}^{\mathbf{a}}$ と $\alpha \in G^{(q,n)}(S,\Psi)(\mathbb{Q})$ と $\mathfrak{D}^{(q,n)}(S,\Psi)$ 上の関数 f について、

$$(f|_k\alpha)(\mathfrak{z}) = f(\alpha(\mathfrak{z}))\prod_{v\in\mathbf{a}}\det(\mu_v(\alpha,\mathfrak{z}))^{-k_v}$$

と定義する。このとき、合同部分群 Γ についての重さ k の正則保型形式の空間を $\mathcal{M}_k^{(q,n)}(S,\Psi)(\Gamma)$ 、全ての合同部分群についてのその union を $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_k^{(q,n)}(S,\Psi)$ とおく。この場合、$f \in \mathcal{M}_k^{(q,n)}(S,\Psi)$ は、次のような Fourier-Jacobi 展開を持つ。

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{z}) &= \sum_r g_{(f,r)}(w)\mathbf{e}_{\mathbf{a}}(\mathrm{tr}(r^{\Psi}z)) \\ &= \sum_r g_{(f,r)}(w)\exp(2\pi\sqrt{-1}\sum_{v\in\mathbf{a}}\mathrm{tr}(r^{\Psi_v}z_v)) \\ & \left(\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_v \\ w_v \end{pmatrix}_{v\in\mathbf{a}} \in \mathfrak{D}^{(q,n)}(S,\Psi)\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

なお、ここで r は

$$\mathcal{H}_q = \left\{x \in K_q^q \,\middle|\, {}^t x^{\rho} = x\right\}$$

の中のある $\mathbb{Z}$-lattice を動く。(但し、以下の theta 函数の議論より、$g_{(f,r)} \neq 0$ となるのは r が各 $v \in \mathbf{a}$ で semi-positive definite になっているときのみ

である。）ここで、各「係数」 $g_{(f,r)}$ は $(\mathbb{C}_q^n)^{\mathbf{a}}$ 上の以下の hermitian form $H_{r,S,\Psi}$ と lattice L^{Ψ} （L は K_q^n の $\mathbb{Z}$-lattice）についての theta 函数になっている。

$$H_{r,S,\Psi}\left((w_{1v})_{v\in\mathbf{a}},(w_{2v})_{v\in\mathbf{a}}\right)=-2\sqrt{-1}\sum_{v\in\mathbf{a}}\operatorname{tr}\left(r^{\Psi_v}{}^t\overline{w_{1v}}S^{\Psi_v}w_{2v}\right).$$

つまり、 $g_{(f,r)}$ は次の theta 函数の空間に含まれている。

$$\begin{aligned}&\mathfrak{T}((\mathbb{C}_q^n)^{\mathbf{a}},L^{\Psi},H_{r,S,\Psi})\\&=\left\{g:(\mathbb{C}_q^n)^{\mathbf{a}}\to\mathbb{C}\;\middle|\;\begin{array}{l}g\text{ is holomorphic on }(\mathbb{C}_q^n)^{\mathbf{a}}\text{and}\\ g(w+l^{\Psi})=\exp(\pi H_{r,S,\Psi}(l^{\Psi},w+2^{-1}l^{\Psi}))g(w)\\ \text{for any }l\in L\text{ and }w\in(\mathbb{C}_q^n)^{\mathbf{a}}\end{array}\right\}.\end{aligned}$$

この $g\in\mathfrak{T}((\mathbb{C}_q^n)^{\mathbf{a}},L^{\Psi},H_{r,S,\Psi})$ に対して、 g_* という（正則でない）関数を、$g_*(w)=\exp(-\frac{\pi}{2}H_{r,S,\Psi}(w,w))g(w)$ と定める。このとき、theta 函数の条件式を変形して、

$$g_*(y^{\Psi}+l^{\Psi})=\exp\left(-\pi\sqrt{-1}\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}}({}^tl^{\rho}Ty)\right)\cdot g_*(y^{\Psi})$$

$(y\in K_q^n,\ l\in L)$ を得る。この式は、「 K_q^n の任意の $\mathbb{Z}$-lattice L_1 について、その sublattice L_2 が存在し、$g_*|_{L_1^{\Psi}}$ は L_2^{Ψ}-周期である」ということを意味している。(g_* が周期関数ということではない。）従って、近似により $g_*(y^{\Psi})$ を $y\in(K_A)_q^n$ に対して定義することができる（K_A は K の adele)。

K の CM-type Ψ と任意の $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ について、[7]（本質的には [3],[1]）で K の idele class $g_{\Psi}(\sigma)\in K_A^{\times}/K^{\times}K_{\infty}^{\times}$ 及び

$$C_{\Psi}(\mathbb{C})=\{(\sigma,\Psi,a)\,|\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}),\quad a\in g_{\Psi}(\sigma)\}$$

を定めた。この $(\sigma,\Psi,a)\in C_{\Psi}(\mathbb{C})$ は、$aa^{\rho}\in\chi(\sigma)F^{\times}F_{\infty}^{\times}$ （ $\chi(\sigma)\in\prod_p\mathbb{Z}_p^{\times}\subset\mathbb{Q}_A^{\times}$ で、$[\chi(\sigma)^{-1},\mathbb{Q}]=\sigma|_{\mathbb{Q}_{ab}}$ となるもの）を満たす。ここで、$\iota(\sigma,a)\in F^{\times}$ を $\chi(\sigma)/aa^{\rho}\in\iota(\sigma,a)F_{\infty}^{\times}$ となるようにとる。なお、$\Psi\sigma=\Psi$ つまり σ の Ψ の reflex 体 K_{Ψ}^* への作用が自明のときには、$[b^{-1},K_{\Psi}^*]=\sigma|_{K_{\Psi ab}^*}$ なる $b\in(K_{\Psi}^*)_A^{\times}$ と reflex norm N_{Ψ}' を用いて、

$$g_{\Psi}(\sigma)=N_{\Psi}'(b)K^{\times}K_{\infty}^{\times}$$

と書ける。この $C_{\Psi}(\mathbb{C})$ を使い、theta 函数への Galois action を定義することができる。(次の二つの定理は [7] 参照。)

定理 $g \in \mathfrak{T}((\mathbb{C}_q^n)^{\mathbf{a}}, L^{\Psi}, H_{r,S,\Psi})$ と $(\sigma, \Psi, a) \in C_{\Psi}(\mathbb{C})$ について、$g^{(\sigma,\Psi,a)} \in \mathfrak{T}((\mathbb{C}_q^n)^{\mathbf{a}}, (aL)^{\Psi\sigma}, H_{r,\iota(\sigma,a)S,\Psi\sigma})$ が存在し、

$$(g^{(\sigma,\Psi,a)})_*((ay)^{\Psi\sigma}) = \left\{g_*(y^{\Psi})\right\}^{\sigma} \quad \text{for any } y \in K_q^n$$

を満たす。

定理 ([7] の主定理) $f \in \mathcal{M}_k^{(q,n)}(S, \Psi)$ の Fourier-Jacobi 展開を (1.1) とおく。このとき、任意の $(\sigma, \Psi, a) \in C_{\Psi}(\mathbb{C})$ について、$f^{(\sigma,\Psi,a)} \in \mathcal{M}_{k\sigma}^{(q,n)}(\iota(\sigma, a)S$ $, \Psi\sigma)$ という、以下の Fourier-Jacobi 展開を持つ正則保型形式が存在する。

$$f^{(\sigma,\Psi,a)}(\tilde{\mathfrak{z}}) = \sum_r g_{(f,r)}^{(\sigma,\Psi,a)}(\tilde{w})\mathbf{e}_{\mathbf{a}}(\mathrm{tr}(r^{\Psi\sigma}\tilde{z}))$$
$$\left(\tilde{\mathfrak{z}} = \begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z_v} \\ \tilde{w_v} \end{pmatrix}_{v\in\mathbf{a}} \in \mathfrak{D}^{(q,n)}(\iota(\sigma, a)S, \Psi\sigma)\right).$$

2 Nearly holomorphic な保型形式への Galois action

この節では、本題である $U(2,1)$ つまり $q = n = 1$ の場合の 3 次 unitary 群について、その上の nearly holomorphic な保型形式へ Galois action を構成する。つまり、[8] の要約である。

各 $v \in \mathbf{a}$ について、

$$\begin{aligned}
\eta_v(\mathfrak{z}) = \quad & \eta_v^{(1,1)}(s, \Psi)(\mathfrak{z}) &= \sqrt{-1}(s^{\Psi_v} w_v\overline{w_v} + \overline{z_v} - z_v) \\
\xi_v(\mathfrak{z}) = \quad & \xi_v^{(1,1)}(s, \Psi)(\mathfrak{z}) &= \sqrt{-1}\begin{pmatrix} \overline{z_v} - z_v & \overline{w_v} \\ -w_v & (s^{\Psi_v})^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

とする。このとき、$\alpha \in G^{(1,1)}(s, \Psi)(\mathbb{Q})$ について

$$\begin{aligned}
\nu(\alpha)_v\xi_v(\mathfrak{z}) = \quad & {}^t\lambda_v(\alpha, \mathfrak{z})\xi_v(\alpha(\mathfrak{z}))\overline{\lambda_v(\alpha, \mathfrak{z})}, \\
\nu(\alpha)_v\eta_v(\mathfrak{z}) = \quad & \mu_v(\alpha, \mathfrak{z})\eta_v(\alpha(\mathfrak{z}))\overline{\mu_v(\alpha, \mathfrak{z})},
\end{aligned}$$

が成り立つ。

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V と V に値を持つ $\mathfrak{D}^{(1,1)}(s, \Psi)$ 上の関数 f に対して、$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}_1^2, V)$-値関数 $D_v f$ と $\overline{D_v} f$ $(v \in \mathbf{a})$ を

$$\begin{aligned}
(D_v f)(u) &= \left(\frac{\partial f}{\partial z_v}, \frac{\partial f}{\partial w_v}\right) \cdot u, \\
(\overline{D_v} f)(u) &= \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z_v}}, \frac{\partial f}{\partial \overline{w_v}}\right) \cdot u \qquad (u \in \mathbb{C}_1^2),
\end{aligned}$$

と定義する。さらに、

$$(E_v f)(u) = (\overline{D_v} f)(\overline{\xi_v} u \eta_v)$$

とおく。さて、各 $v \in \mathbf{a}$ について２つの C^∞-関数を、

$$\begin{aligned} r_{1,v}(\mathfrak{z}) &= r_{1,v}^{(1,1)}(s,\Psi)(\mathfrak{z}) = \sqrt{-1}\ \eta_v^{(1,1)}(s,\Psi)(\mathfrak{z})^{-1}, \\ r_{2,v}(\mathfrak{z}) &= r_{2,v}^{(1,1)}(s,\Psi)(\mathfrak{z}) = -\sqrt{-1}\ s^{\Psi_v}\overline{w_v}\eta_v^{(1,1)}(s,\Psi)(\mathfrak{z})^{-1}, \end{aligned}$$

と定める。

合同部分群 Γ と $p = (p_v)_{v\in\mathbf{a}} \in (\mathbf{N}\cup\{0\})^{\mathbf{a}}$ と $k = (k_v)_{v\in\mathbf{a}} \in \mathbf{Z}^{\mathbf{a}}$ について、重さ k の nearly holomorphic な保型形式の空間を、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_k^p(\Gamma) &= \mathcal{N}_k^{p,(1,1)}(s,\Psi)(\Gamma) \\ &= \left\{ f \in C^\infty(\mathfrak{D}^{(1,1)}(s,\Psi)) \;\middle|\; \begin{array}{l} f|_k\gamma = f \quad \text{for any } \gamma \in \Gamma, \\ (E_v^{p_v+1})f = 0 \text{ for each } v \in \mathbf{a} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

と定義する。正則な場合と同様に、全ての合同部分群 Γ についての $\mathcal{N}_k^p(\Gamma)$ の union を $\mathcal{N}_k^p = \mathcal{N}_k^{p,(1,1)}(s,\Psi)$ とおく。このとき、$f \in \mathcal{N}_k^{p,(1,1)}(s,\Psi)$ は

$$f(\mathfrak{z}) = \sum_{\substack{j_1,j_2 \in (\mathbf{N}\cup\{0\})^{\mathbf{a}} \\ j_1+j_2 \le p}} c_{(f;j_1,j_2)}(\mathfrak{z}) \left(\prod_{v\in\mathbf{a}} r_{1,v}(\mathfrak{z})^{j_{1,v}}\right)\left(\prod_{v\in\mathbf{a}} r_{2,v}(\mathfrak{z})^{j_{2,v}}\right)$$

と、正則関数 $c_{(f;j_1,j_2)}$ を用いて表される。つまり、f は、正則関数係数の $\cup_{v\in\mathbf{a}}\{r_{1,v}, r_{2,v}\}$ の多項式になっている。さて、$r_{2,v}(\mathfrak{z}) = -s^{\Psi_v}\overline{w_v}r_{1,v}(\mathfrak{z})$ であることを使うと、f は、

(2.1)

$$f(\mathfrak{z}) = \sum_{\substack{j \in (\mathbf{N}\cup\{0\})^{\mathbf{a}} \\ 0 \le j \le p}} \sum_{0 \le m \in F} g_{(f,j,m)}(w)\mathbf{e}_{\mathbf{a}}(mz) \left(\prod_{v\in\mathbf{a}} \left((\pi\sqrt{-1})^{-1} r_{1,v}^{(1,1)}(s,\Psi)(\mathfrak{z})\right)^{j_v}\right)$$

と書き直すことができる。(但し、$j \le p$ は全ての $v \in \mathbf{a}$ について $j_v \le p_v$ であることを表す。上の式の $j_1+j_2 \le p$ も同様。) ここで、Unipotent radical の作用を考えると、各 $g_{(f,j,m)}$ は、nearly holomorphic な theta 函数になることが分かる。つまり、K のある $\mathbb{Z}$-lattice L と $j = (j_v)_{v\in\mathbf{a}} \in (\mathbf{N}\cup\{0\})^{\mathbf{a}}$ について、

$$\mathfrak{T}^j(\mathbf{C}^{\mathbf{a}}, L^\Psi, H_{m,s,\Psi}) =$$

$$\left\{ g : \mathbf{C}^{\mathbf{a}} \to \mathbf{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{w_v}}\right)^{j_v+1} g = 0 \text{ for each } v \in \mathbf{a} \text{ and} \\ g(w+l^\Psi) = \exp(\pi H_{m,s,\Psi}(l^\Psi, w + 2^{-1}l^\Psi)g(w) \\ \text{for any } l \in L \text{ and } w \in \mathbf{C}^{\mathbf{a}} \end{array} \right\}$$

なる関数の空間に含まれる。言い換えると、正則関数係数の $\{\overline{w_v}\,|v\in\mathbf{a}\}$ の多項式で、theta 函数の条件式を満たすものである。こういった nearly holomorphic な theta 函数は、正則な theta 函数にある微分作用素を施したものの一次結合になっている。(Nearly holomorphic な theta 函数は、[2] や [5] などで紹介されている。)

この $g\in\mathfrak{T}^j(\mathbb{C}^{\mathbf{a}},L^{\Psi},H_{m,s,\Psi})$ について、 $g_*(y^{\Psi})$ を正則な場合と同様に $y\in K_A$ について定義でき、以下の定理が成り立つ。

定理 任意の $g\in\mathfrak{T}^p(\mathbb{C}^{\mathbf{a}},L^{\Psi},H_{m,s,\Psi})$ と $(\sigma,\Psi,a)\in C_{\Psi}(\mathbb{C})$ に対して、$g^{(\sigma,\Psi,a)}\in\mathfrak{T}^{p^{\sigma}}(\mathbb{C}^{\mathbf{a}},(aL)^{\Psi\sigma},H_{m,\iota(\sigma,a)s,\Psi\sigma})$ という以下の条件を満たす nearly holomorphic な theta 函数が存在する。

$$(g^{(\sigma,\Psi,a)})_*((ay)^{\Psi\sigma})=\left\{g_*(y^{\Psi})\right\}^{\sigma}\qquad\text{for each } y\in K.$$

定理 (2.1) の展開を持つ $f\in\mathcal{N}_k^{p,(1,1)}(s,\Psi)$ と $(\sigma,\Psi,a)\in C_{\Psi}(\mathbb{C})$ について、$f^{(\sigma,\Psi,a)}\in\mathcal{N}_{k^{\sigma}}^{p^{\sigma},(1,1)}(\iota(\sigma,a)s,\Psi\sigma)$ という以下の展開を持つ nearly holomorphic な保型形式が存在する。

$$\begin{aligned}f^{(\sigma,\Psi,a)}(\tilde{\mathfrak{z}})=\sum_{\substack{j\in(\mathbf{N}\cup\{0\})^{\mathbf{a}}\\0\le j\le p}}\ \sum_{0\le m\in F}\ & g^{(\sigma,\Psi,a)}_{(f,j,m)}(\tilde{w})\mathbf{e}_{\mathbf{a}}(m\tilde{z})\\ &\times\prod_{v\in\mathbf{a}}\left((\pi\sqrt{-1})^{-1}r^{(1,1)}_{1,v\sigma}(\iota(\sigma,a)s,\Psi\sigma)(\tilde{\mathfrak{z}})\right)^{j_v}\\ &\left(\tilde{\mathfrak{z}}=\begin{pmatrix}\tilde{z}\\ \tilde{w}\end{pmatrix}\in\mathfrak{D}^{(1,1)}(\iota(\sigma,a)s,\Psi\sigma)\right).\end{aligned}$$

全ての $v\in\mathbf{a}$ について $k_v\ge 5$ のときには、この $\mathcal{N}_k^p$ から $\mathcal{M}_k$ への orthogonal projection $\mathfrak{A}$ が存在する。([8] の §5 あるいは [6] の §15 参照。) なお、任意の $f\in\mathcal{N}_k^p$ について、$\mathfrak{A}f-f$ は、全ての重さ k の cusp form との内積が 0 となる。ここで、上で構成した Galois action とこの $\mathfrak{A}$ は可換となる。つまり、次の定理が成り立つ。

定理

$$(\mathfrak{A}f)^{(\sigma,\Psi,a)}=\mathfrak{A}\left(f^{(\sigma,\Psi,a)}\right).$$

(但し、左辺の $\mathfrak{A}$ は $\mathcal{N}_k^{p,(1,1)}(s,\Psi)$ から $\mathcal{M}_k^{(1,1)}(s,\Psi)$ への projection で、右辺の $\mathfrak{A}$ は $\mathcal{N}_{k^{\sigma}}^{p^{\sigma},(1,1)}(\iota(\sigma,a)s,\Psi\sigma)$ から $\mathcal{M}_{k^{\sigma}}^{(1,1)}(\iota(\sigma,a)s,\Psi\sigma)$ への projection である。)

参考文献

[1] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus, K.-Y. Shih, Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, Lecture Notes in Math. 900, Springer-Verlag, 1982.

[2] Y. Ishikawa, The Generalized Whittaker Functions for $SU(2,1)$ and the Fourier Expansions of Automorphic Forms, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **6**(1999), 477-526.

[3] S. Lang, Complex Multiplication, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 255, Springer-Verlag, 1983.

[4] G. Shimura, On a class of nearly holomorphic automorphic forms, Ann. of Math. **123**(1986), 347-406.

[5] G. Shimura, Nearly holomorphic functions on hermitian symmetric spaces, Math. Ann. **278**(1987), 1-28.

[6] G. Shimura, Arithmeticity in the theory of automorphic forms, Mathematical Surveys and Monographs **82**, AMS(2000).

[7] A. Yamauchi, On a certain extended Galois action on the space of arithmetic modular forms with respect to a unitary group, J. Math. Kyoto Univ. **41** No.1(2001), 183-231.

[8] A. Yamauchi, A certain Galois action on nearly holomorphic modular forms with respect to a unitary group in three variables, プレプリント。