数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 90-100

The analogue of Eichler-Selberg's trace formula for the non-holomorphic automorphic forms on the upper half space

名古屋大学大学院・多元数理科学研究科 D2 鈴木正俊 (Suzuki Masatosi)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1. 序文

1916 年に Ramanujan により予想された $L(s,\Delta)$ の 2 次の Euler 積表示を証明する為, 翌 1917 年 Mordell により導入され, その後 Hecke,Shimura 等により拡張・整備された Hecke 作用素の理論は, 保型形式の理論において非常に重要な研究対象である. 個々の Hecke 作用素に対し, その固有値を知る事が望まれる所ではあるが, 各々の固有値の解析は一般には非常に困難である. そこで固有値の平均である trace(跡) を調べようとする事は自然な発想であると言える.

1952 年頃,Selberg は, 彼の跡公式の理論を $SL(2,\mathbb{Z})\subset SL(2,\mathbb{R})$ の場合に応用して, 次の Hecke 作用素の跡公式を導いた ([Se]). また, この公式は Eichler(1956) により, 代数幾何学的な別証明が与えられた.

The Eichler-Selberg's trace formula (1956). full modular 群 $SL(2,\mathbb{Z})$ に関する weight k の正則 cusp form の空間 S_k に作用する Hecke 作用素 $T_k(n)$ $(n=2,3,\cdots)$ について

$$\mathrm{trace}T_k(n)=-\frac{1}{2}\sum_{-2\sqrt{n}<m<2\sqrt{n}}H(4n-m^2)\frac{\eta_m^{k-1}-\bar{\eta}_m^{k-1}}{\eta_m-\bar{\eta}_m}-\sum_{\substack{d|n\\ d\leq\sqrt{n}}}{}' d^{k-1}+\delta(\sqrt{n})\frac{k-1}{12}n^{k/2-1} \tag{1.1}$$

が成り立つ. ここで

$$\eta_m=\frac{m+i\sqrt{4n-m^2}}{2},\quad \delta(x)=\begin{cases}1 & if\ x\in\mathbb{Z},\\ 0 & otherwise,\end{cases} \tag{1.2}$$

和 $\sum'$ は和の限界のところ ($m=0$ や $d=\sqrt{n}$ のところ) では $\frac{1}{2}$ をかける事を意味し, $H(d)$ は判別式 $d<0$ の二次形式の重み付きの類数である. (例えば $H(-4)=\frac{1}{2}$, $H(-3)=\frac{1}{3}$.)

この結果はその後様々に応用, 拡張され, 保型形式の理論に種々の深い結果をもたらした.

さて, いま $\mathbb{H}$ を複素上半平面とし, $-\Delta=-y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})$ とする. $\mathcal{E}_\lambda$ を

$$-\Delta:\text{“}L^2(SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H})\text{”}\to L^2(SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H})$$

の λ-固有空間とする. $\mathcal{E}_\lambda$ 上にも正則保型形式の場合と同様に Hecke 作用素 $T(n)$ が定義される. この $T(n)$ について Xian-Jin Li は Eichler-Selberg の結果の類似として次の結果を示した ([Li]).

Xian-Jin Li's result (1999). 関数 $L_n(s)$ を次の Drichlet 級数により定義する.

$$L_n(s) := \sum_{d\in\Omega}\sum_{u}{}^{(d)}\frac{h_d\log\epsilon_d}{(du^2)^s} \tag{1.3}$$

ここで $\Omega = \{d \in \mathbb{Z}_{>0} | d \equiv 0 \,\text{or}\, 1 \bmod 4,\ d \neq \text{square}\}$ で, h_d は判別式 d の不定値二次形式の類数,ϵ_d は基本単数である. また和 $\sum_u{}^{(d)}$ は, ある有理整数 $t \in \mathbb{Z}$ が存在して $t^2 - du^2 = 4n$, を満たす正整数 u 全体を渡る.

この時, 右辺の Dirichlet 級数は $\Re(s) > 1$ で絶対収束し, $L_n(s)$ は右半平面 $\Re(s) > 0$ へ有理型に解析接続され, 一位の可能な極 $s = 1/2, 1, 1/2 \pm it_\lambda$ を除いて正則. ここで t_λ は $\lambda = \frac{1}{4} + t_\lambda^2$ で定まる実数である.

更に全ての $-\Delta$: "$L^2(SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H})$" $\to L^2(SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H})$ の固有値 λ について, $T(n) : \mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{E}_\lambda$ の trace は

$$\mathrm{trace}\,(T(n)\,|\mathcal{E}_\lambda) = 2n^{it_\lambda}\mathrm{Res}_{s=1/2+it_\lambda}L_n(s) \tag{1.4}$$

と表される.

注意 1. この結果は,X.-J. Li 自身と J.B.Conrey により合同部分群の場合に拡張されている ([LiCo]).

いま類数 1 の虚 2 次体 K の整数環を $\mathcal{O}_K$ とする. この時, 上記の Li の $SL(2,\mathbb{Z}) \subset SL(2,\mathbb{R})$ の場合と類似の結果が $SL(2,\mathcal{O}_K) \subset SL(2,\mathbb{C})$ の場合についても成り立つ. これが今回の結果の一つである (Theorem 1). これは今回のもう一つの結果である, ある形の trace formula (Theorem 2) の応用として得られる. 以下これについて説明する. (尚,Li の結果も trace formula を用いて示されるのであるが,Li の用いる trace formula はある特定の test 関数に対する trace formula である. 今回我々が示し, 用いる trace formula はかなり一般の test 関数について成り立つものであり,trace formula の証明が面倒な分,trace formula から Hecke 作用素の trace についての結果を導く議論は, 幾分シンプルで見通しの良いものとなる.)

2. 準備

群 $GL(2,\mathbb{C})$ の上半空間 $\mathbb{H} := \{(z,r) | z = x+iy \in \mathbb{C},\ r > 0\}$ への作用を

$$\begin{gathered} M\cdot(z,r) := \left(\frac{(az+b)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d})+a\bar{c}r^2}{|cz+d|^2+|c|^2r^2}, \frac{|\det M|r}{|cz+d|^2+|c|^2r^2}\right), \\ (z,r)\in\mathbb{H},\quad M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in GL(2,\mathbb{C}), \end{gathered} \tag{2.1}$$

により定める.

$\mathbb{H}$ は線素 $ds^2 = r^{-2}(dx^2+dy^2+dr^2)$ から定まる計量により 3 次元実 Riemann 多様体の構造を持ち, 体積要素は $d\mu = r^{-3}dxdydr$ で与えられる. また Laplace-Beltrami 作用素 $-\Delta$ は $-\Delta = -r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)+r\frac{\partial}{\partial r}$ と計算される.

$\mathcal{O}_K$ を類数 1 の虚 2 次体 K の整数環の整数環とし, 以下 $\Gamma := SL(2,\mathcal{O}_K)$ とする. この時,Γ は $\mathbb{H}$ へ不連続に作用し, 基本領域の体積は有限で, ただ一つの cusp を持つ. 上半

空間 $\mathbb{H}$ 上の関数 $F:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ で,Γ の作用に対して不変[1] で,Γ の基本領域上で $d\mu$ に関して 2 乗可積分であるもの全体から成る Hilbert 空間を $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ と表す. 些か不正確な言い方であるが,

$$-\Delta : \text{“}L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})\text{”} \to L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \tag{2.2}$$

は自己共役作用素となり, その固有値は全て非負の実数で, 各固有値の重複度は有限である事が知られている. (2.2) の λ-固有空間を以後 $\mathcal{E}_\lambda$ と書く.

$GL(2,K)$ の各元 α について, 両側剰余類 $\Gamma\alpha\Gamma$ の $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ への作用が

$$(T_\alpha f)(P) := (\det\alpha)^{-1}\sum_{j=1}^{J} f(\gamma_j P), \tag{2.3}$$

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{j=1}^{J}\Gamma\gamma_j, \quad f\in L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}), \tag{2.4}$$

により定義される. 各 $n\in\mathcal{O}_K$ について, 作用素 $T(n)$ を

$$T(n) := \sum_{\Gamma\backslash M(n)/\Gamma}\Gamma\alpha\Gamma, \quad M(n) := \{g\in M(2,\mathcal{O}_K) \mid \det(g)=n\}, \tag{2.5}$$

により定義する. 虚 2 次体 K の類数が 1 という仮定から $T(n)$ は次の簡明な表示を持つ.

$$T(n)F(z,r) = \frac{1}{|n|}\sum_{\substack{ad=n\\ b \bmod (d)}}{}^{\times} F(\begin{pmatrix} a & b\\ & d\end{pmatrix}\cdot(z,r)), \tag{2.6}$$

ここで $a,b,d\in\mathcal{O}_K$ で,(d) は d で生成される単項イデアルで, 和 $\sum^\times$ は d を modulo 単数で渡らせる事を意味する.T_α や $T(n)$ は Hecke 作用素と呼ばれる. T_α と $-\Delta$ は可換である事が知られており, その可換性から,T_α は $-\Delta$ の各 λ_l-固有空間 $\mathcal{E}_\lambda$ を不変にする. 明らかにこれは $T(n)$ についても成り立つ.

3. 主結果

いま $D := \{m\in\mathcal{O}_K \,|m\equiv x^2 \mod 4\mathcal{O}_K,\ m\neq \text{square in}\,\mathcal{O}_K\}$ とし,(1.3) の類似として Dirichlet 級数 $L_n(s)$ を

$$L_n(s) := \sum_{d\in D}\sum_{u}{}^{(d)}\frac{h_d\log|\epsilon_d|^2}{m_d|du^2|^s} \tag{3.1}$$

により定義する. ここで h_d は判別式 d の $\mathcal{O}_K$-係数二次形式の $SL(2,\mathcal{O}_K)$-同値類の個数であり, $\epsilon_d\in K(\sqrt{d})$ は基本単数[2] である. m_d は $d\neq -3,-4$ の時 $m_d=2$ で,$m_{-4}=4$, $m_{-3}=6$ なるものとする. 和 $\sum_u{}^{(d)}$ は,$u\in\mathcal{O}_K$, $\arg(u)\in[0,\pi)$ で, ある $t\in\mathcal{O}_K$ が存在

[1] $F(\gamma\cdot(z,r)) = F((z,r))$

[2] [Sar] に従って, $d\in D$, $t^2-du^2=4$ の基本解, 基本単数を次のように定める. $t^2-du^2=4$ の解 $(t,u)\in\mathcal{O}_K^2$ で $|\frac{t+\sqrt{d}u}{2}|^2+|\frac{t+\sqrt{d}u}{2}|^{-2}$ が, $|\frac{t+\sqrt{d}u}{2}|=1$, $u=0$ となるものを除いて, 最小となるものの中から, (t_d,u_d) を $\arg(\sqrt{d}),\arg(u_d)\in[0,\pi)$, $|\frac{t_d+\sqrt{d}u_d}{2}|>1$ となるように選ぶ. この様な (t_d,u_d) は一意に定まり, これを $t^2-du^2=4$ の基本解と言う. また $\epsilon_d := \frac{t_d+\sqrt{d}u_d}{2}$ を判別式 $d\in D$ の基本単数と言う.

して $t^2-du^2=4n$ かつ $|\frac{t+\sqrt{d}u}{2\sqrt{n}}|>1$ を満たすもの全体を渡る[3]．(3.1) の右辺は $\Re(s)>2$ で絶対収束する．$\{\lambda_l\}_{l\geq 0}$ を (2.2) の重複度を数えない固有値の列とし,$\lambda_l=1+r_l^2$, $r_l\geq 0$ により $\{r_l\}_{l=0}^{\infty}$ を定める．また Γ から定まる Eisenstein 級数[4] の区間 $(1,2]$ 上の極を $1<\sigma_1<\cdots<\sigma_L=2$,Eisenstein 級数の Fourier 展開の定数項を $r^2+\phi(s)r^{2-s}$ とする．以上の準備の下, 我々の結果は以下のように述べられる．

Theorem 1. (3.1) で定義された $L_n(s)$ について次が成り立つ．

(1) $L_n(s)$ は半平面 $\Re(s)>0$ へ有理型に解析接続され, 可能な極 $s=1\pm r_l, 2, 2-\sigma_i$ $(1\leq i\leq L)$, $2-\rho$ $(\phi(\rho)=0,\ \Re(s)>1)$ を除いて正則.

(2) 任意の $l>L$ について

$$\mathrm{trace}\,(T(n)\,|\mathcal{E}_{\lambda_l})=4|\mathcal{O}_K^{\times}|^{-1}|n|^{\pm ir_l}\mathrm{Res}_{s=1\pm ir_l}L_n(s). \tag{3.2}$$

Theorem 2. 関数 $h(r)$ が次の条件を満たすとする．

(1) $h(r)$ はある帯領域 $|\Im(r)|\leq 1+\delta$ で正則,

(2) $h(r)=h(-r)$,

(3) 帯領域 $|\Im(r)|\leq 1+\delta$ において $h(r)=O\left((1+|\Re(r)|)^{-3-\mu}\right)$.

$\alpha\in GL(2,K)\cap M(2,\mathcal{O}_K)$ について, T_α の $\mathcal{E}_{\lambda_l}$ 上のトレースを $\mathrm{tr}(T_\alpha|\lambda_l)$ と記す．この時,$h(r)$ と $h(r)$ の Fourier 変換 $g(u)$ について次の等式が成り立つ．

$$|\det\alpha|\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{tr}(T_\alpha|\lambda_l)\,h(r_l)=\mathrm{NCH}+\mathrm{NCE}+\mathrm{CH}+\mathrm{CE}+\mathrm{P}+\mathrm{Cont}, \tag{3.3}$$

$$\mathrm{NCH}=\sum_{\{T\}_\Gamma}^{\mathrm{NCH}}\frac{\log N(T_0)}{[\Gamma(T):\langle T_0\rangle]|a(T)-a(T)^{-1}|^2}g(\log N(T)),$$

$$\mathrm{NCE}=\sum_{\{R\}_\Gamma}^{\mathrm{NCE}}\frac{\log N(T_0)}{2[\Gamma(R):\langle T_0\rangle]\sin^2\theta_R}g(0),$$

$$\mathrm{CH}=\sum_{\{T\}_\Gamma}^{\mathrm{CH}}\frac{2\log|c_T|}{|\Gamma(T)||a(T)-a(T)^{-1}|^2}g(\log N(T)),$$
$$+\sum_{\{T\}_\Gamma}^{\mathrm{CH}}\frac{1}{|\Gamma(T)||a(T)-a(T)^{-1}|^2}\int_{\log N(T)}^{\infty}g(u)\frac{\sinh(u)}{\cosh(u)-\cos(2\arg a(T))}du,$$

$$\mathrm{CE}=\sum_{\{R\}_\Gamma}^{\mathrm{CE}}\frac{\log|c_R|}{2\sin^2\theta_R}g(0),$$
$$+\sum_{\{R\}_\Gamma}^{\mathrm{CE}}\frac{1}{8\sin^2\theta_R}\int_0^{\infty}g(u)\frac{\sinh(u)}{\sinh^2(u/2)+\sin^2\theta_R}du,$$

---

[3] $\arg(\sqrt{d})\in[0,\pi)$ と取っている．

[4] $\Re(s)>2$ において $E_\Gamma((z,r),s):=[\Gamma_\infty:\Gamma'_\infty]^{-1}\sum_{\gamma\in\Gamma'_\infty\backslash\Gamma}r(\gamma\cdot(z,r))^s$．ここで,$r((Z,R))=R$、$\Gamma_\infty=\{\gamma\in\Gamma|\gamma\infty=\infty\}$, $\Gamma'_\infty=\Gamma_\infty\cap\left\{\pm\begin{pmatrix}1&z\\&1\end{pmatrix}\middle|z\in\mathbb{C}\right\}$.

$$\mathrm{P} = g(0)\frac{1}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]}\sum_{i=1}^{\tau}\gamma_i,$$
$$+\frac{2\tau}{[\Gamma_\infty : \Gamma'_\infty]}\left(-g(0)\gamma_E + \frac{h(0)}{4} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir)dr\right),$$
$$\mathrm{Cont} = \frac{|\det\alpha|}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)w(1+ir)\frac{\phi'}{\phi}(1+ir)dr - \frac{|\det\alpha|h(0)\phi^*(1)}{4}.$$

上記の式の全ての和・積分は絶対収束する.

[Theorem 2. の記号の説明]
· $\sum^{\mathrm{NCH}}$ は $\Gamma\alpha\Gamma$ 内の, どんな Γ の cusp も固定しない双曲元[5] の,Γ-共役類全体を渡る.
· $\sum^{\mathrm{NCE}}$ は $\Gamma\alpha\Gamma$ 内の, どんな Γ の cusp も固定しない楕円元[6] の,Γ-共役類全体を渡る.
· $\sum^{\mathrm{CH}}$ は $\Gamma\alpha\Gamma$ 内の, ある Γ の cusp を固定する双曲元の,Γ-共役類全体を渡る.
· $\sum^{\mathrm{CE}}$ は、$\Gamma\alpha\Gamma$ 内の, ある Γ の cusp を固定する楕円元の,Γ-共役類全体を渡る.
· $a(T)$ は双曲元 T の $|a(T)| > 1$ を満たす固有値で,$N(T) = |a(T)|^2$ とする.
· M が Γ の cusp を固定しない双曲元, 又は Γ の cusp を固定しない楕円元である時, $\Gamma(M) = \{\gamma \in \Gamma | M\gamma = \gamma M\}$ について, ある双曲元 $T_0 \in \Gamma$ [7] と位数有限の元 $R_0 \in \Gamma$ が存在して $\Gamma(M) = \langle T_0\rangle \times \langle R_0\rangle$ となる事が分かる.
· Γ から定まる Eisenstein 級数を $E_\Gamma((z,r),s) = r^s + \phi(s)r^{2-s} + \ldots$ とした時, $T_\alpha E_\Gamma((z,r),s) = w(s)E_\Gamma((z,r),s)$, 及び $\phi^*(s) = w(s)\phi(s)$ が成り立つ.
その他若干の記号については [Su] を参照のこと.

4. 主結果の証明の概略

もし $h(r)$ がコンパクト台, 若しくは急減少な関数であれば, 定理 2 の (3.3) は, ある Hilbert-Schmidt 型の積分作用素のトレースを二通りに計算する事により得られる. かなりの計算を要する事ではあるが, 手法としては標準的である ([He1],[He2],[EGM] 等).

$h(r)$ が多項式オーダーで減少する様な場合でも,$h(r)$ を急減少な関数で近似してやる事により, 元の $h(r)$ に関して (3.3) を示す事が出来る. もう少し詳しく言うと, 例えば $h_\epsilon(r) = h(r)e^{-\epsilon r^2}$ $(0 < \epsilon < 1)$ とおき, h_ϵ とその Fourier 変換 g_ϵ の組 $[h_\epsilon, g_\epsilon]$ について (3.3) を示しておき, その後この等式の両辺において $\epsilon \to 0$ とする事により $[h, g]$ に関する等式が示されるのである.

しかしながら, この議論が正当である為には, 各和や積分が ϵ について一様に絶対収束していなければならない. この事を確かめる際, 最も問題になるのが NCH の項 (Γ の cusp を固定しない双曲類からの寄与) である. 他の共役類から生ずる和や積分が ϵ について一様に絶対収束する事は容易に確かめられる. また,$-\Delta$ の固有値に関する和が ϵ について一様に絶対収束する事は, $N_\Gamma(T) := \sharp\{\lambda_n = 1 + r_n^2 | r_n \leq T\}$ としたとき[8]、

[5] $GL(2,\mathbb{C})$ の元が双曲元であるとは,$\mathbb{H}$ の境界 $P^1\mathbb{C}$ 上異なる 2 つの固定点を持ち, $\mathbb{H}$ 内に固定点を持たない事を言う,

[6] $GL(2,\mathbb{C})$ の元が楕円元であるとは,$\mathbb{H}$ の境界 $P^1\mathbb{C}$ 上異なる 2 つの固定点を持ち, この 2 点を結ぶ $\mathbb{H}$ 内の測地線の各点を固定する事をいう.

[7] T_0 は T から一意には定まらないが,$N(T_0)$ は一意に定まる.

[8] ここでの $\{\lambda_n\}$ は重複度も込めた固有値の列を意味するものとする.

$N_\Gamma(T)=O(T)$ と評価される事と (cf.[EGM,chap 6.,Th 5.4]), $T_\alpha : L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \to L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ が有界線形作用素[9] である事から従う.

これらの理由から, 以下ではどの様にして NCH の項の和が ϵ について一様に絶対収束している事が示されるのかについて, 概略を述べたいと思う.

定理 2 の条件を満たすテスト関数 $h(r)$ について $h(r)$ が定理 2 の条件を満たす時,h_ϵ の Fourier 変換 g_ϵ は

$$g_\epsilon(u) \ll e^{-(1+\delta)|u|} \tag{4.1}$$

と ϵ について一様に評価されるので, この場合に NCH の項が ϵ について一様に絶対収束している事を示すには,

$$H_\delta = \sum_{\{T\}_\Gamma \subset \Gamma\alpha\Gamma}^{\mathrm{NCH}} \frac{\log N(T_0)}{[\Gamma(T):\langle T_0\rangle]|a(T)-a(T)^{-1}|^2} N(T)^{-1-\delta} \tag{4.2}$$

が絶対収束する事を言えば十分である. 通常の trace formula は Γ の単位元からの寄与を除けば, Theorem 2 の自明な Hecke 作用素 $\Gamma\tilde{\alpha}\Gamma = \Gamma$ の場合の公式と見なせる[10]. 通常の trace formula の理論において,(4.2) の絶対収束性は個数関数の評価

$$\begin{aligned}\pi_\Gamma(x) &:= \{\{T\}_\Gamma \in \Gamma/\sim_\Gamma \,|\, T\text{:双曲元}, N(T) \le x\} \\ &= O(x^2)\end{aligned} \tag{4.3}$$

を用いる事により示される. 我々の場合, これと同様の議論をしようと思えば,

$$\pi_{\Gamma\alpha\Gamma}(x) = \{\{T\}_\Gamma \in \Gamma\alpha\Gamma/\sim_\Gamma \,|\, T\text{: }\Gamma\text{ の cusp を固定しない双曲元}, N(T) \le x\} \tag{4.4}$$

に関して $\pi_\Gamma(x)$ の類似の評価が必要となる. ところが, これは $\pi_\Gamma(x)$ と同様の方法では出来ない. 何故ならば, 跡公式を用いないアプリオリな評価 (4.3) の証明は, 通常 Γ の基本領域の性質を用いて成され,Γ が群であるという性質に拠っている. これに対し, 我々の扱っている両側剰余類 $\Gamma\alpha\Gamma$ は一般に群ではないので, 同様の議論は使えないのである. 従って何か別の方法で (4.2) の絶対収束性を示さねばならない. 今回用いた手法は, 和 (4.2) に現れる種々の量を, 類数や二次形式等の数論的対象で書き換え, その性質を用いて (4.2) の収束性を示すという方法である. まず幾つかの補題を用意する.

Lemma 1. $\mathcal{Q}_d$ を判別式 $d\in D$ の primitive な $\mathcal{O}_K$ 係数二次形式達の Γ-同値類の完全代表系とする. また H を $\bar{\Gamma}=\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_K)$ の双曲元達の $\bar{\Gamma}$-共役類全体とする. この時,

$$\mathcal{Q}_d \ni ax^2+bxy+cy^2 \longmapsto \left\{\begin{pmatrix} \frac{t_d-bu_d}{2} & -cu_d \\ au_d & \frac{t_d+bu_d}{2}\end{pmatrix}\right\}_{\bar{\Gamma}}, \tag{4.5}$$

で定義される $\bigcup_{d\in D}\mathcal{Q}_d \to H$ は全射となる. ここで (t_d,u_d) は前出の Pell 方程式 $t^2-du^2=4$ の基本解である.

---

[9]従って固有値は有界.

[10]$\Gamma\alpha\Gamma$ が $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ へ自明に作用する事と, $\Gamma\tilde{\alpha}\Gamma=\Gamma$ は同値である. ここで $\tilde{\alpha}=(\det\alpha)^{-1/2}\alpha$ とおいた. $\Gamma\tilde{\alpha}\Gamma\neq\Gamma$ の時,$cI\notin\Gamma\alpha\Gamma$ が分かる.

Lemma 2. $\mathcal{Q}_d$ は Lemma 1 と同様のものとする. 集合 $\mathcal{Q}_{n,d}$ と $\overline{T(n)}_{\mathrm{NCH}}$ を

$$\mathcal{Q}_{n,d} := \left\{ \{Q,(t,u)\} \,\middle|\, \begin{array}{l} Q \in \mathcal{Q}_d, \quad (t,u) \in {\mathcal{O}_K}^2, \quad \arg(u) \in [0,\pi) \\ t^2 - du^2 = 4n, \quad \left|\dfrac{t+\sqrt{d}u}{2\sqrt{n}}\right| > 1 \end{array} \right\}, \tag{4.6}$$

$$\overline{T(n)}_{\mathrm{NCH}} := \left\{ \{\overline{T}\}_{\overline{\Gamma}} \in \overline{T(n)}/\sim_{\overline{\Gamma}} \,\middle|\, \begin{array}{l} T \text{ は } T(n) \text{ の双曲元で,} \\ \text{どんな } \Gamma \text{ の cusp も固定しない.} \end{array} \right\},$$

$$T(n) := \sum_{\alpha \in \Gamma\backslash M(n)/\Gamma} \Gamma\tilde{\alpha}\Gamma, \tag{4.7}$$

で定義する. ここで $\overline{*}$ は各 $*$ の, 自然な射影 $SL(2,\mathbb{C}) \to PSL(2,\mathbb{C})$ による像を表し, $\sim_{\overline{\Gamma}}$ は $\overline{\Gamma}$-共役による同値関係である. この時,

$$\{ax^2 + bxy + cy^2, (t,u)\} \longmapsto \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \frac{t-bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t+bu}{2} \end{pmatrix} \right\}_{\overline{\Gamma}} \tag{4.8}$$

で定義される写像 $\bigcup_{d\in\mathcal{D}} \mathcal{Q}_{n,d} \to \overline{T(n)}_{\mathrm{NCH}}$ は全射で, ちょうど $\frac{1}{2}|\mathcal{O}_K^\times| : 1$ の写像である. 但し, $\{M\}_{\overline{\Gamma}}$ は M の $\overline{\Gamma}$-共役類を表す.

Lemma 3. $d \in \mathcal{D}$ について

$$h(d) \log |\epsilon_d|^2 \ll |d|^{1+\epsilon} \quad as \quad |d| \to \infty \tag{4.9}$$

が成り立つ.

各 $d \in D$ について Pell 方程式 $t^2 - du^2 = 4$ の $\mathcal{O}_K$-解全体は,

$$(t_1,u_1)\cdot(t_2,u_2) := (\frac{t_1t_2 + du_1u_2}{2}, \frac{t_1u_2 + t_2u_1}{2}) \tag{4.10}$$

により群の構造を持ち, その群は $\mathbb{Z}$ と ,d で定まる有限群 G_d の直積に同型である事が知られている ([Sar]). ここで G_d は有限個の $d \in D$ を除いて $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型になる.

各 $d \in D$, $n \in \mathcal{O}_K$ について $t^2 - du^2 = 4n$ の $\mathcal{O}_K$-解達に, 同値関係 $(t_1,u_1) \sim_d (t_2,u_2)$ を, ある Pell 方程式 $t^2 - du^2 = 4$ の $\mathcal{O}_K$-解 (t_0,u_0) が存在して,

$$t_2 + \sqrt{d}u_2 = (t_1 + \sqrt{d}u_1)\frac{t_0 + \sqrt{d}u_0}{2}, \tag{4.11}$$

である事として定義する.

Lemma 4. 各 $d \in D$ について, 集合 S_d を

$$S_d := \left\{(t,u) \in \mathcal{O}_K^2 \,\middle|\, t^2 - du^2 = 4n, arg(u) \in [0,\pi), |\lambda_{t,u}| > 1\right\} \tag{4.12}$$

により定義する. ここで $\lambda_{t,u} = (t + u\sqrt{d})/2\sqrt{n}$ とおいた. この時次が成り立つ.

(1) G_d が $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型である時, 全ての S_d の元 (t,u) が, ある $1 \le j \le J_d$ と $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,$\delta\in\{\pm1\}$ により,

$$\begin{cases} \dfrac{u\sqrt{d}}{\sqrt{n}} = \delta(\lambda_j\epsilon_d^m - \lambda_j^{-1}\epsilon_d^{-m}), \\ \dfrac{t}{\sqrt{n}} = \delta(\lambda_j\epsilon_d^m + \lambda_j^{-1}\epsilon_d^{-m}), \end{cases} \tag{4.13}$$

と表示される様な $S_d/\sim_d$ の代表 $\{(t_j,u_j)\}_{1\le j\le J_d}$ が一意的に存在する.
(2) G_d が $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$ $(m>1)$ に同型である時, 全ての S_d の元 (t,u) が, ある $1\le j\le J_d$ と $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,$l\in\mathbb{Z}$,$\delta\in\{\pm1\}$ により,

$$\begin{cases} \dfrac{u\sqrt{d}}{\sqrt{n}} = \delta(\lambda_j\epsilon_d^m\epsilon^l - \lambda_j^{-1}\epsilon_d^{-m}\epsilon^{-l}), \\ \dfrac{t}{\sqrt{n}} = \delta(\lambda_j\epsilon_d^m\epsilon^l + \lambda_j^{-1}\epsilon_d^{-m}\epsilon^{-l}), \end{cases} \tag{4.14}$$

と表示される様な $S_d/\sim_d$ の代表 $\{(t_j,u_j)\}_{1\le j\le J_d}$ が存在する.
(3) (4.13) または (4.14) で定義される $(t,u)\in\mathcal{O}_K^2$ は S_d に属す.

ここで $\lambda_j=\lambda_{t_j,u_j}$, $\epsilon=\exp(\pi i/m)$, $J_d=\sharp(S_d/\sim_d)$ とおいた. また先と同様に ϵ_d は判別式 d に関する基本単数とする.

以上の補題を用いて (4.2) の収束性を示そう. (4.2) に Lemma 1,2 を用いれば,

$$H_\delta \le \frac{(4|n|)^{2+\delta}}{|\mathcal{O}_K^\times|}\sum_{d\in D}\sum_{t,u}{}^{(d)}\frac{h_d\log|\epsilon_d|^2}{m_d|du^2|}|t+u\sqrt{d}|^{-2-\delta}. \tag{4.15}$$

を得る. 更に Lemma 3 より

$$H_\delta \ll \sum_{d\in D}\sum_{t,u}{}^{(d)}|d|^{1+\epsilon}|du^2|^{-2-\delta} = \sum_{d\in D}\sum_{t,u}{}^{(d)}|du^2|^{-1-\delta+\epsilon}|u|^{-2(1+\epsilon)}, \tag{4.16}$$

と評価される事が分かる. ここで右辺の和を 3 つに分けて,

$$\sum_{\substack{d\in D\\|d|>8|n|}}\ \sum_{\substack{t,u\\8|u|<\sqrt{|d|}}}{}^{(d)} + \sum_{\substack{d\in D\\|d|<8|n|}}\ \sum_{\substack{t,u\\8|u|<\sqrt{|d|}}}{}^{(d)} + \sum_{d\in D}\ \sum_{\substack{t,u\\8|u|>\sqrt{|d|}}}{}^{(d)} =: S_1+S_2+S_3 \tag{4.17}$$

とおく. まず S_2 は有限和だから有界である. 次に S_3 について,

$$\begin{aligned} S_3 &\ll \sum_{d\in D}|d|^{-2(1+\delta-\epsilon)}\sum_{u\in\mathcal{O}_K\setminus\{0\}}|u|^{-2(1+\epsilon)} \\ &\ll \sum_{d\in\mathcal{O}_K\setminus\{0\}}|d|^{-2(1+\delta-\epsilon)} = O(1). \end{aligned}$$

従って S_3 も有界である. 最後に S_1 について述べる. 記号が少々ややこしいが御容赦の程を. まず Lemma 4 の基本解 $\{(t_j,u_j)\}_{1\le j\le J_d}$ を用いて

$$S_1 \ll \sum_{\substack{d\in D\\|d|>8|n|}} \sum_{\substack{t,u\\8|u|<\sqrt{|d|}}}{}^{(d)} |t|^{-1-\delta+\epsilon}|u|^{-2(1+\epsilon)}$$
$$\le \sum_{\substack{d\in D\\|d|>8|n|}} \sum_{j=1}^{J_d} |t_j|^{-2(1+\delta-\epsilon)}|u_j|^{-2(1+\epsilon)} =: \tilde{S}_1.$$

いま D_0 を D の元で $\mathcal{O}_K$ 内で平方因子を持たないもの全体から成る集合とする. $d_0\in D_0$ を一つ固定した時, 各 $0\ne l\in\mathcal{O}_K$ について t,u を変数とする方程式 $t^2-d_0l^2u^2=4n$ の基本解[11]を $\{(t_j(l),u_j(l))\}_{j=1}^{J_{d_0l^2}}$ とする. 次に $\{u_p\}_{p=1}^{\infty}(=\{u_p(d_0)\}_{p=1}^{\infty})\subset\mathcal{O}_K$ を, ある $0\ne l\in\mathcal{O}_K$, $1\le j\le J_{d_0l^2}$ が存在して $u_p=u_j(l)$ である様な $u_p\in\mathbb{C}$ 全体から成る集合とする. 更に t,u を変数と見た方程式 $t^2-d_0u_p^2u^2=4n$ の基本解を $(t_{p,q},u_{p,q})$ とする $(1\le q\le J_{d_0u_p^2})$. これらを用いて $\tilde{S}_1$ は,

$$\tilde{S}_1 \ll \sum_{d_0\in\mathcal{D}_0}\sum_{p=1}^{\infty}{}^{(d_0)} |u_p|^{-2(1+\epsilon)} \sum_{q=1}^{J_{d_0u_p^2}} |t_{p,q}|^{-2(1+\delta-\epsilon)}\left(1-\left|(u_p\sqrt{d_0})/2\right|^{-2(1+\delta-\epsilon)}\right)^{-1},$$

と評価される事が分かる. 従って

$$S_1 \ll \sum_{d_0\in\mathcal{D}_0}\{\min_{1\le j\le J_{d_0}}|t_j(d_0,1)|\}^{-2(1+\delta-\epsilon)}\sum_{p=1}^{\infty}|u_p|^{-2(1+\epsilon)}$$
$$\ll \sum_{d_0\in\mathcal{D}_0}\{\min_{1\le j\le J_{d_0}}|t_j(d_0,1)|\}^{-2(1+\delta-\epsilon)}$$
$$\le \sum_{t\in\mathcal{O}_K\setminus\{0\}}|t|^{-2(1+\delta-\epsilon)} = O(1),$$

を得るので S_1 も有界である. ここで $\{(t_j(d_0,1),u_j(d_0,1))\}_j$ は $t^2-d_0u^2=4n$ の基本解とする. 以上により (4.2) の級数が絶対収束する事が示された.

最後に Theorem 2 からどの様にして Theorem 1 が導かれるのかについて簡単に触れておく. まず $\Re(s)>2$ において $H_n(s)$,$H_\alpha(s)$ を

$$H_n(s) := \sum_{\alpha\in\Gamma\backslash M(n)/\Gamma} H_\alpha(s), \tag{4.18}$$

$$H_\alpha(s) = \sum_{\{T\}_\Gamma\subset\Gamma\tilde{\alpha}\Gamma}^{\mathrm{NCH}} \frac{2\log N(T_0)}{[\Gamma(T):\langle T_0\rangle]|a(T)-a(T)^{-1}|^2}N(T)^{1-s}, \tag{4.19}$$

と定義する. いま $a>2$ を固定し,$s\in\mathbb{C}$, $\Re(s)>2$ に対して

$$h_s(r) = \frac{1}{r^2-(s-1)^2}-\frac{1}{r^2-(a-1)^2} \tag{4.20}$$

[11] Lemma 4. の $\{(t_j,u_j)\}$ 達.

と定義すれば $h_s(r)$ は Theorem 2 の (1),(2),(3) の条件を満たす. 従って (3.3) の等式が成り立ち, この時の NCH の項が $H_\alpha(s)$ となる. 等式 (3.3) を用いて $H_\alpha(s)$ の全 s-平面への解析接続が示され, その極と留数も分かる (詳しい形は [Su] 参照のこと). 特に $H_n(s)$ は全 s-平面に解析接続されて

$$\mathrm{Res}_{s=1\pm r_l} H_n(s) = |n| \mathrm{tr}(T(n)_{|\lambda_l}) \tag{4.21}$$

が成り立つ.

一方 (4.2) の絶対収束性の証明と同様の議論により, $L_n(s)$ の定義式 (3.1) の Dirichlet 級数は $\Re(s) > 2$ で絶対収束する事が分かる. いま $Re(s) > 2$ において $H_n(s)$ は

$$H_n(s) = \frac{(4|n|)^s}{|\mathcal{O}_K^\times|} \sum_{d\in D} \sum_{t,u} \frac{h_d \log|\epsilon_d|^2}{m_d|du^2|} |t+u\sqrt{d}|^{2(1-s)} \tag{4.22}$$

と表示される事に注意して $\Re(s) > 2$ での $H_n(s), L_n(s)$ の級数表示を用いると,

$$H_n(s) - \frac{4|n|^s}{|\mathcal{O}_K^\times|} L_n(s) \ll \sum_{d\in D} \sum_{t,u} \frac{h_d \log|\epsilon_d|^2}{|du^2|^{\Re(s)+1}} \ll \sum_{d\in D} \sum_{t,u} |du^2|^{-\Re(s)+\epsilon} |u|^{-2(1+\epsilon)}$$

を得る. ここで再び (4.2) の絶対収束性の証明の議論を用いると,

$$H_n(s) - 4|n|^s |\mathcal{O}_K^\times|^{-1} L_n(s) \tag{4.23}$$

は $\Re(s) > 1$ で正則な関数 $F_1(s)$ を定める事が分かる. 従って $L_n(s)$ は $\Re(s) > 1$ へ正則に解析接続される. 更に, 再び $H_n(s), L_n(s)$ の級数表示を用いて

$$\begin{aligned} &H_n(s) - \frac{4|n|^s}{|\mathcal{O}_K^\times|} [L_n(s) - |n|(s-1)L_n(s+1)] \\ &\qquad \ll \sum_{d\in D} \sum_{t,u} \frac{h_d \log|\epsilon_d|^2}{|du^2|^{\Re(s)+2}} \ll \sum_{d\in D} \sum_{t,u} |du^2|^{-1-\Re(s)+\epsilon} |u|^{-2(1+\epsilon)} \end{aligned} \tag{4.24}$$

を得るので, 三度 (4.2) の絶対収束性の議論を用いると,

$$H_n(s) - 4|n|^s |\mathcal{O}_K^\times|^{-1} [L_n(s) - |n|(s-1)L_n(s+1)] \tag{4.25}$$

は $\Re(s) > 0$ で正則な関数 $F_2(s)$ を定める事が分かる. 等式

$$\frac{4|n|^s}{|\mathcal{O}_K^\times|} [L_n(s) - |n|(s-1)L_n(s+1)] = H_n(s) - F_2(s) \tag{4.26}$$

により左辺は $\Re(s) > 0$ へ解析接続され,$s = 1 \pm ir_l, 1, 2-\sigma_i, 2-\rho$ で可能な極を持つ他は正則である事が分かる. これと上で述べた事と合わせると Theorem 1(1) が従う. また $s = 1 \pm ir_l\ (l > L)$ での留数は $|n|\mathrm{tr}T(n)_{|\lambda_l}$ であり ,$L_n(s)$ は $\Re(s) > 1$ で正則だから

$$\lim_{s\to 1+\pm ir_l} (s - (1 \pm ir_l)) [L_n(s) - |n|(s-1)L_n(s+1)] = \mathrm{Res}_{s=1\pm ir_l} L_n(s) \tag{4.27}$$

が成り立つ.(4.21), (4.27) から Theorem 1(2) が従う.

References

[EGM] Elstrodt,J.,Gruneward,F.,Mennicke,J.: *Groups acting on hyperbolic space*, Springer Monographs in Math., Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1998).

[He1] Hejhal,D.A.: *The Selberg trace formula for* $PSL(2,\mathbb{R})$ *vol.1*, Lecture Note in Math. no.548, Springer-Verlag, New York (1976).

[He2] Hejhal,D.A.: *The Selberg trace formula for* $PSL(2,\mathbb{R})$ *vol.2*, Lecture Note in Math. no.1001, Springer-Verlag, New York (1983).

[Li] Li,X.J.: *On the trace of Hecke operators for Maass forms*, CRM. Proc. and Lecture Notes, 19 (1999) pp.215-229.

[LiCo] Li,X.J.,Conrey,J.B.: *On the trace of Hecke operators for Maass forms for congruence subgroups*, Forum. Math., 13 (2001) no.4, pp.447-484.

[Sar] Sarnak,P.: *The arithmetic and geometry of some hyperbolic three manifolds*, Acta Math., 151 (1983) pp.253-295.

[Se] Selberg,A.: *Harmonic analysis and discontinuous groups on weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J.Indian Math. Soc. , 20 (1956) pp.47-87.

[Su] Suzuki,M.: *On the trace of hecke operators for* $L^2(SL_2(\mathcal{O}_K)\backslash\mathbf{H})$, preprint

Graduate School of Mathematics,
Nagoya University,
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602,
Japan
e-mail address:m99009t@math.nagoya-u.ac.jp