数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 167-175

概均質ベクトル空間のゼータ関数の関数等式と絡作用素

立教大学・理学部 佐藤 文広 (Fumihiro Sato)
Department of Mathematics, Fuculty of Science
Rikkyo University

本稿では, 概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数の関数等式の gamma 行列が, 一般線型群 GL_m の退化主系列表現の間の同値を与える絡作用素 (intertwining operator) に関連するある積分 (一種の c 関数) によって与えられることを説明する.

§1 では, 概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数の関数等式について簡単に復習した後に, 主定理を定式化する. 主定理により, 関数等式の具体形を計算する新しい方法が与えられる. この方法が有効な場合は多いとは言えないが, 過去に計算されていた場合に適用すると, 計算が簡易化されることがしばしばある. 例えば, 2 変数 3 次形式の空間に付随するゼータ関数の関数等式は Shintani [Sh] において計算されたが, その方法は容易にまねのできない工夫を含んでいた. しかし, 主定理を用いると, 多少の変数変換を行ってからよく知られた公式

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-a)^{b-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

を 3 回適用すれば, 機械的に計算ができる (計算の詳細は [S6] にある) . また, 本稿では述べないが, 主定理は p 進体上の概均質ベクトル空間にも拡張可能であり, 関数等式の gamma 行列が p 進体と実数体とを並行した表示を持つことを示せる点も一つのメリットであろう.

§2 では, 主定理の証明を略述する. 証明の鍵となるのは, [S2], [S4] で証明されたように ([S5] でも解説した) , 実数体上の局所ゼータ関数の関数等式が弱球等質空間上の球関数の関数等式として読み替えられるという事実である. この読み替えの結果, 関数等式は一般線型群の退化主系列表現の間の同値に根拠を持っていることが分かるのである.

概均質ベクトル空間のゼータ関数の典型的な例として正定値二次形式の Epstein ゼータ関数を考えてみよう. よく知られているように, Epstein ゼータ関数は GL_n の Eisenstein 級数ともみなすことができ, Poisson の和公式による方法の他に, 表現論的手法によっても関数等式を証明することができる. Fourier 変換によって得られる関数等式を絡作用素から出てくる積分の計算

に帰着させる主定理は, このような状況が任意の概均質ベクトル空間の局所ゼータ関数についても生じていることを示している. §3 では, このあたりの事情に関連したコメントを 2-3 述べる.

§1 主定理

m, n を $m > n$ を満たす自然数とする. $\mathbf{H}$ を $\mathbf{GL}_m$ の $\mathbb{R}$ 上定義された連結閉部分群とする. $\mathbf{V} = \mathbf{M}_{m,n}$ ($m \times n$ 行列の空間) とおく. このとき群 $\mathbf{H} \times \mathbf{GL}_n$ の $\mathbf{V}$ 上の表現が

$$\rho(h_1, h_2)(v) = h_1 v\, {}^t h_2 \quad (h_1 \in \mathbf{H},\ h_2 \in \mathbf{GL}_n,\ v \in \mathbf{V})$$

によって与えられる. 三つ組 $(\mathbf{H} \times \mathbf{GL}_n, \rho, \mathbf{V})$ は概均質ベクトル空間である, すなわち, $\mathbf{V}$ のある代数的部分集合 $\mathbf{S}$ があり, その補集合 $\mathbf{V} - \mathbf{S}$ が $\rho(\mathbf{G})$-軌道となっていると仮定する. $\mathbf{S}$ を, この概均質ベクトル空間の **特異集合** という.

注意 : 任意の概均質ベクトル空間 $(\mathbf{G}, \rho, \mathbf{V})$ は, $m = \dim \mathbf{V}$ とおいて $\mathbf{V}$ を行列空間 $\mathbf{M}_{m,1}$ と同一視し, $\mathbf{H}$ を $\rho(\mathbf{G})$ で置きかえれば, 上のような形と思ってよい. したがって, 上の設定は格別一般性を損なうものではない.

以下, 本稿では 1 変数ゼータ関数のみを考えるので, 次の仮定を置く.

(仮定 1) $\mathbf{H}$ は非自明な $\mathbb{R}$-有理指標を持たない簡約代数群である.

(仮定 2) $(\mathbf{H} \times \mathbf{GL}_n, \rho, \mathbf{V})$ は正則概均質ベクトル空間で, 特異集合 $\mathbf{S}$ は $\mathbb{R}$-既約な超曲面である.

$f(v)$ で $(\mathbf{H} \times \mathbf{GL}_n, \rho, \mathbf{V})$ の基本相対不変式, すなわち, $\mathbf{S}$ の定義多項式で $\mathbb{R}$ 上既約なものを表す.

$(\mathbf{H} \times \mathbf{GL}_n, \rho, \mathbf{V})$ の双対概均質ベクトル空間を $(\mathbf{H} \times \mathbf{GL}_n, \rho^*, \mathbf{V}^*)$ で表す. 以下では, 内積 $\langle v, v^* \rangle = \mathrm{tr}({}^t v v^*)$ $(v, v^* \in \mathbf{M}_{m,n})$ により $\mathbf{V}^*$ を $\mathbf{V} = \mathbf{M}_{m,n}$ と同一視する. このとき, 表現 ρ^* は $\rho^*(h_1, h_2)(v^*) = {}^t h_1^{-1} v^* h_2^{-1}$ で与えられる. $(\mathbf{H} \times \mathbf{GL}_n, \rho^*, \mathbf{V}^*)$ も上記の仮定 1, 2 を満たす. $\mathbf{S}^*$, $f^*(v^*)$ で, それぞれ, $(\mathbf{H} \times \mathbf{GL}_n, \rho^*, \mathbf{V}^*)$ の特異集合, 基本相対不変式を表す. $d = \deg f(v)$ とおく. $d = \deg f^*(v^*)$ でもある.

今後, 実点の集合を, 次の記号で表す :

$$H = \mathbf{H}(\mathbb{R}),\ GL_n = \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}),\ V = V^* = \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ S = \mathbf{S}(\mathbb{R}),\ S^* = \mathbf{S}^*(\mathbb{R}).$$

$V - S$, および, $V^* - S^*$ を

$$V - S = V_1 \cup \cdots \cup V_\nu, \quad V^* - S^* = V_1^* \cup \cdots \cup V_\nu^*$$

と連結成分に分解する. 各連結成分 V_i, V_j^* $(1 \leq i, j \leq \nu)$ と $s \in \mathbb{C}$ with $\mathrm{Re}\, s \geq 0$ に対し

$$|f(v)|_i^s = \begin{cases} |f(v)|^s & (v \in V_i), \\ 0 & (v \notin V_i), \end{cases} \quad |f^*(v^*)|_j^s = \begin{cases} |f^*(v^*)|^s & (v^* \in V_j^*), \\ 0 & (v^* \notin V_j^*) \end{cases}$$

と定義する. さらに, これらの関数を s に関して解析接続して得られる V, ないし, V^* 上の超関数も同じ記号 $|f(v)|_i^s$, $|f^*(v^*)|_j^s$ で表そう.

局所ゼータ関数 $\Phi_i(\phi;\lambda)$, $\Phi_i^*(\phi^*;\lambda)$ $(1 \leq i \leq \nu, \phi \in \mathcal{S}(V), \phi^* \in \mathcal{S}(V^*))$ は

$$\Phi_i(\phi;\lambda) = \int_V |f(v)|_i^{(\lambda - mn/2)/d} \phi(v)\, dv, \quad \Phi_j^*(\phi^*;\lambda) = \int_{V^*} |f^*(v^*)|_j^{(\lambda - mn/2)/d^*} \phi^*(v^*)\, dv^*$$

によって定義される. $\hat{\phi^*}$ で $\phi^* \in \mathcal{S}(V^*)$ の Fourier 変換を表す：

$$\hat{\phi^*}(v) = \int_{V^*} \phi^*(v^*) \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle v, v^*\rangle)\, dv^*.$$

このとき, 概均質ベクトル空間の理論における（$\mathbb{R}$ 上の）基本定理 ([SS], [S1]) は, 次の関数等式が成り立つことを主張する：

$$\Phi_i(\hat{\phi^*};\lambda) = \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_{ij}(\lambda) \Phi_j^*(\phi^*; -\lambda). \tag{1.1}$$

ここで, $\gamma_{ij}(\lambda)$ は ϕ^* と無関係な λ の有理形関数であり, gamma 関数と指数関数を用いた初等的な表示が存在することが知られている（とは言っても, 一般的な明示式が知られているわけではない）.

さて, $\gamma_{ij}(\lambda)$ を多項式の冪積分で表示する次の定理が, 我々の主定理である.

定理 1 $v_0^* = \begin{pmatrix} 0 \\ E_n \end{pmatrix} \in V^*$ とおき, 各 j $(1 \leq j \leq \nu)$ に対して $v_j^* = {}^t g_j^{-1} v_0^* \in V_j^*$ かつ $|f^*(v_j^*)| = 1$ となるような $g_j \in \mathbf{SL}_m(\mathbb{R})$ を選ぶ. このとき, 次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}(\lambda) &= \pi^{-\lambda-(m-n)n/2} I_{ij}(\lambda) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2n} + \frac{m-2k}{4}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2n} - \frac{m-2(n-k)}{4}\right)}, \\ I_{ij}(\lambda) &= \int_{\mathbf{M}_{m-n,n}(\mathbb{R})} \left| f\left(g_j \begin{pmatrix} x \\ E_n \end{pmatrix}\right)\right|_i^{(\lambda-mn/2)/d} dx. \end{aligned}$$

注意： 積分 $I_{ij}(\lambda)$ は, いかなる $\lambda \in \mathbb{C}$ に対しても発散してしまうことがある. このときは, $I_{ij}(\lambda)$ を下の積分で定義される関数 $I_{ij}(\alpha,\lambda)$ を解析接続したものの $\alpha = 0$ での値として定義する：

$$I_{ij}(\alpha,\lambda) = \int_{\mathbf{M}_{m-n,n}(\mathbb{R})} \left| f\left(g_j \begin{pmatrix} x \\ E_n \end{pmatrix}\right)\right|_i^{(\lambda-mn/2)/d} \det\left(E_n + {}^t xx\right)^{-\alpha} dx.$$

この積分は, $\mathrm{Re}(\lambda) > \frac{mn}{2}$ かつ and $\mathrm{Re}(\alpha)$ が十分大きいとき絶対収束する.

§2 主定理の証明

[S2], [S4] ([S5]) において, 関数等式 (1.1) は等質空間 $X = H\backslash GL_m$ 上の $O(m)$-不変球関数の関数等式に書き換えられることが示されている. そのポイントは

$$\left\{ (g^{-1}\mathbf{H}g \times \mathbf{GL}_n, \rho, \mathbf{M}_{m,n}) \;\middle|\; Hg \in H\backslash GL_m \right\}$$

という概均質ベクトル空間の族を考え, この族に含まれる各概均質ベクトル空間に付随する局所ゼータ関数をパラメータ空間 $H\backslash GL_m$ 上の関数として考察することである. すなわち,

$$H\backslash GL_m \ni Hg \;\longmapsto\; \Phi_i(Hg, \phi; \lambda) := \int_V |f(gv)|_i^{(\lambda - mn/2)/d} \phi(v)\, dv,$$

$$H\backslash GL_m \ni Hg \;\longmapsto\; \Phi_j^*(Hg, \phi^*; \lambda) := \int_{V^*} \left|f^*({}^t g^{-1} v^*)\right|_j^{(\lambda - mn/2)/d^*} \phi^*(v^*)\, dv^*$$

により定まる $H\backslash GL_m$ 上の (複素パラメータ λ を含む) 関数を考える.

$$v_0 = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_0^* = \begin{pmatrix} 0 \\ E_n \end{pmatrix}$$

とおこう.

補題 2 ϕ, ϕ^* は, ともに左 $O(m)$-不変であると仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} \Phi_i(Hg, \phi; \lambda) &= Z_{mn}(\phi; \lambda)\omega_i(Hg; \lambda), \\ \Phi_j^*(Hg, \phi^*; \lambda) &= Z_{mn}(\phi^*; \lambda)\omega_j^*(Hg; \lambda) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned} Z_{mn}(\phi; \lambda) &= \int_{\{ v \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{R}) \,|\, \mathrm{rank}\, v = n \}} \det({}^t v v)^{(\lambda - mn/2)/2n} \phi(v)\, dv, \\ \omega_i(Hg; \lambda) &= \int_{O(m)} |f(gkv_0)|_i^{(\lambda - mn/2)/d}\, dk, \\ \omega_j^*(Hg; \lambda) &= \int_{O(m)} \left|f^*({}^t g^{-1} k v_0^*)\right|_j^{(\lambda - mn/2)/d^*}\, dk, \end{aligned}$$

とおいた. dk は, コンパクト群 $O(m)$ の正規化された *Haar* 測度である.

補題に現れた積分 $Z_{mn}(\phi; \lambda)$ は概均質ベクトル空間 $(\mathbf{SO}_m \times \mathbf{GL}_n, \mathbf{M}_{m,n})$ に付随する局所ゼータ関数であり, $\phi_0(v) := \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}({}^t v v)\right)$ に対しては, 積分値が計算可能である. すなわち, 次の結果が成り立つことはよく知られている:

$$Z_{mn}(\phi_0; \lambda) = \pi^{-(2\lambda - mn)/4} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2n} + \frac{m-2k}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-k}{2}\right)}.$$

この等式と補題 2 とを合わせると, 関数等式 (1.1) は次のように書き換えられる：

$$\omega_i(Hg;\lambda) = |\det g|^{-n}\,\Gamma_{mn}(\lambda)\sum_{j=1}^{\nu}\gamma_{ij}(\lambda)\omega_j^*(Hg;-\lambda). \tag{2.1}$$

ここで,

$$\Gamma_{mn}(\lambda) = \pi^{\lambda}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2n}+\frac{m-2k}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2n}+\frac{m-2k}{4}\right)} \tag{2.2}$$

とおいた. これにより, $\gamma_{ij}(\lambda)$ の計算は, 関数等式 (2.1) の決定に帰着した.

次に, 関数等式 (2.1) を GL_m の退化主系列表現の絡作用素と関係付けよう. $P = P_{n,m-n}$, $P^* = P_{m-n,n}$ を, それぞれ, m の分割 $m = n + (m-n)$, $m = (m-n)+n$ に対応する GL_m の（上三角）極大放物型部分群とする. $\mathcal{B}(GL_m/P; z_1, z_2)$ で, 条件
(2.3)

$$\psi(gp) = |\det p_1|^{z_1-(m-n)/2}\,|\det p_2|^{z_2+n/2}\,\psi(g) \quad \left(\forall p = \begin{pmatrix} p_1 & * \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \in P = P_{n,m-n}\right)$$

を満たす GL_m 上の佐藤超関数 ψ の空間を表す. 左移動によって GL_m の $\mathcal{B}(GL_m/P; z_1, z_2)$ 上の表現 (退化主系列表現) が得られる. また, $\mathcal{B}(GL_m/P; z_1, z_2)^H$ によって左 H-不変関数のなす部分空間を表す.

複素パラメータ $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ に対して,

$$\Psi_{z,i}(g) = |\det g|^{z_2+n/2}\,|f(gv_0)|_i^{n(z_1-z_2-m/2)/d}$$

とおく. 容易に分かるように $\Psi_{z,i}(g)$ は $\mathcal{B}(GL_m/P; z_1, z_2)^H$ に属している. 同様に

$$\Psi_{z,j}^*(g) = |\det g|^{z_1-n/2}\,\left|f^*({}^t g^{-1}v_0^*)\right|_j^{n(z_1-z_2-m/2)/d^*}$$

とおくと, $\Psi_{z,j}^*(g)$ は $\mathcal{B}(GL_m/P^*; z_1, z_2)^H$ に属す.

$\mathcal{A}(GL_m/O(m))$ で対称空間 $GL_m/O(m)$ 上の実解析関数の空間を表す. $\mathcal{B}(GL_m/P; z_1, z_2)$ に属す ψ に対し, その Poisson 変換を

$$\mathcal{P}\psi(g) = \int_{O(m)} \psi(gk)\,dk$$

と定義すると, $\mathcal{P}\psi$ は $\mathcal{A}(GL_m/O(m))$ に含まれ, GL_m-同変な写像

$$\mathcal{P} : \mathcal{B}(GL_m/P; z_1, z_2) \to \mathcal{A}(GL_m/O(m))$$

の像はある微分方程式系によって特徴付けられることが知られている ([K²MO²T], [O] 参照). また, 写像 $\mathcal{P}$ は一般の $z \in \mathbb{C}^2$ に対しては単射である.

上で構成した $\Psi_{z,i}$, $\Psi^*_{z,j}$ の Poisson 変換による像は, 球関数 ω_i, ω^*_j で次のように表される:

$$\begin{cases} \mathcal{P}\Psi_{z,i}(g) &= |\det g|^{z_2+n/2}\,\omega_i(Hg;n(z_1-z_2)), \\ \mathcal{P}\Psi^*_{z,j}(g) &= |\det g|^{z_1-n/2}\,\omega^*_j(Hg;n(z_1-z_2)). \end{cases} \tag{2.4}$$

さて, $\mathcal{B}(GL_m/P;z_1,z_2)$ と $\mathcal{B}(GL_m/P^*;z_2,z_1)$ は一般の (z_1,z_2) に対しては既約かつ同値となる. 同値を与える絡作用素

$$T_z:\mathcal{B}(GL_m/P;z_1,z_2)\longrightarrow\mathcal{B}(GL_m/P^*;z_2,z_1)$$

を考えよう. T_z は, 連続関数 $\psi\in\mathcal{B}(GL_m/P;z_1,z_2)$ に対しては, 積分

$$T_z\psi(g)=\int_{M_{m-n,n}(\mathbb{R})}\psi\left(g\begin{pmatrix} X & E_{m-n}\\ E_n & 0\end{pmatrix}\right)\det\left(E_n+{}^txx\right)^{-\alpha}dx\Bigg|_{\alpha=0} \tag{2.5}$$

で与えられる. ここで, 右辺は, 積分を解析接続して $\alpha=0$ における値を取るものと解釈する. よく知られているように, 作用素 T_z は z について解析接続され z について有理形に依存する. 定理の証明のキーポイントは, 次の可換図式である:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(GL_m/P;z_1,z_2) & \xrightarrow{\mathcal{P}} & \mathcal{A}(GL_m/O(m)) \\ {\scriptstyle T_z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \times c(z_1-z_2)} \\ \mathcal{B}(GL_m/P^*;z_2,z_1) & \xrightarrow{\mathcal{P}} & \mathcal{A}(GL_m/O(m)). \end{array} \tag{2.6}$$

可換図式の右側の縦の写像は, 関数

$$\begin{aligned} c(z_1-z_2) &= \int_{M_{m-n,n}(\mathbb{R})}\det\left(E_n+{}^txx\right)^{(z_1-z_2-m/2)/2}dx \\ &= \pi^{(m-n)n/2}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{z_2-z_1}{2}-\frac{m-2(n-k)}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{z_2-z_1}{2}+\frac{m-2k}{4}\right)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

の掛け算によって与えられている.

では, 関数等式 (2.1) を (2.4) を用いてさらに書き換えると,

$$\mathcal{P}\Psi_{(z_1,z_2),i}(g)=\Gamma_{mn}(\lambda)\sum_{j=1}^{\nu}\gamma_{ij}(\lambda)\mathcal{P}\Psi^*_{(z_2,z_1),j}(g),\quad \lambda=n(z_1-z_2)$$

が得られる. 両辺を $c(z_1-z_2)$ 倍すると, 図式 (2.6) の可換性により

$$\mathcal{P}T_z\Psi_{(z_1,z_2),i}(g)=c(z_1-z_2)\Gamma_{mn}(\lambda)\sum_{j=1}^{\nu}\gamma_{ij}(\lambda)\mathcal{P}\Psi^*_{(z_2,z_1),j}(g)$$

となる. $\mathcal{P}$ は, 一般の (z_1,z_2) に対しては $\mathcal{B}(GL_m/P^*;z_2,z_1)$ 上単射であったから,

$$T_z\Psi_{(z_1,z_2),i}(g)=c(z_1-z_2)\Gamma_{mn}(\lambda)\sum_{j=1}^{\nu}\gamma_{ij}(\lambda)\Psi^*_{(z_2,z_1),j}(g) \tag{2.8}$$

が得られる. したがって, g_j を主定理におけると同じにとったとき,

$$I_{ij}(\lambda)=T_z\Psi_{(z_1,z_2),i}(g_j)=c(z_1-z_2)\Gamma_{mn}(\lambda)\gamma_{ij}(\lambda)$$

となる. (2.2) と (2.7) に注意すれば, この式から定理の主張は直ちに従う. □

§3 コメント

関数等式の証明について 本稿では, 概均質ベクトル空間のゼータ関数の関数等式 (1.1) の成立を前提にした議論を行った. しかし, GL_m/P^* の H-軌道構造を調べることにより, 一般の (z_1,z_2) について $\mathcal{B}(GL_m/P^*;z_2,z_1)^H$ が $\Psi^*_{(z_2,z_1),j}$ $(j=1,\ldots,\nu)$ によって張られることが示されれば, (2.8) の形の等式が得られ, さらに, §2 の議論を逆転させることで概均質ベクトル空間のゼータ関数の関数等式の別証明が得られることになる.

関数等式成立の根拠について 大域的なゼータ関数の族で関数等式の証明が組織的になされているものは, 保型 L 関数, Selberg ゼータ関数, そして, 概均質ベクトル空間のゼータ関数に尽きると思う（Hasse-Weil 型のゼータ関数は保型 L 関数との結びつきを確立することによってのみ, 関数等式が示される）. これらのゼータ関数の族について関数等式の成立の根拠を考えると, 保型 L 関数では Eisenstein 級数の関数等式への帰着（Rankin-Selberg, Langlands-Shahidi の方法）であり, Selberg ゼータ関数では Laplacian の固有値の対称性であり, いずれも, 主系列表現の間に存在する同値に根拠があるといってもよいであろう. 一方, 概均質ベクトル空間のゼータ関数の場合には, 関数等式成立の根拠は, 相対不変式の複素ベキの Fourier 変換が双対的な相対不変式の複素ベキと一致すること（および, Poisson の和公式）に求められ, 保型 L 関数, Selberg ゼータ関数とは異なる根拠によるものと理解されてきた. しかし, 主定理（の証明）の示すところは, 概均質ベクトル空間の場合もやはり主系列表現の間の同値に関数等式の根拠を求めることができる, ということである. 関数等式が成り立つ理由というのは, 見掛けは違っても結局のところ一つしかなかったのだというと, 言い過ぎであろうか.

大域的ゼータ関数の場合 Godement-Jacquet の理論 [GJ] では, GL_r の standard L 関数を概均質ベクトル空間

$$(\mathbf{SL}_r\times\mathbf{SL}_r\times\mathbf{GL}_1,\rho,\mathbf{M}_r),\quad \rho(h_1,h_2,t)v=th_1v\,{}^th_2$$

に付随する（保型形式付き）ゼータ関数として取り扱っている．この空間に対して，§2 での構成を適用するには，$m = r^2$, $n = 1$, $H = \rho(\mathbf{SL}_r \times \mathbf{SL}_r) \hookrightarrow \mathbf{GL}_{r^2}$ に対し，放物型部分群 P_{1,r^2-1} から定まる退化主系列表現の間の絡作用素を考えることとなる．Piatetski-Shapiro-Rallis ([PS]) は，$\{\mathbf{GL}_{r^2},\ H = \rho(\mathbf{SL}_r \times \mathbf{SL}_r),\ P_{1,r^2-1}\}$ と本質的には同じデータから出発して，GL_r の standard L 関数に Rankin-Selberg 型の積分表示を与えたが，それは §2 の議論の大域化と見ることができる．そして，§2 の大域版として，Piatetski-Shapiro-Rallis の構成は任意の概均質ベクトル空間の（大域的）ゼータ関数の場合に拡張でき，ゼータ関数を Eisenstein 級数の周期（定数関数という trivial な保型形式に対する Rankin-Selberg 積分）として捉えることができる．もちろん，cusp 形式でない保型形式の周期であるので，積分の正則化の手続きが必要であり，実際にこの方法で概均質ベクトル空間の関数等式の理論を得ることは，きわめて面倒な仕事である（以上については，[S3]，特にその §5 を参照してください．また，周期積分の正則化について一般的な結果は [JLR] にある）．しかし，概均質ベクトル空間のゼータ関数が何らかの形で（trivial 表現のリフティングと関係した）保型形式から得られていると信ずる根拠を与えてくれる．

References

[GJ] R. Godement and H. Jacquet: "*Zeta functions of simple algebras*", Lecture Notes in Math. **260**, Springer-Verlag, 1972.

[GS] I. M. Gelfand and G. I. Shilov: *Generalized functions*, Vol. I, Academic Press, New York, 1964.

[JLR] H. Jacquet, E. Lapid, J. Rogawski: Periods of Automorphic forms, *Journal Amer. Math. Soc.* **12**(1999), 173–240.

[K^{2}MO^{2}T] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka: Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, *Ann. Math.* **107**(1978), 1–39.

[O] T. Oshima: Generalized Capelli identities and boundary value problems for $GL(n)$, in "*Structures of solutions of differential equations, Katata/Kyoto 1995*", Ed. M. Morimoto and T. Kawai, World Scientific, 307–335.

[PS] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis: L functions for the classical groups, notes prepared by J. Cogdell, in "*Explicit constructions of* *automorphic L-functions*", Lecture Notes in Math. **1254**, Springer-Verlag, 1987.

[S1] F. Sato: Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional equations, *Tôhoku Math. J.* **34**(1982), 437–483.

[S2] F. Sato: Eisenstein series on weakly spherical homogeneous spaces and zeta functions of prehomogeneous vector spaces, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **44**(1995), 129–150.

[S3] F. Sato, Eisenstein 級数と概均質ベクトル空間のゼータ関数, Rokko Lectures in Math. No.**2**, 神戸大学理学部数学教室, 1996.

[S4] F. Sato: Eisenstein series on weakly spherical homogeneous spaces of $GL(n)$, *Tôhoku Math. J.* **50**(1998), 23–69.

[S5] F. Sato: 概均質ベクトル空間と弱球等質空間, 第 45 回代数学シンポジウム報告集（2000, 九州大学）, 72–82.

[S6] F. Sato: Functional equations of prehomogeneous zeta functions and intertwining operators, *Proceedings of Japan-German Seminar*, September 2001.

[SK] M. Sato and T. Kimura: A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their invariants, *Nagoya Math. J.* **65**(1977), 1–155.

[SS] M. Sato and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. *Ann. of Math.* **100**(1974), 131–170.

[Sh] T.Shintani, On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, *J. Math. Soc. Japan* **24**(1972), 132–188.