数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 176-183

楕円曲線に附随する外モノドロミー表現とある種の Eisenstein 測度関数について

都立大・理 中村博昭 (Hiroaki Nakamura)
Department of Mathematics,
Tokyo Metropolitan Univerisity

§0. 外モノドロミー表現とは.

有理数体 $\mathbb{Q}$ を含む整閉整域 B を任意に固定し、そのスペクトラムを S とする。S 上の双曲型代数曲線の smooth な族 $f : C \to S$ が与えられたときに、基本群の完全系列

$$1 \to \pi_1(C_{\bar{x}}, \bar{y}) \to \pi_1(C, \bar{y}) \to \pi_1(S, \bar{x}) \to 1$$

が生じる。ここで $\bar{x}$ は S 上の任意の geometric point, $C_{\bar{x}}$ は C の $\bar{x}$ 上の geometric fiber とし, $\bar{y}$ は $C_{\bar{x}}$ 上にとった $\bar{x}$ の任意の持ち上げとする。ここから附随する外モノドロミー表現

$$\varphi_{C/S} : \pi_1(S, \bar{x}) \to \mathrm{Out}(\pi_1(C_{\bar{x}}, \bar{y}))$$

が定義される。双曲型代数曲線の連続的な変形 C/S のうち非自明な成分は、右辺の非可換だが有限生成な群の変換群の中に数論的基本群 $\pi_1(S)$ の像として大きく映し出されていると考えられる (遠アーベル哲学)。このことから幾何学的性質の群論的な意味づけが期待される。外モノドロミー表現の群論的な構造は、基点 $\bar{x}, \bar{y}$ の取り方に依存しないため、しばしば基点は略して書かれる。

S が体 k のスペクトラムの場合、$\pi_1(S) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ であり、$\varphi_{C/k}$ は外ガロア表現といわれる。とくに $C/k = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}/\mathbb{Q}$ の場合は、伊原康隆先生を中心に詳しく研究がされている ([I1-3] ほか多数)。特にこの場合、$\varphi_{C/k}$ のメタアーベル化を担う主要な対象として普遍ヤコビ和冪級数とよばれる高度に数論的な対象が [I1] で取り出された。そして、その係数として現れるガロア群の指標が、K 理論の円要素の l 進実現として知られていた Soule 指標と結びついたことを出発点として、１９８０年代後半からのさまざまな研究が行われた ([I2-3] やその文献などを参照されたい)。

筆者は、これらの理論を高種数の曲線の場合に移植することで、当時模索状態であった Grothendieck 予想 (cf. [NTM]) に対するヒントとすることを目論んだ。その過程で、$C/k =$ 楕円曲線ひく１点の場合を上智大の角皆宏氏とともに取り組んだ。そこでやはり、$\varphi_{C/k}$ のメタアーベル化を担うある基本的な冪級数表現に出会い、その係数を与えるガロア群の指標を楕円曲線に附随する不変量を用いて記述したのが [N1-2] である。この冪級数表現は、base が体でなくても同様に構成できるから、$E - \{O\}/S$ が普遍的な場合、即ち $S =$ "fine" j-line として楕円曲線の普遍族の場合を考えれば、もう少し幾何学的に具体的な不変量に結びつく可能性があった。１９９３年の冬に京都から城崎行きの列車に偶然乗り合わせた阪大の伊吹山先生から Dedekind 和との関連の可能性を示唆して頂いて以来様々な Dedekind 和について情報収集を行っていたが、１９９５年頃から徐々に Eisenstein 級数の周期積分を通じて一般化された Dedekind 和と結びつくことが分かってきた。他の方面の研究が重なっていたこともあり、この方面への取り組みはその後も遅々としていたが、最近になってようやく具体的な数値を入れての計算プログラムが都立大の

学生であった森本康彦氏の協力で計算機の上に載り、ささやかながら新しい展望が開けつつある。本稿では、以上の背景となっている理論的事項を幾らかまとめて報告する。数値実験については、簡単な例を紹介するにとどめる。

§1. 合同核上の測度関数 $\mathbb{E}$.

しばらくの間、$S = \mathrm{Spec}(B)$ は上記のように一般としておき、原点抜き楕円曲線の族 $E - \{O\}/S$ が、標準的に方程式 $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$ $(g_2, g_3 \in B, \Delta := g_2^3 - 27g_3^2 \in B^\times)$ で与えれているとする。以下しばしば $\Pi = \pi_1(E_{\bar{x}} \setminus O)$ とかく。これは楕円曲線マイナス原点の副有限基本群であり、適当な生成系を用いて $\Pi = \langle x_1, x_2, z \mid [x_1, x_2]z = 1\rangle$ と表示できる階数2の自由副有限群である。ここで $z = x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}$ としては原点の周りを一回りするループに対応するものがとれる(惰性群の生成元)。

§0 の基本完全系列

$$1 \to \Pi \to \pi_1(E \setminus O, \bar{y}) \to \pi_1(S, \bar{x}) \to 1$$

において、O-section の定義座標 $t = -2x/y$ から定まる section 準同型 $\pi_1(S) \to \pi_1(E\setminus O)$ を通じて, 外モノドロミー表現の持ち上げ

$$\tilde{\varphi} : \pi_1(S) \to \mathrm{Aut}(\Pi)$$

が得られる。この表現は、Π の中の惰性群 $\langle z\rangle$ を保ちそこへは円分指標で作用している。Π の位相群としての交換子群を Π', そのまた交換子群を Π'' とかく。

ここで、この表現のアーベル商 $\Pi^{ab} := \Pi/\Pi'$ は x_1, x_2 の像 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ で生成される free $\hat{\mathbb{Z}}$ 加群であり, φ から誘導されるモノドロミー表現

$$\varphi^{ab} : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}(\Pi^{ab}) = \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$$

は楕円曲線の等分点への作用(の射影極限)に他ならない。その核 $\pi_1(S_\infty)$ を $E - \{O\}/S$ の合同核ということにする。次の命題は、$\pi_1(S_\infty)$ が φ を通じてメタアーベル商 Π/Π'' に作用する様子を一本の2変数測度関数で記述できることを示している。今、Π'/Π'' は共役と自然な線形延長によって完備群環 $\hat{\mathbb{Z}}[[\Pi^{ab}]]$ 上の階数1の加群になるが, 生成元として z の像 $\bar{z} \in \Pi'/\Pi''$ が取れることに注意しておく。この状況で一般に次が成り立つ。

命題 1. 自由副有限群 $\Pi = \langle x_1, x_2, z \mid [x_1, x_2]z = 1\rangle$ の自己同型写像 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Pi)$ が *(1)* $\alpha(\langle z\rangle) = \langle z\rangle$, *(2)* アーベル化 Π/Π' には自明に作用する, という2条件を満たすとき, 唯一の元 $\mathbb{E}_\alpha \in \hat{\mathbb{Z}}[[\Pi^{ab}]]$ が存在して, 勝手な元 $x \in \Pi$ への α の作用が *up to* Π'' で次のように書ける:

$$\alpha(x)x^{-1} \equiv \big((\bar{x} - 1)\mathbb{E}_\alpha\big) \cdot \bar{z} \qquad \mathit{mod}\, \Pi''.$$

ここで $\bar{x}$ は x の Π^{ab} での像をあらわす。

簡単なチェックにより、$\alpha \mapsto \mathbb{E}_\alpha$ は加法的 (i.e.,$\mathbb{E}_{\alpha\beta} = \mathbb{E}_\alpha + \mathbb{E}_\beta$) な準同型であることが分かる。$\mathbb{E}$ の pro-l 版は S.Bloch の構成したものと同等である (cf. [T])。

§2. $\mathbb{E}$ の幾何学的不変量による表示.

楕円曲線の族 $E - \{O\}/S$ の状況で、合同核 $\pi_1(S_\infty)$ の一般の元 σ に対して, モノドロミー表現の持ち上げ $\tilde{\varphi}(\sigma) \in \mathrm{Aut}(\Pi)$ は命題1の α の仮定を満たすから, 対応して

$\mathbb{E}_\sigma \in \hat{\mathbb{Z}}[[\Pi^{ab}]]$ が定まる。$\Pi^{ab} \cong \hat{\mathbb{Z}}^2$ であるから、$\mathbb{E}_\sigma$ は副有限群 $\hat{\mathbb{Z}}^2$ 上の $\hat{\mathbb{Z}}$ 値測度とみなせる。そこで対応

$$\begin{aligned} \pi_1(S_\infty) &\longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]] \\ \sigma &\longmapsto \mathbb{E}_\sigma \end{aligned}$$

を楕円曲線族 E/S の幾何学的な不変量を用いて具体的に記述したいと考えるのが自然である。

ここで着目する不変量を記述するために、楕円曲線の N-等分点へのモノドロミー表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の核に対応するエタール被覆を S_N とする。Tate 加群の'座標' $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ を決めているから自然にレベル N のモジュラー曲線への射 $S_N \to X(N)$ がある。モジュラー曲線 $X(N^2)$ の上には、各組 $\mathbf{x} = (\frac{r_1}{N}, \frac{r_2}{N}) \in (\frac{\mathbb{Z}}{N})^2$ に対して

$$\theta_{\mathbf{x}}(\tau) = q_\tau^{6B_2(\frac{r_1}{N})} e^{12\pi i \frac{r_2}{N}(\frac{r_1}{N}-1)} \left[(1-q_z)\prod_{n\geq 1}(1-q_\tau^n q_z)(1-q_\tau^n q_z^{-1})\right]^{12},$$

という上半平面 $\tau \in \mathfrak{H}$ 上で無限積表示を持つカスプ点以外では正則な関数が知られている。(いわゆる Siegel 単数の 12 乗である。ここで $z = (r_1\tau + r_2)/N$, $B_2(T) = T^2 - T + \frac{1}{6}$)。自然な射 $S_\infty \to S_{N^2} \to X(N^2)$ によって $\theta_{\mathbf{x}}$ を引き戻した S_∞ 上の関数の累乗根関数のモノドロミーをとることで指標

$$\rho_{\mathbf{x}} : \pi(S_\infty) \to \hat{\mathbb{Z}}$$

が得られる。$\mathbf{x}$ が $\mathbb{Z}^2$ だけずれても $\theta_{\mathbf{x}}$ は 1 の累乗根をかけるだけであることと S_∞ の定数体が 1 の累乗根をすべて含んでいることに注意すると、$\pi_1(S_\infty)$ 上で $\rho_{\mathbf{x}}$ は $\mathbf{x} \bmod \mathbb{Z}^2$ で定まる指標である。

定理 1. 各 $\sigma \in \pi_1(S_\infty)$ に対して $\mathbb{E}_\sigma \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]$ を $\varprojlim_N \hat{\mathbb{Z}}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]$ の元とみなした時の第 N 成分を $\mathbb{E}_{\sigma,N} = \sum_{\mathbf{r}\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} e_{\sigma,N}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{r}$ とする。このとき係数は

$$e_{\sigma,N}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{12}\rho_{\mathbf{r}/N}(\sigma) & (\mathbf{r} \neq \mathbf{0}) \\ \frac{1}{12}\rho_\Delta(\sigma) - \rho_N(\sigma) & (\mathbf{r} = \mathbf{0}) \end{cases}$$

で与えられる。ここで $\rho_{\mathbf{r}/N}$ は $\mathbf{r} = N\mathbf{x}\ mod\ N$ を満たす任意の $\mathbf{x} \in (\frac{\mathbb{Z}}{N})^2$ に対する $\rho_{\mathbf{x}}$ を意味している。また ρ_Δ, ρ_N は $B^\times$ の元 $\Delta(= g_2^3 - 27g_3^2)$, N のそれぞれの累乗根に関する *Kummer* 指標である。

この定理の pro-l 版は [N1,3] で示した。簡単な読み替えで上のように profinite 版でも成立する。詳しい証明は [N5] を参照されたい。

§3. CSL_2 上の $\mathbb{E}$.

§1 の構成は、楕円曲線の moduli stack $M_{1,1}/\mathbb{Q}$ とその上の universal elliptic curve $E \to M_{1,1}$ に対しても適用できる。ここでは特に $S = M_{1,1} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ 上に制限して考える。すると $\pi_1(S)$ は自然に $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の副有限完備化と同一視され、合同核 $\pi_1(S_\infty)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})^\wedge \to \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ の核 CSL_2 となる。CSL_2 は、Melnikov 等の結果として、可算無限生成の自由副有限群であることが知られているが、具体的には次のように捉えることが出

来る。$\Gamma(N)\subset\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を主合同部分群、$P(N)\subset\Gamma(N)$ をモジュラー曲線 $X(N)$ 上のカスプ点たちに対応する惰性群で生成される正規部分群とする。このとき $\{\Gamma(N)/P(N)\}_N$ はレベル N について乗法的に全射射影系をなし、自然に $\mathrm{CSL}_2=\varprojlim_N(\Gamma(N)/P(N))^\wedge$ とみなせる。つまり CSL_2 の各元は曲がりなりにも 2×2 の整数行列の sequence としての表示をもつ。そこで §1 で構成した合同核上の測度関数 $\mathbb{E}:\mathrm{CSL}_2\to\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]$ を行列成分の言葉で具体的に記述する問題が生じる。今の場合、S_∞ の定数体が $\overline{\mathbb{Q}}$ であることと或る技術的理由から定理 1 において本質を失うことなく $e_{\sigma,N}(\mathbf{0})=0$ とすることができる。また $\mathbf{r}\neq\mathbf{0}$ の場合の $e_{\sigma,N}(\mathbf{r})$ は、$\theta_{\mathbf{r}/N}$ の累乗根関数に対する (σ に収束する) 行列 $A\in\Gamma(N^2)$ たちのモノドロミー作用で近似される。Kubert-Lang の本にあるような Siegel units の独立性から $\mathbb{E}$ の像は、完備群環 $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]$ の even ('$\mathbf{x}\leftrightarrow -\mathbf{x}$' の対称性をもつ) でかつ augmentation=0 の部分の多くを占めることは定性的に示せるが、もう少し定量的に計算する手段があることが望ましい。実際、$\theta_{\mathbf{x}}(\tau)$ の対数微分がレベル N, weight 2 の Eisenstein 級数であることから、上半平面上のある点 τ_0 から $A\tau_0$ までの道に沿った Eisenstein 級数の周期積分を計算することに帰着する。このようなものは古典的に計算されていて、後述するようにベルヌイ数やその組合せであるデデキント和で書き表される。

§4. $\mathbb{E}$ の l 進展開.

上記 profinite の文脈で述べて来たが、素数 l を決めて pro-l の文脈にしても平行な話が出来る。この場合、$\mathbb{E}$ の代わりにそれを $\mathbb{Z}_l[[\mathbb{Z}_l^2]]$ に射影した像 $\mathbb{E}^{(l)}$ を考える。このとき、定義域は $\pi_1(S_\infty)$ より少し大きな $\pi_1(S_{l^\infty})$ に取るなど、§1 の構成の幾つかの箇所における自然な読み替えについて、ここでは数え上げないが、$\mathbb{E}^{(l)}$ は l-合同核 $\mathrm{CSL}_2^{(l)}=\mathrm{Ker}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})^\wedge\to\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_l))$ から $\mathbb{Z}_l[[\mathbb{Z}_l^2]]$ への加法的準同型写像となる。基本群 Π の生成元 x_1,x_2 の pro-l アーベル化での像を $\bar{x}_1,\bar{x}_2$ とすると、このターゲットの環は $T_i=\bar{x}_i-1$ $(i=1,2)$ を可換な変数とする冪級数環 $\mathbb{Z}_l[[T_1,T_2]]$ と同型であり、$U_i:=\log(\bar{x}_i)$ $(i=1,2)$ を変数とする冪級数環 $\mathbb{Q}_l[[U_1,U_2]]$ に埋め込まれる。そこで、各 $\sigma\in\mathrm{CSL}_2^{(l)}$ に対して $\mathbb{E}_\sigma^{(l)}$ のテイラー展開を

$$\mathbb{E}_\sigma^{(l)}=\sum_{i,j=0}^{\infty}e_{ij}^{(l)}(\sigma)\frac{U_1^iU_2^j}{i!j!}$$

と書いたときの展開係数 $e_{ij}^{(l)}:\mathrm{CSL}_2\to\mathbb{Z}_l$ はどう記述できるであろうか? 上に述べた $\mathbb{E}_\sigma$ の対称性などから分かることは $e_{00}^{(l)}=0$, $i+j=odd$ ならば $e_{ij}^{(l)}=0$. 残りの係数の解析的な記述を与えるのが次の定理である。

その前に Eisenstein cocycle について復習する。偶数 $k\geq 4$ に対して weight k の Eisenstien 級数を

$$E_k(\tau):=\frac{(k-1)!}{(2\pi i)^k}\sum_{(m_1,m_2)}{}'\frac{1}{(m_1\tau+m_2)^k}$$

で定義する ($\tau\in\mathfrak{H}$)。ここで組 $(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$ 全体にわたる和である。よく知られているように、この E_k はモジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する weight k のモジュラー形式であり、$q=\exp(2\pi i\tau)$ について Fourier 展開するとき定数項 $-B_k/k$ を持つ。その Eichler 積分 (i.e.,$(k-1)$ 階不定積分) のひとつを

$$F_k(\tau)=-\frac{1}{(k-2)!}\int_\tau^{i\infty}(E_k(u)+\frac{B_k}{k})(\tau-u)^{k-2}du-\frac{B_k}{k}\frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!}$$

にとることができる。これの行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する変動幅:

$$\phi_k(A) := F_k(A\tau)(c\tau + d)^{k-2} - F_k(\tau)$$

は、$\tau \in \mathfrak{H}$ に関する $(k-2)$ 次の多項式になる。その各係数の実部のみを取り出したものを $Re\phi_k$ とすると実は $\mathbb{Q}$ 係数であることが知られている。そこで $Sym^{k-2}(\mathbb{Q}^2)$ を τ に関する $(k-2)$ 次多項式の空間として $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用を $f(\tau) \to f(A\tau)(c\tau+d)^{k-2}$ で入れておくと、Eisenstein 級数 E_k の Eichler-Shimura 対応物としての $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上の 1-cocycle $Re\phi_k : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to Sym^{k-2}(\mathbb{Q}^2)$ が得られる。それを

$$Re\phi_k(A) = \sum_{i+j=k-2} p_{ij}(A)\tau^i$$

とおく。この係数指標 $p_{ij} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}$ の l 進版 $p_{ij}^{(l)} : \mathrm{CSL}_2^{(l)} \to \mathbb{Q}_l$ を次のように導入できる。実際、$k(= i+j), l$ を固定するとき、自然数 A, B を十分大きくとれば

(1) $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow A \cdot p_{ij}(\sigma) \in \mathbb{Z}_l$
(2) $\sigma \in P(l^{n+B}) \Rightarrow A \cdot p_{ij}(\sigma) \in l^n\mathbb{Z}_l$

が成り立つようにできる。そこで $\Gamma(l^{n+B})/P(l^{n+B})$ 上の $(\mathbb{Z}_l/l^n\mathbb{Z}_l)$ 値の指標 '$A \cdot p_{ij} \bmod l^n$' を n について射影極限をとり, その結果を A で割ったものとして $p_{ij}^{(l)}$ を定義する。これは A, B のとり方によらずに定まる。

定理 2. 各 $\sigma \in \mathrm{CSL}_2^{(l)}$ に対して、$\mathbb{E}_\sigma^{(l)} = \sum_{i,j} e_{ij}^{(l)}(\sigma) U_1 U_2 / i!j!$ の展開係数は、

$$\frac{e_{ij}^{(l)}(\sigma)}{i!j!} = \begin{cases} p_{ij}^{(l)}(\sigma) & (i+j \geq 2,\ even), \\ 0 & (otherwise). \end{cases}$$

で与えられる。

§5. 定理 1 ⇒定理 2 の鍵となるある合同式.

定理 2 では weight $k \geq 4$ の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する Eisenstein 級数の Eichler-Shimura 積分から生じる cocycle を論じたが、定理 1 では、そこで述べたように合同部分群 $\Gamma(N)$ に関する weight 2 の Eisenstein 級数の積分の情報がこめられている。そこで両者を結びつけるためには、もう少し一般に偶数 $k \geq 2$ と組 $\mathbf{x} = (r_1/N, r_2/N) \in (\frac{\mathbb{Z}}{N})^2$ (但し $k = 2$ のときは $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ とする) に対して定義される、Eisenstien 級数

$$E_k^{(\mathbf{x})}(\tau) := \frac{(k-1)!}{(2\pi i)^k} \sum_{\mathbf{a} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} e^{2\pi i(r_1 a_2 - r_2 a_1)/N} \sum_{\mathbf{m} \equiv \mathbf{a}(N)}{}' \frac{1}{(m_1\tau + m_2)^k}$$

を考える ($\tau \in \mathfrak{H}$)。ここで $\sum'$ は、$m_1 \equiv a_1$, $m_2 \equiv a_2 \pmod N$ を満たす組 $\mathbf{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 全体にわたる和である。これについて $Sym^{k-2}(\mathbb{Q}^2)$ に値を持つ cocycle が Eichler-Shimura 積分で $\Gamma(N)$ 上定義されるが、それは適切な意味で $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ やさらに $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ 上の cocycle にまでの延長が研究されている (e.g., Sczech [Scz])。延長さ

れていると様々な formation に関する研究に便利であるが、ここでは簡単のため $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 上における Rademacher 関数 (の一般化の一種)

$$\Phi_{\mathbf{x}}^{(k)} : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Q}^2) = \mathbb{Q}[X,Y]_{\deg=k-2}$$
$$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \sum_{r=0}^{k-2} \Phi_{\mathbf{x}}^{(r+1,k-1-r)}(A) X^r Y^{k-2-r}$$

を考えよう。これは $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ を $c \geq 0$ となるように $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に取るとき、次のように与えられる。

$$\Phi_{\mathbf{x}}^{(k)}\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{cases} -\frac{P_k(r_1/N)}{k} \int_0^{\frac{b}{d}} (tX+Y)^{k-2} dt, & (c=0); \\ -\frac{P_k(r_1/N)}{k} \int_0^{\frac{a}{c}} (tX+Y)^{k-2} dt & \\ -\frac{P_k((ar_1+cr_2)/N)}{k} \int_{-\frac{d}{c}}^0 (t(aX+cY)+bX+dY)^{k-2} dt & \\ +\sum_{r=0}^{k-2} (-1)^r \binom{k-2}{r} X^r (aX+cY)^{k-2-r} s_{\mathbf{x}}^{(k-1-r,r+1)}(a,c), & \\ & (c>0). \end{cases}$$

上の定義式の最後に現れる因子 $s_{\mathbf{x}}^{(k-1-r,r+1)}(a,c)$ が古典的な Dedekind 和の一般化の一種を与えている:

$$s_{\mathbf{x}}^{(k-1-r,r+1)}(a,c) = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{P_{k-1-r}(\frac{r_1/N+i}{c})}{k-1-r} \frac{P_{r+1}(r_2/N + a\frac{r_1/N+i}{c})}{r+1}.$$

(ここで $P_k(T)$ は周期的ベルヌイ多項式とする。) 定理 1 と定理 2 を結びつける合同式は次のように述べられる。

補題. N, r, k を $N \geq 1,\ k \geq 2,\ 0 \leq r \leq k-2$ を満たす自然数とし、$\mathbb{Z}'_N \subset \mathbb{Q}$ を分母が N と互いに素な有理数のなす環とする。この時、k, r のみから定まる自然数 $D_{k,r}$ が存在して任意の $A \in \Gamma(N)$ に対して合同式

$$\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \binom{k-2}{r} x^{k-2-r} (-y)^r \Phi_{(\frac{x}{N},\frac{y}{N})}^{(1,1)}(A) \equiv \Phi_{\mathbf{0}}^{(r+1,k-1-r)}(A)$$
$$\mod \binom{k-2}{r} \frac{N}{12 D_{k,r}} \mathbb{Z}'_N.$$

が成立する。

この補題の中に現れる $D_{k,r}$ はベルヌイ多項式の係数などからなる有限個の有理数の共通分母として与えることができる ([N4])。この補題は、$r = k-2$ のときを筆者が示し、一般の場合を定数倍を除いた作業仮説として修士の学生であった森本康彦氏に提示した。森本氏 ([M]) は連分数を利用したアルゴリズムに基づく数値実験によって未確定の定数が

2 項係数 $\binom{k-2}{r}$ であろうと予想した。さらに森本氏は [M] の中で、この予想のもとで k を決めて r を動かしたとき、補題が

$$\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}(xY-yX)^{k-2}\Phi^{(1,1)}_{(\frac{x}{N},\frac{y}{N})}(A)\equiv\Phi_0^{(k)}(A)(X,Y)$$

の形にまとまることも氏の予想の信憑性を裏付けていることを確認している。厳密な証明はベルヌイ多項式に関する合同式を初等的に組み合わせることでまもなく得られた ([N4])。$N=l^m$ のとき、補題の左辺のモーメント和が $\mathbb{E}^{(l)}_\sigma$ のテイラー展開係数に対応し、右辺が Eisenstein 級数 $E_k(\tau)$ の周期積分に相当する。そこで、展開係数と云わずに、モーメント和に関する主張にすれば、定理 2 を profinite 版の $\mathbb{E}_\sigma$ についての主張に焼き直すことは容易である。

最後に簡単な数値例を紹介する。行列 A として $A=\begin{pmatrix}122 & -4961\\ 363 & -14761\end{pmatrix}\in\Gamma(11^2)$ をとり, $k=6$, $N=11$ のときに上の合同式を検証しよう。今の場合、$0\le r\le 4$ に依らず $\binom{4}{r}\frac{11}{12D_{4,r}}\mathbb{Z}'_{11}=11\mathbb{Z}'_{11}$ である。右辺 (Eichler-Shimura 積分の実部に相当) は

$$\begin{aligned}\Phi_0^{(6)}(A)(X,Y)=&\frac{6157810527168637}{315}X^4+\frac{117260782677249595}{504}YX^3\\&+\frac{37381997569467617}{36}Y^2X^2+\frac{5190578682530622937}{2520}Y^3X\\&+\frac{1930511018334372017}{1260}Y^4\end{aligned}$$

であり、左辺のモーメント和は

$$\begin{aligned}\sum_{x,y=0}^{10}(xY-yX)^4\Phi^{(1,1)}_{(\frac{x}{11},\frac{y}{11})}(A)=&\frac{157339}{6}X^4+\frac{717205}{6}Y^4-\frac{230146}{3}Y^3X\\&+\frac{557102}{3}YX^3-102157Y^2X^2\end{aligned}$$

となる。これらはいずれも X^2Y^2 以外の項の係数は 11 と互いに素である。
ここで (右辺) $-$ (左辺) を計算すると

$$\begin{aligned}&\Phi_0^{(6)}(A)(X,Y)-\sum_{x,y=0}^{10}(xY-yX)^4\Phi^{(1,1)}_{(\frac{x}{11},\frac{y}{11})}(A)\\&=\frac{12315621037816679}{630}X^4+\frac{117260782583656459}{504}YX^3\\&\quad+\frac{37381997573145269}{36}Y^2X^2+\frac{5190578682723945577}{2520}Y^3X\\&\quad+\frac{1930511018183758967}{1260}Y^4\\&\equiv 0\mod 11\mathbb{Z}'_{11}.\end{aligned}$$

REFERENCES

[I1] Y.Ihara, *Profinite braid groups, Galois representations, and complex multiplications*, Ann. of Math. **123** (1986), 43–106.

[I2] Y.Ihara, *Braids, Galois groups and some arithmetic functions*, Proc. ICM, Kyoto (1990), 99–120.

[I3] Y.Ihara, *On beta and gamma functions associated with the Grothendieck-Teichmüller group*, Aspects of Galois Theory (H.Völklein, D.Harbater, P. Müller, J.G. Thompson, eds.), London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 256, 1999, pp. 144–179.

[M] Y.Morimoto, *Arithmetic behavior of functions related with generalized Dedekind sums (in Japanese)*, Master Thesis, Tokyo Metropolitan University, January 2002.

[N1] H.Nakamura, *On exterior Galois representations associated with open elliptic curves,*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (1995), 197–231..

[N2] ______, *Galois representations in the pro-l fundamental groups of punctured elliptic curve*,「モジュライ空間、ガロア表現およびＬ関数」数理解析研究所講究録, vol. 884, 1994, pp. 46–53.

[N3] ______ Tangential base points and Eisenstein power series, Aspects of Galois Theory (H.Völkein, D.Harbater, P.Müller, J.G.Thompson, eds.), London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 256, 1999, pp. 202–217.

[N4] ______, *Generalized Rademacher functions and some congruence properties*, in preparation.

[N5] ______, *On exterior monodromy representations associated with affine elliptic curves*, in preparation.

[NTM] H.Nakamura, A.Tamagawa, S.Mochizuki, *On Grothendieck conjecture on the fundamental groups of algebraic curves*, Sugaku Expositions **14** (2001), 31–53.

[Scz] R.Sczech, *Eisenstein cocycles for $GL_2\mathbb{Q}$ and values of L-functions in real quadratic fields*, Comment. Math. Helvetici **67** (1992), 363–382.

[T] H.Tsunogai, *On the autormorphism group of a free pro-l meta-abelian group and an application to Galois representations*, Math. Nachr. **171** (1995), 315–324.