数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 184-198

保型形式の P 進 L 関数と K_2 COLEMAN 巾級数

東大数理　　深谷　太香子 (TAKAKO FUKAYA)
(学術振興会特別研究員 PD)
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
UNIVERSITY OF TOKYO
(JSPS RESEARCH FELLOW PD)

CONTENTS

1. 序

p を素数とする．Riemann ゼータ関数には，その負の整数での値を補間して得られる p 進解析関数が存在する．これを p 進 Riemann ゼータ関数という．一般に p 進ゼータ (L) 関数とは，対応する複素ゼータ関数の特殊値を補間する p 進解析関数であり，p 進ゼータ関数が存在する事は，もとの複素ゼータ関数の特殊値が p 進的な強いつながりを持つ事を意味する．そしていくつかのゼータ関数に対し p 進ゼータ関数の存在が知られている．

本稿の目的は，その p 進ゼータ関数の一つであり，modular symbol 等の方法により既に構成されている保型形式の p 進ゼータ関数（1変数のものと ordinary な保型形式の族に対応する2変数のものの両方) の新たな構成法を「K_2 版 Coleman 巾級数の理論」を用いて与える事である．この方法は p 進 Riemann ゼータ関数の場合に,「Coleman 巾級数の理論」に「円単数の系」を適用する事で p 進 Riemann ゼータ関数を得る，という岩澤健吉氏

著者は日本学術振興会に援助をしていただいております（特別研究員 PD).

等の方法を高次元化する方法である．特長は，保型形式のゼータ関数の特殊値の有理性などの考察をする必要無しに保型形式の p 進ゼータ関数が得られる事である．

この研究について発表の機会を下さった事に感謝申し上げます．

2. 保型形式の p 進ゼータ関数の復習

重み $k \geq 2$ の normalized eigen cusp form $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n$ に対し，f の p 進ゼータ関数とは，$L(f,\psi,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\psi(n)n^{-s}$ とする時，$L(f,\psi,r)$，ψ はある $m \geq 0$ について conductor p^m の Dirichlet 指標，$1 \leq r \leq k-1$，らを補間する p 進解析関数である．これら保型形式の p 進ゼータ関数はこれまで modular symbol 等の方法で構成されている．

この章では保型形式の p 進ゼータ関数の理論について簡単に復習をする．詳しくは Amice-Vélu [AV], Vishik [Vi] 等を参照されたい．

2.1. 以下では $N \geq 1$ を p と素な整数とする．k, t を $k \geq 2$，$t \geq 0$ を満たす整数と各々し，

$$\epsilon : (\mathbb{Z}/Np^t\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

を指標とする．normalized eigen cusp form

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_k(X_0(Np^t);\epsilon)$$

に対し，$L(f,s)$ をそのゼータ (L) 関数

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)n^{-s} = \prod_{l:\mathrm{prime}} (1 - a_l(f)l^{-s} + \epsilon(l)l^{k-1-2s})^{-1}$$

とする．

$K = \mathbb{Q}(a_n(f); n \geq 1)$ とおき，λ を K の素点で p の上にあるものとして，これを固定する．更に K_λ を K の λ での完備化とする．

2.2. 次の条件 (*) が成立する時，f の p 進ゼータ関数が存在する．

(*) 元

$$\alpha \in \overline{K_\lambda}^\times$$

で，次の (i)(ii) の条件を満たすものが存在する．

(i) $v_p(p) = 1$ と正規化された付値 $v_p : \overline{K_\lambda}^\times \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し，

$$v_p(\alpha) < k - 1.$$

(ii)

$$1 - \alpha p^{-s} \quad | \quad (p\text{-factor of } L(f,s))^{-1} \qquad \text{in } \overline{\mathbb{Q}_p}[p^{-s}].$$

この時各 α に対し，f の p 進ゼータ関数

$$L_{p\text{-adic}}(f)_\alpha \in H_{K_\lambda(\alpha),k-1}$$

が存在する事が知られている．

2.3. f の p 進ゼータ関数の属する空間について復習する．

2.3.1.

$$G_\infty = \mathrm{Gal}(\bigcup_{n\geq 1} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p)$$

とおく．ここに ζ_{p^n} は 1 の原始 p^n 乗根である．G_∞ は標準的に $\mathbb{Z}_p^\times$ に同型であるが，元 $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対応する G_∞ の元を g_a と書く．また Δ を G_∞ の torsion part とする．更に u という $p \neq 2$ の時 (resp. $p = 2$ の時)，$1 + p\mathbb{Z}_p$ (resp. $1 + 4\mathbb{Z}_2$) の位相的生成元を一つ取り，固定する．

2.3.2. $F = K_\lambda(\alpha)$ とおき，O_F をその整数環とする．$i \in \mathbb{Z}, i \geq 1$ に対し，空間 $H_{F,i}$ が次のように定義される．

$$H_{F,i} = \{\sum_{\substack{n\geq 0\\ a\in\Delta}} c_{n,a} \cdot g_a \cdot (g_u - 1)^n \in F[\Delta][[g_u - 1]]$$

$$; \lim_{n\longrightarrow\infty} |c_{n,a}|_p n^{-i} = 0 \text{ for all } a \in \Delta\}.$$

この空間 $H_{F,i}$ は u の取り方によらない．

$$O_F[[G_\infty^{(2)}]] \otimes_{O_F} F \subset H_{F,1} \subset H_{F,2} \subset H_{F,3} \subset \cdots$$

が成立する．

2.3.3. 空間 $H_{F,i}$ の元の特徴付けを述べる．

$j \in \mathbb{Z}$ に対し，指標 χ_{cyclo}^j を

$$\chi_{\mathrm{cyclo}}^j : G_\infty \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times \ ; \ g_a \mapsto a^j \quad (a \in \mathbb{Z}_p^\times)$$

と定義する．

ψ を，ある $m \geq 0$ に対し，conductor が p^m の Dirichlet 指標とする．

$\mu = \sum_{\substack{n\geq 0\\ a\in\Delta}} c_{n,a} \cdot g_a \cdot (g_u - 1)^n \in H_{F,i}$ について，

$$\mu(\chi_{\mathrm{cyclo}}^j \psi) = \sum_{\substack{n\geq 0\\ a\in\Delta}} c_{n,a} \cdot a^j\psi(a) \cdot (a^j\psi(a) - 1)^n$$

と定義する時，μ は互いに相異なる i 個の整数 j と有限個を除いたすべての conductor が p^m $(m \geq 0)$ の Dirichlet 指標 ψ について，$\mu(\chi_{\mathrm{cyclo}}^j \psi)$ らにより特徴付けられる．

2.4. $L_{p\text{-adic},\alpha}(f)$ の性質について述べる．

2.4.1. 2.2 の設定において，$h \in \mathbb{Z}$, $1 \leq h \leq k-1$ に対して，$v_p(\alpha) < h$, が成り立つ時，

$$L_{p\text{-adic},\alpha} \in H_{F,h}$$

となる事が知られている．

更に $v_p(\alpha) = 0$ の場合は，

$$L_{p\text{-adic},\alpha} \in O_F[[G_\infty]] \otimes_{O_F} F$$

が知られている．

因みに p 進 Riemann ゼータ関数 $\zeta_{p-\mathrm{adic}}$ については

$$\zeta_{p-\mathrm{adic}} \in Q(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]),$$

ここに$Q(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])$は$\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$の全商環，が成り立つ．

2.4.2. 2.3.3に述べた意味で，$L_{p\text{-adic},\alpha}(f)$は次のように特徴付けられる．

(i) $\psi : (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ の conductor がp^m $(m \geq 1)$の時．

$\pm = (-1)^{k-r-1}\psi(-1)$とおく．この時，$1 \leq r \leq k-1$，　に対し，

$$\begin{aligned} &L_{p\text{-adic},\alpha}(f)(\chi^r_{\mathrm{cyclo}}\psi^{-1}) \\ &\quad = (r-1)! \cdot p^{mr}\alpha^{-m} \cdot G(\psi, \zeta_{p^m})^{-1} \cdot (2\pi i)^{k-r-1} \\ &\qquad \cdot \frac{1}{\Omega(f)_\pm} \cdot L(f, \psi, r), \end{aligned}$$

となる．ここに$G(\psi, \zeta_{p^n})^{-1}$はGauss和$\sum_{x \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \psi(x)\zeta^x_{p^n}$であり，$L(f, \psi, r)$は関数$L(f, \psi, s) = \sum_{i=1}^\infty a_i(f)\psi(i)i^{-s}$の$s = r$での値である．また$\Omega(f)_+$，$\Omega(f)_- \in \mathbb{C}^\times$はperiodである．

(ii) $\pm = (-1)^{k-r-1}$とおく．$1 \leq r \leq k-1$に対し，

$$\begin{aligned} &L_{p\text{-adic},\alpha}(f)(\chi^r_{\mathrm{cyclo}}) \\ &\quad = (r-1)! \cdot (2\pi i)^{k-r-1} \cdot \frac{1}{\Omega(f)_\pm} \\ &\qquad \cdot (1 - p^{r-1}\alpha^{-1})(1 - \epsilon(p)p^{k-r-1}\alpha^{-1}) \cdot L(f, r) \end{aligned}$$

となる．

3. p進 RIEMANN ゼータ関数と COLEMAN 巾級数の理論について (復習)

この章では，実質的に岩澤健吉氏によって与えられた，Coleman 巾級数の理論を用いたp進 Riemann ゼータ関数の構成法について簡単に復習する．本稿の主結果はこの方法を応用して保型形式のp進ゼータ関数を得る事である．

3.1. 久保田, Leopoldt 両氏により得られたp進 Riemann ゼータ関数$\zeta_{p-\mathrm{adic}}$とは，$\zeta(r)$，$r < 0$を補間するp進解析関数で, 2章で触れたように$Q(\mathbb{Z}_p[[G_\infty]])$の元である．

この$\zeta_{p-\mathrm{adic}}$の Coleman 巾級数を用いた構成について振り返る．まず Coleman 巾級数について復習する．

Coleman 巾級数の理論とはColeman氏 [Co] により与えられた理論で，norm 写像による乗法群の逆系を巾級数 $\mathbb{Z}_p[[\varepsilon-1]]$ で捉える以下の結果である．

定理 3.2 ([Co]). 1の原始 p^n 乗根の *norm* 系 $(\zeta_{p^n})_n$ を取り固定する．この時乗法群の間の群同型が次のように存在する．

$$(\mathbb{Z}_p[[\varepsilon-1]]^\times)^{\mathrm{N}=1} \xrightarrow{\cong} \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}]^\times \quad ;$$

$$f(\varepsilon) \mapsto (f(\zeta_{p^n}))_n.$$

ここに右辺の逆極限は乗法群の *norm* 写像によるものである．左辺の $(\mathbb{Z}_p[[\varepsilon-1]]^\times)^{\mathrm{N}=1}$ は φ の *norm* N が1で作用する $\mathbb{Z}_p[[\varepsilon-1]]^\times$ の部分群である．ここで

$$\mathrm{N} : \mathbb{Z}_p[[\varepsilon-1]]^\times \longrightarrow \mathbb{Z}_p[[\varepsilon-1]]^\times$$

は環準同型

$$\varphi : \mathbb{Z}_p[[\varepsilon-1]] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[[\varepsilon-1]] \ ; \ f(\varepsilon) \mapsto f(\varepsilon^p)$$

に伴って乗法群にもたらされる *norm* 写像である．

3.3. Coleman 巾級数の理論を用いて p 進 Riemann ゼータ関数を得る方法について簡単に述べる．

Coleman 巾級数の理論を用いて定義されるある合成写像

$$\varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}]^\times \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}_p[[\varepsilon-1]]^\times)^{\mathrm{N}=1} \longrightarrow \mathbb{Z}_p[[G_\infty]] \tag{3.1}$$

を考察する事が鍵となる．ここで最初の同型射が Coleman 巾級数の理論により与えられるものであり，次の写像はある自然な写像である．([Fu3] 等を参照．) ここにその定義は述べないが，この写像の類似を辿り得られる，保型形式の p 進ゼータ関数の場合に用いられる写像の方は次の章でその定義を述べる．

ここで整数 c で $(c,p)=1$ を満たすものを取り，円単数の系を

$$\left(\frac{1-\zeta_{p^n}^c}{1-\zeta_{p^n}}\right)_n \in \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}]^\times$$

と定義する．

合成 (3.1) により，円単数の系は

$$(\frac{1-\zeta_{p^n}^c}{1-\zeta_{p^n}})_n \mapsto (1-g_c)\zeta_{p\text{-adic}}$$

と，p 進 Riemann ゼータ関数を導く．

こうして Coleman 巾級数の理論を用いて自然に定義された写像に，円単数の系という zeta element を適用する事で，p 進 Riemann ゼータ関数 $\zeta_{p\text{-adic}}$ が得られた．

4. 保型形式の p 進ゼータ関数と K_2COLEMAN 巾級数 (主結果)

3 章で復習した理論の類似を辿り保型形式の p 進ゼータ関数を得る．鍵となるのは後に述べる K_2Coleman 巾級数の理論である．

4.1.

$$O_{\mathsf{H}} = \varprojlim_n (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[[q]][1/q])$$

とおく．ここに q は変数である．O_{H} は混標数 $(0,p)$ をもつ完備離散付値体 $\mathsf{H} = O_{\mathsf{H}}[1/p]$ の整数環である．この完備離散付値環は p を素元とし，剰余体 $\mathsf{k} = \mathbb{F}_p((q))$ が $[\mathsf{k} : \mathsf{k}^p] = p$ を満たす非完全体となる．

各 $n \geq 1$ に対し，q の p^n 乗根 q^{1/p^n} をある H の代数閉包 $\overline{\mathsf{H}}$ の中に $(q^{1/p^{n+1}})^p = q^{1/p^n}$ を満たすように取り固定する．1 の原始 p^n 乗根の norm 系 $(\zeta_{p^n})_n$ も取り固定する．更に $\mathsf{H}_n = \mathsf{H}(\zeta_{p^n}, q^{1/p^n})$ とおく．O_{H_n} をその整数環とする．

4.2. 環 A と 0 以上の整数 i に対し代数的 K 群と呼ばれるアーベル群 $K_i(A)$ (Quillen [Qu]) が定義される．

$A = \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}]$ や $A = \mathbb{Z}_p[[\varepsilon - 1]]$ の場合 $K_1(A) = A^\times$ となる事から，定理 3.2 は K_1 版の Coleman 巾級数の理論とみなす事ができる．

つまり混標数 $(0,p)$ をもつ完備離散付値体の剰余体 k が $[k : k^p] = p^i$ $(i \geq 0)$ を満たせば，K_{i+1} 群が適している，という思想である．

4.3. K_2Coleman 巾級数について結果を述べるための準備をする．

O_{H} 上の形式巾級数環 $O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]$ に対し，準同型

$$\sigma : O_{\mathsf{H}} \longrightarrow O_{\mathsf{H}}$$

を次の (i)(ii) で特徴付けられるものとして定義する．

(i) modulo (p) をする事で導かれる準同型

$$\sigma : \mathsf{k} \longrightarrow \mathsf{k}$$

は p 乗写像に一致する．

(ii)

$$\sigma(q) = q^p.$$

更に連続準同型

$$\varphi : O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]] \longrightarrow O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]],$$

を次のように特徴付けられるものとして定義する: φ の O_{H} への制限は σ に一致する．更に

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^p$$

を満たす．

この環準同型 φ によって K_2 群の間に norm 写像

$$\mathrm{N} : K_2(O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]) \longrightarrow K_2(O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]])$$

が導かれる．

定理 4.4 ([Fu1])．標準群同型が次の様に存在する．

$$\hat{K}_2(O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]])^{\mathrm{N}=1} \xrightarrow{\cong} \varprojlim_n \hat{K}_2(O_{\mathsf{H}_n}).$$

各 K_2 群に対し，$\hat{K}_2$ はある種の完備化をあらわす．（この完備化については [Fu1] を参照されたい．）右辺の逆極限 $\varprojlim_n \hat{K}_2(O_{\mathsf{H}_n})$ は K_2 群の *norm* 写像

によって与えられる．左辺の $\hat{K}_2(O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]])^{\mathrm{N}=1}$ は φ の *norm* N が 1 で作用する $\hat{K}_2(O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]])$ の部分群である．更に群同型は，環準同型 $(n\geq 1)$

$$(4.1) \qquad O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]] \longrightarrow O_{\mathsf{H}_n}\ ;\ f(\varepsilon)\mapsto(\sigma^{-n}f)(\zeta_{p^n})$$

$(f(\varepsilon)\in O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]])$ より導かれる K_2 群の準同型によって与えられる．ここに σ^{-n} は次によって特徴付けられる環準同型 $O_{\mathsf{H}}\ \to\ O_{\mathsf{H}(q^{1/p^n})}$ である：$\sigma^{-n}(q)=q^{1/p^n}$，また導かれる準同型 $\sigma^{-n}:\mathsf{k}\to\mathsf{k}(q^{1/p^n}\bmod (p))$ は p^n 乗写像 $\sigma^n:\mathsf{k}(q^{1/p^n}\bmod (p))\xrightarrow{\cong}\mathsf{k}$ の逆写像である．

定理 4.4 は定理 3.2 の K_2 版, になっている事が写像(4.1) を定理 3.2 の写像と比較する事によってわかる．

4.5. 保型形式の p 進ゼータ関数の構成について述べる．簡単のため 2 章の記号で，$N=1$ の場合についてのみ述べる．以下では $N=1$ とする．

整数 $c,d\geq 1$ で $(c,6p)=(d,6p)=1$ を満たすものを取る．加藤和也氏により Beilinson elements の norm 系と言う重要な元

$$({}_{c,d}z_{p^n,p^n})_n\in\varprojlim_n K_2(Y(p^n,p^n))$$

([Ka]) ([Sc] にも定義が掲載されている）が定義されている．この元が今回，3 章での cyclotomic elements に代わる役割を果たす．

ここで $G_\infty=\mathbb{Z}_p^\times$ とおく．そしてアーベル群 A に対し $A[[G_\infty]]$ を $\varprojlim_n A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbb{Z}[(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times]$ とする．また便宜上 $a\in\mathbb{Z}_p$ に対し，対応する G_∞ の元を g_a と表す．

ある自然な写像

$$\varprojlim_n \hat{K}_2(Y(p^n,p^n))\longrightarrow\varprojlim_n\hat{K}_2(\mathsf{H}_n)[[G_\infty]]$$

が存在し（[Fu1] 参照)，そして Beilinson elements の norm 系 $({}_{c,d}z_{p^n,p^n})_n$ の像は $\varprojlim_n\hat{K}_2(O_{\mathsf{H}_n})[[G_\infty]]$ に含まれる事が示される．この像を同じく $({}_{c,d}z_{p^n,p^n})_n$ と書いて，これを我々の場合の重要な元とし，(3.1) の類似を辿り定義される合成写像によるこの元の像を考察する．

4.6. (3.1) の類似を辿り，K_2 版 Coleman 巾級数を用いて次のように合成写像を与える．

$S = O_{\mathsf{H}}[\varepsilon - 1]]$ とおく．

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} : \varprojlim_n \hat{K}_2(O_{\mathsf{H}_n})[[G_\infty]] &\xrightarrow{\cong} \hat{K}_2(S)^{\mathrm{N}=1}[[G_\infty]] \\ &\xrightarrow{d\log} \Omega^2_S[[G_\infty]] = S \cdot d\log(q) \wedge d\log(\varepsilon)[[G_\infty]] \\ &\xrightarrow{\cong} S[[G_\infty]] \\ &\longrightarrow O_{\mathsf{H}}[[G_\infty]][[G_\infty]]\end{aligned}$$

最初の同型は定理4.4によるものである．また Ω^2_S は, 絶対微分形式の加群 $\Omega^1_{S/\mathbb{Z}}$ と $\Omega^2_{S/\mathbb{Z}} = \bigwedge^2_S \Omega^1_{S/\mathbb{Z}}$ に対し，

$$\Omega^2_S = \varprojlim_n \Omega^2_{S/\mathbb{Z}}/p^n\Omega^2_{S/\mathbb{Z}}$$

である．写像 $d\log$ は

$$\{a, b\} \mapsto \frac{da}{a} \wedge \frac{db}{b}$$

$(a, b \in S^\times)$, $\{a, b\}$ は symbol, で特徴付けられる写像である．最後の写像は

$$\varepsilon^a \mapsto \begin{cases} a^{-1}g_a & \text{if } (a,p) = 1 \\ 0 & \text{if } (a,p) \neq 1 \end{cases}$$

に伴う O_{H}-加群の準同型である．

4.7. 像 $\mathfrak{L}(({}_{c,d}z_{p^n,p^n})_n)$ はおよそ次のような形になる．

$$\begin{aligned}&(1 - g_{c,2})(1 - g_{d,1}) \\ &\quad \cdot \Big(\sum_{\substack{i \geq 1 \\ (i,p)=1}} \sum_{j \geq 1} q^{ij} g_{i,1} + \zeta_{p\text{-adic},1} \Big)\Big(\sum_{\substack{l \geq 1 \\ (l,p)=1}} \sum_{m \geq 1} q^{lm} g_{l,2} + \zeta_{p\text{-adic},2} \Big).\end{aligned}$$

ここで，$a, b \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対し，$g_{a,1}$ (resp. $g_{b,2}$) は対応する第1 (resp.2) の G_∞ の元であり，$\zeta_{p\text{-adic},1}$ (resp. $\zeta_{p\text{-adic},2}$) は第1の (resp. 第2の)G_∞ に対する p 進 Riemann ゼータ関数である．

この像の詳しい形については [Fu2] に述べたい.

この様に, $\mathfrak{L}((_{c,d}z_{p^n,p^n})_n)$ は (Λ 進 Eisenstein 級数)×(Λ 進 Eisenstein 級数) の形になっている. ([Hi3] 参照.)

この様に像自体は p 進ゼータ関数ではないが, これは保型形式の p 進ゼータ関数を生み出す保型形式になっている.

4.8. $G_\infty^{(1)} = G_\infty^{(2)} = G_\infty = \mathbb{Z}_p^\times$ とする. 像 $\mathfrak{L}((_{c,d}z_{p^n,p^n})_n)$ より下の様にして導かれる元を universal zeta modular form

$$z_{p^\infty}^{\mathrm{univ}} \in O_{\mathsf{H}}[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}]$$

と呼ぶ. ここに $g \in \mathbb{Z}_p[[G_\infty^{(1)}]]$ はある非零因子である. universal zeta modular form は次のように特徴付けられる:

写像

$$O_{\mathsf{H}}[[G_\infty \times G_\infty]] \xrightarrow{\cong} O_{\mathsf{H}}[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]]\ ;$$

$$x g_{a,1} g_{b,2} \mapsto x g_b^{(1)} g_{ab^{-1}}^{(2)}$$

($x \in O_{\mathsf{H}}$, $g_a^{(1)} \in G_\infty^{(1)}$, $g_b^{(2)} \in G_\infty^{(2)}$), による $\mathfrak{L}((_{c,d}z_{p^n,p^n})_n)$ の像が

$$(1 - g_c^{(1)})(1 - g_{c^{-1}d}^{(2)}) z_{p^\infty}^{\mathrm{univ}}$$

となる.

主結果は, この universal zeta modular form $z_{p^\infty}^{\mathrm{univ}}$ が保型形式の p 進ゼータ関数を生むという定理4.11である. この定理を述べるための準備をする.

4.9. $\overline{M}_{p^\infty}$ を level p^∞ の p 進保型形式の空間とする ([Hi1]). この空間は重みによらない空間である. そして q 展開により $\mathbb{Z}_p[[q]]$, 従って O_{H} に埋め込まれる.

H_{p^∞} を $\overline{M}_{p^\infty}$ に作用する Hecke 作用素のなす環とする. これも重みによらないものとなる. また $H_{p^\infty}^{\mathrm{ord}}$ を H_{p^∞} の ordinary part とする. (ordinary については [Hi1] 参照.)

ここで $G_\infty^{(1)}$ を $\overline{M}_{p^\infty}$ に作用する diamond 作用素のなす群, $G_\infty^{(2)} = \mathrm{Gal}(\bigcup_{n\geq 1} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p)$ と定義する.

命題 4.10 .

$$z_{p^\infty}^{\mathrm{univ}} \in \overline{M}_{p^\infty}[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}],$$

ここに $g \in \mathbb{Z}_p[[G_\infty^{(2)}]]$ は4.8の非零因子である.

定理 4.11 ([Fu2]). *universal zeta modular form* $z_{p^\infty}^{\mathrm{univ}}$ は, *universal ordinary p-adic L function*

$$L_{p\text{-}adic}^{\mathrm{ord,univ}} \in H_{p^\infty}^{\mathrm{ord}}[\frac{1}{h}][[G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}]$$

という次の性質 (P) を満たすものを生み出す. ここに $h \in H_{p^\infty}^{\mathrm{ord}}$, $g \in \mathbb{Z}[[G_\infty^{(1)}]]$ $[[G_\infty^{(2)}]]$ はある非零因子である.

(P) ある $t \geq 0$ についてレベル p^t の *eigen cusp form* $f = \sum_{n\geq 1} a_n(f)q^n$ で下に述べる条件 $(*)$ を満たすものに対し, 準同型

$$H_{p^\infty}^{\mathrm{ord}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}_p}\ ;\ T(n) \mapsto a_n \tag{4.2}$$

による $L_{p\text{-}adic}^{\mathrm{ord,univ}}$ の像が f の p 進ゼータ関数 $L_{p\text{-}adic}(f) \in (O_M[[G_\infty^{(2)}]]) \otimes_{O_M} M$ (*Amice-Vélu* [AV], *Vishik* [Vi]) になる. ここに M は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体 $M = \mathbb{Q}_p(a_n; n \geq 1)$ である.

上述の条件 $(*)$ について述べる.

群 $G_\infty^{(1)}$ が $\overline{M}_{p^\infty}$ に作用する *diamond operator* の群である事から $G_\infty^{(1)} \subset H_{p^\infty}$ がいえる.

上述の条件 $(*)$ とは

$(*)$ f に対応する準同型(4.2)が上の g, h を消さない事.

詳細は [Fu2] に述べたい.

この $L_{p\text{-adic}}^{\mathrm{ord,univ}}$ は, 肥田氏による ordinary Λ 進保型形式 ([Hi1], [Hi2] 参照) に対応する2変数 p 進ゼータ関数である. Greenberg-Stevens 両氏 ([GS]), 北川氏 ([Ki]) によって既に2変数 p 進ゼータ関数は与えられているが, この $L_{p\text{-adic}}^{\mathrm{ord,univ}}$ は係数がHecke環となっているところが, universalな点である.

また加藤氏の zeta element から 2 変数 p 進ゼータ関数を得る結果には，落合氏 ([Oc]) による別の方法によるものもある．

注 4.12 ．*ordinary* とは限らない *eigen cusp form* f の p 進ゼータ関数 $L_{p\text{-}adic}(f)$ も *universal zeta modular form* $z_{p^\infty}^{\mathrm{univ}}$ から得られるが，この詳細についてはここでは述べない．[Fu2] に述べる．

4.13. 最後に定理 4.11 に述べた $z_{p^\infty}^{\mathrm{univ}}$ による $L_{p\text{-adic}}^{\mathrm{ord,univ}}$ の与え方を記す．

4.13.1. 肥田氏 ([Hi1]) により写像

$$\overline{M}_{p^\infty} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H_{p^\infty},\ \mathbb{Z}_p)$$

が pairing

$$\overline{M}_{p^\infty} \times H_{p^\infty} \longrightarrow \mathbb{Z}_p\ ;\ (f = \sum_{n\geq 0} a_n(f)q^n,\ T) \mapsto a_1(Tf),$$

によって与えられている．

従って，写像

$$\overline{M}_{p^\infty}[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}] \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H_{p^\infty},\ \mathbb{Z}_p)[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}] \tag{4.3}$$

が与えられる．universal zeta modular form $z_{p^\infty}^{\mathrm{univ}}$ はこの (4.3) の左辺に含まれるが，その (4.3) による像について次の事がいえる．

この像も同じ記号を用いて $z_{p^\infty}^{\mathrm{univ}}$ と書く．

命題 4.13.2 ．$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[G_\infty^{(1)}]]$ とおく．この時次が成立する．

$$\begin{aligned} z_{p^\infty}^{\mathrm{univ}} &\in \mathrm{Hom}_\Lambda(H_{p^\infty},\ \Lambda)[[G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}] \\ &\qquad (\subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H_{p^\infty},\ \mathbb{Z}_p)[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}]). \end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{Hom}_\Lambda(\ ,\ )$ は Λ 加群としての準同型である．

4.13.3. universal ordinary p-adic L function $L^{\mathrm{ord,univ}}_{p\text{-adic}}$ は次の合成写像による $z^{\mathrm{univ}}_{p^\infty}$ の像である.

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(H_{p^\infty},\ \Lambda)[[G^{(2)}_\infty]][\frac{1}{g}] \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(H^{\mathrm{ord}}_{p^\infty},\ \Lambda)[[G^{(2)}_\infty]][\frac{1}{g}]$$
$$\longrightarrow H^{\mathrm{ord}}_{p^\infty}[\frac{1}{h}][[G^{(2)}_\infty]][\frac{1}{g}].$$

最初の写像は自然な写像である. ふたつめの写像は次のようにして与えられる:

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(H^{\mathrm{ord}}_{p^\infty},\ \Lambda) \longrightarrow H^{\mathrm{ord}}_{p^\infty} \otimes_\Lambda Q(\Lambda)\ ;\ \psi \mapsto a.$$

ここに $Q(\Lambda)$ は Λ の全商環であり, $a \in H^{\mathrm{ord}}_{p^\infty} \otimes_\Lambda Q(\Lambda)$ は次を満たす元である:

$$\psi(x) = \mathrm{T}(ax) \in Q(\Lambda) \quad (x \in H^{\mathrm{ord}}_{p^\infty}).$$

写像 T は, Trace 写像

$$\mathrm{T} : H^{\mathrm{ord}}_{p^\infty} \otimes_\Lambda Q(\Lambda) \longrightarrow Q(\Lambda)$$

である.

こうして $z^{\mathrm{univ}}_{p^\infty}$ により $L^{\mathrm{ord,univ}}_{p\text{-adic}}$ が得られた.

References

[AV] Amice, Y., and Vélu, J., *Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke*, Astérisque **24-25**(1975) 119–131.

[Co] Coleman, R., *Division values in local fields*, Invent. Math. **53** (1979) 91–116.

[Fu1] Fukaya, T., *The theory of Coleman power series for K_2*, to appear in the Journal of Algebraic Geometry.

[Fu2] Fukaya, T., *K_2-version of Coleman power series and p-adic zeta functions of modular forms*, in preparation.

[Fu3] Fukaya, T., *K_2-version of Coleman power series and p-adic zeta functions of modular forms*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1200** 48–59 (2001).

[GS] Greenberg, R. and Stevens, G., *p-adic L functions and p-adic periods of modular forms*, Invent. Math. **111** (1993) 407–447.

[Hi1] Hida, H., *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **19** (1986) 231–273.

[Hi2] HIDA, H., *Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. **85** (1986) 545–613. 1

[Hi3] HIDA, H., *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Math. Soc. Student Texts **26** (1993).

[Ka] KATO, K., *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, to appear in Astérisque.

[Ki] KITAGAWA, K., *On standard p-adic L-functions of families of elliptic cusp forms*, Contemp. Math., **165** (1991) 81–110.

[Oc] OCHIAI, T., , Doctoral Thesis, University of Tokyo (2001).

[Qu] QUILLEN, D., *Higher algebraic K-theory* I, Lecture Notes in Math. **342**, Springer (1973) 179–198.

[Sc] SCHOLL, J., *An introduction to Kato's Euler systems*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **254**, Cambridge Univ. Press (1998) 379–460.

[Vi] VISHIK, M., M., *Non-archimedean measures connected with Dirichlet series*, Math. USSR, Sbornik **28** (1976) 216–228.

153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1

E-mail address: `takako@ms357.ms.u-tokyo.ac.jp`