

Title	ON GOUVEA'S CONJECTURE IN THE UNOBSTRUCTED CASE (Automorphic Forms and their Dirichlet series)
Author(s)	山上, 敦士
Citation	数理解析研究所講究録 (2002), 1281: 199-208
Issue Date	2002-08
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/42383">http://hdl.handle.net/2433/42383</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## ON GOUVÊA'S CONJECTURE IN THE UNOBSTRUCTED CASE

北大理 山上 教士 (ATSUSHI YAMAGAMI)

### 0. はじめに

本稿では、古典的な固有形式に付随する剰余 Galois 表現の普遍変形環に関する Gouvêa の予想を定式化し、それに関する主結果を述べる。

$p$  を奇素数,  $k$  を標数  $p$  の有限体,  $S$  を  $p$  と  $\infty$  を含む有理素点の有限集合とする.  $G_S$  を有理数体  $\mathbb{Q}$  上の  $S$  の外不分岐な最大 Galois 拡大の Galois 群とし,

$$\bar{\rho}: G_S \rightarrow \mathrm{GL}_2(k)$$

をある古典的な固有形式に付随する絶対既約な剰余 Galois 表現とする. このとき, Gouvêa の予想を簡単に述べると次のようになる:

‘予想.’  $\bar{\rho}$  の勝手な  $S$  の外不分岐な変形は, Katz-modular であろう, すなわち, Katz の  $p$  進固有形式に付随する変形であろう.

本稿で述べる主定理は, この予想が  $\bar{\rho}$  の変形問題が “unobstructed” であると仮定した場合には正しい, というものである.

以下, 第 1 節では, Mazur による剰余 Galois 表現の変形理論を概説し, Gouvêa の予想を定式化して, その予想に関する主定理を述べる. そして第 2 節において, 主定理の証明の概略を述べたい.

謝辞. この研究集会における講演の機会を与えて下さった, 桂田英典先生に心より感謝申し上げます.

### 1. Mazur の変形理論と Gouvêa の予想

この節では Mazur [8] の剰余 Galois 表現の変形理論を復習し, Gouvêa [3] により定式化された普遍変形環に関する予想を述べ, 最後に本稿における主結果を述べる. 以下, 固有形式は尖点的なものとし, 表現や環準同型は連続なものを扱う.

$p$  を奇素数,  $N$  を  $p$  と互いに素な正整数とし,  $k$  を 2 以上の整数とする. 代数的数を  $p$  進数とみなす埋め込み  $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$  を一つ固定し

ておく.  $f$  を tame level  $N$  で重み  $k$  の正規化された固有形式とし, Fourier 級数展開

$$f(q) = \sum_{n \geq 1} a_n q^n$$

を持つとする. ここで,  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  上で定義された固有形式に付随する重要な量を定義する:

定義.  $\text{ord}_p(a_p)$  を  $f$  の slope という. ここで,  $\text{ord}_p$  は正規化された  $p$  進付値である. とくに,  $f$  の level が  $Np$  で重みが  $k$  のとき,  $f$  の slope  $\alpha$  は

$$0 \leq \alpha \leq k-1$$

を満たすことがわかる. ここで, もし  $\alpha$  が  $0$  か  $k-1$  と等しいときには critical slope といい, それ以外の場合は non-critical slope という.

$p$  進数体  $\mathbb{Q}_p$  に  $f$  の Fourier 係数  $a_n$  達を全て添加した体を  $K$  とする.  $K$  は  $\mathbb{Q}_p$  上の有限次拡大体になることが知られていて,  $\mathcal{O}$  を  $K$  の整数環,  $\mathfrak{m}$  をその極大 ideal,  $k$  をその剰余体とする. このとき, よく知られた事実として,  $\mathbb{Q}$  の絶対 Galois 群  $G_{\mathbb{Q}}$  の 2 次元表現

$$\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(\mathcal{O})$$

で, 次の二つの性質を満たすものが存在する:

- (1)  $\rho_f$  は有理素点の有限集合  $S := \{ Np \text{ の素因数} \} \cup \{\infty\}$  の外不分岐であり,
- (2)  $S$  に属さない素数  $l$  に対し,

$$a_l = \text{Trace}(\rho_f(\text{Frob}_l)).$$

ここで,  $\text{Frob}_l$  は素数  $l$  での Frobenius 元である.

この固有形式  $f$  に付随する Galois 表現  $\rho_f$  と,  $\text{mod } \mathfrak{m}$  をとる射  $\text{GL}_2(\mathcal{O}) \rightarrow \text{GL}_2(k)$  との合成をとった剰余 Galois 表現を  $\bar{\rho}$  と書くことにする. 上の (1) の性質により,  $\bar{\rho}$  は  $\mathbb{Q}$  上の  $S$  の外不分岐な最大 Galois 拡大の Galois 群  $G_S$  を経由する:

$$\bar{\rho} : G_S \rightarrow \text{GL}_2(k).$$

以下,  $\bar{\rho}$  の変形理論を述べるうえで, 次の仮定をしておく:

仮定.  $\bar{\rho}$  は絶対既約である.

### 1.1. Hida の理論

まず, Mazur [8] の変形理論の淵源とされる Hida [5], [6] の理論を見てみる. 固有形式  $f$  が  $\mathbb{Z}_p$  上定義されていて, “ordinary,” すなわち slope が 0 である場合を考える. このとき, Hida は  $p$  進的な重みで parametrize された  $f$  を含む ordinary な  $p$  進固有形式の無限族を構成した. この無限族について特筆すべき点は,  $p$  進的な重みの中でとくに整数の重みに対応する固有形式は古典的であり, それに付随する剰余 Galois 表現が全て  $f$  から来る  $\bar{\rho}$  と等しいことである.

この無限族を用いて Mazur と Wiles [9] は, Hecke 作用素で  $\mathbb{Z}_p$  上生成されるある環  $T^{\text{ord}}(\bar{\rho}, N)$  と 2 次元 Galois 表現

$$\rho^{\text{ord}} : G_S \rightarrow \text{GL}_2(T^{\text{ord}}(\bar{\rho}, N))$$

を構成し,  $\mathbb{Z}_p$  上定義された ordinary な固有形式に付随する勝手な  $\bar{\rho}$  の持ち上げ

$$\begin{array}{ccc} \rho : G_S & \longrightarrow & \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \\ & \searrow \bar{\rho} & \downarrow \text{mod } p \\ & & \text{GL}_2(\mathbb{F}_p) \end{array}$$

に対し,  $\mathbb{Z}_p$ -多元環準同型

$$\varphi : T^{\text{ord}}(\bar{\rho}, N) \rightarrow \mathbb{Z}_p$$

がただ一つ存在し, 次の図式を同値の差を除き可換にする, ということを示した:

$$\begin{array}{ccc} & \text{GL}_2(T^{\text{ord}}(\bar{\rho}, N)) & \\ \rho^{\text{ord}} \nearrow & & \searrow \varphi \\ G_S & \xrightarrow{\rho} & \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \\ \bar{\rho} \searrow & & \nearrow \text{mod } p \\ & \text{GL}_2(\mathbb{F}_p). & \end{array}$$

### 1.2. Mazur の変形理論

上で見たように,  $\bar{\rho}$  が ordinary な固有形式  $f$  に付随する場合, ordinary な固有形式に付随する持ち上げについては, 「 $\rho^{\text{ord}}$  から来るもの」という特徴づけをすることができる.

では,  $f$  に ordinary などの特別な条件をつけない一般的な状況で,  $\bar{\rho}$  の持ち上げの中で固有形式に付随するものを特徴づけることはできないか, という問題が生じる. この問題を考えるに先立ち, Mazur [8] による変形の定義を復習する:

定義.  $A$  を  $k$  を剰余体とする完備局所 Noether 環とし, その極大 ideal を  $\mathfrak{m}_A$  とする.  $\bar{\rho}$  の二つの持ち上げ

$$\begin{array}{ccc} \rho, \rho' : G_S & \longrightarrow & \mathrm{GL}_2(A) \\ & & \downarrow \text{mod } \mathfrak{m}_A \\ & & \mathrm{GL}_2(k) \end{array}$$

が strictly equivalent であるということを, ある  $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{GL}_2(A) \rightarrow \mathrm{GL}_2(k))$  があって,

$$\rho'(\sigma) = M^{-1}\rho(\sigma)M \quad (\sigma \in G_S)$$

となることとする. そして,  $\bar{\rho}$  の  $A$  への 変形 を, これらの持ち上げの strict equivalence class のこととする.

定理 (cf. [8, Proposition 1]).  $k$  を剰余体とするある完備局所 Noether 環  $R(\bar{\rho}, S)$  と,  $\bar{\rho}$  の変形

$$\rho^{\mathrm{univ}} : G_S \rightarrow \mathrm{GL}_2(R(\bar{\rho}, S))$$

が存在して, 勝手な  $\bar{\rho}$  の変形

$$\rho : G_S \rightarrow \mathrm{GL}_2(A)$$

に対し, 図式

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{GL}_2(R(\bar{\rho}, S)) & \\ \rho^{\mathrm{univ}} \nearrow & & \downarrow \varphi \\ G_S & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{GL}_2(A) \end{array}$$

が strictly equivalent の差を除いて可換となる  $W(k)$ -多元環準同型

$$\varphi : R(\bar{\rho}, S) \rightarrow A$$

がただ一つ存在する. ここで,  $W(k)$  は有限体  $k$  上の Witt 環である.

この  $R(\bar{\rho}, S)$  を  $\bar{\rho}$  の 普遍変形環 といい,  $\rho^{\mathrm{univ}}$  を  $\bar{\rho}$  の 普遍的な変形 という.

定義と注意.  $k$ -係数の 2 次正方形行列全体のなすベクトル空間  $M_2(k)$  上に  $G_S$  を

$$\sigma \cdot M = \bar{\rho}(\sigma)M\bar{\rho}(\sigma)^{-1} \quad (\sigma \in G_S, M \in M_2(k))$$

と作用させた  $G_S$ -加群を  $\mathrm{Ad}(\bar{\rho})$  と書く.  $\bar{\rho}$  に対する変形問題が unobstructed であるとは,

$$H^2(G_S, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) = 0$$

であること. このとき, [8, Proposition 2] により普遍変形環  $R(\bar{\rho}, S)$  は  $W(\mathbf{k})$  上の 3 変数形式的冪級数環と同型である:

$$R(\bar{\rho}, S) \cong W(\mathbf{k})[[T_1, T_2, T_3]].$$

さて, この節の冒頭で述べた問題を  $R(\bar{\rho}, S)$  を用いて記述すると次のようになる:

**問題.** tame level  $N$  の古典的な固有形式  $f$  に付随する剰余 Galois 表現  $\bar{\rho}$  に対して, ある「一般化された保型形式」に作用する Hecke 環  $T(\bar{\rho}, N)$  で

$$R(\bar{\rho}, S) \cong T(\bar{\rho}, N)$$

となるものが存在するか?

先程の Hida の理論においては「一般化された保型形式」にあたるのは,  $p$  進的な重みを持つ ordinary な  $p$  進保型形式であった. では, ordinary とは限らない状況ではどのような保型形式が相当するのであろうか.

### 1.3. Gouvêa の予想

上の問題に対して, Gouvêa [3] は「一般化された保型形式」として, Katz の  $p$  進保型形式を取り上げた. この節では, Katz-modular な変形に関する彼の結果と, それを用いて定式化された予想について述べたいと思う. (詳しくは, [3, Chapter III] を参照のこと.)

Katz の  $W(\mathbf{k})$  上定義された tame level  $N$  の  $p$  進尖点形式全体に作用する (制限された) Hecke 環を  $T_0^*(W(\mathbf{k}), N)$  とし, 考えている剰余 Galois 表現  $\bar{\rho}$  が付随している固有形式  $f$  により定義される  $W(\mathbf{k})$ -多元環準同型

$$T_0^*(W(\mathbf{k}), N) \rightarrow \mathbf{k}, \quad T \mapsto (\text{the } T\text{-eigenvalue of } f) \bmod \mathfrak{m}$$

の核を  $\mathfrak{m}_f$  とおくと, これは  $T_0^*(W(\mathbf{k}), N)$  の極大 ideal となり,  $T_0^*(W(\mathbf{k}), N)$  を  $\mathfrak{m}_f$  に関して完備化した局所 Noether 環を  $T(\bar{\rho}, N)$  とおく.

**定理** (cf. [3, Theorem III.5.6]).  $\bar{\rho}$  の  $T(\bar{\rho}, N)$  への変形

$$\rho^{\text{mod}} : G_S \rightarrow \text{GL}_2(T(\bar{\rho}, N))$$

が存在して, 任意の Katz-modular な  $\bar{\rho}$  の変形

$$\rho : G_S \rightarrow \text{GL}_2(A)$$

に対し, 図式

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{GL}_2(\mathbf{T}(\bar{\rho}, N)) & \\ \rho^{\mathrm{mod}} \nearrow & & \downarrow \varphi \\ G_S & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{GL}_2(A) \end{array}$$

が strictly equivalent の差を除いて可換となる  $W(\mathbf{k})$ -多元環準同型

$$\varphi: \mathbf{T}(\bar{\rho}, N) \rightarrow A$$

がただ一つ存在する.

すなわち,  $\mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$  は  $\bar{\rho}$  に対する 普遍 Katz-modular 変形環 である.

この結果を受けて, Gouvêa は次の予想を立てた:

**Gouvêa の予想.**  $R(\bar{\rho}, S)$  の普遍性から来る自然な全射

$$R(\bar{\rho}, S) \rightarrow \mathbf{T}(\bar{\rho}, N)$$

は, 同型写像であろう. すなわち,  $\bar{\rho}$  の変形は全て Katz-modular であろう.

次に, 本稿の主定理を述べる:

**主定理.**  $p$  を奇素数,  $N$  を  $p$  と素な任意の正整数とし,  $S := \{ Np \text{ の素因数} \} \cup \{\infty\}$  とおく.  $f$  を tame level  $N$  の古典的な固有形式とし,

$$\bar{\rho}: G_S \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbf{k})$$

を  $f$  に付随する剰余 Galois 表現とする. もし  $\bar{\rho}$  に対する変形問題が unobstructed であるならば,

$$R(\bar{\rho}, S) \cong \mathbf{T}(\bar{\rho}, N),$$

すなわち, Gouvêa の予想は正しい.

**注意.** (1)  $\bar{\rho}$  の変形問題が unobstructed な場合の Gouvêa の予想については, まず Gouvêa と Mazur [4] により, 「固有形式  $f$  が level  $p$  で自明な指標を持ち slope が non-critical であって  $\mathbb{Z}_p$  上定義されている」ときに解かれている. その結果は, 筆者 [11] により, level  $Np$  ( $N$  は  $p$  と互いに素な任意の正整数) の場合へと拡張はされたが, non-critical slope を持つ  $\mathbb{Z}_p$  上定義された固有形式だけを扱っているので, Gouvêa の予想の解決までは, ほど遠いものであった. しかし, 上述した本稿の主定理は, 固有形式  $f$  に対する条件が全くなく,  $\bar{\rho}$  の変形問題が unobstructed ならば, いつでも Gouvêa の予想は正しいと主張しているので, 今までの結果を大幅に改良したものである.

(2)  $\bar{\rho}$  の変形問題が unobstructed であるとは限らない場合には, Böckle [1] による結果があるが, ここでは説明を省かせていただく.

## 2. 証明の概略

この節では, 主定理の証明に必要な道具について解説し, それらをどのように用いるかを概説したい.

### 2.1. $\bar{\rho}$ の普遍変形環

定義. 主定理で与えられている剰余 Galois 表現  $\bar{\rho}$  に対して,

$$X := \text{Hom}_{W(\mathbf{k})\text{-alg}}(\mathbf{R}(\bar{\rho}, S), \mathcal{O})$$

とおき,  $\bar{\rho}$  の 普遍変形空間 という.

普遍変形環  $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S)$  の性質により,  $X$  の各点  $x$  には  $\bar{\rho}$  の  $\mathcal{O}$  への変形

$$\rho_x : G_S \rightarrow \text{GL}_2(\mathcal{O})$$

が対応している. 言い替えれば,  $X$  は  $\bar{\rho}$  の  $\mathcal{O}$  への変形全体である.

$\bar{\rho}$  の変形問題が unobstructed であると仮定しているので, 前節で述べたように,  $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S)$  は  $W(\mathbf{k})$  上の 3 変数形式的冪級数環と同型である:

$$\mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \cong W(\mathbf{k})[[T_1, T_2, T_3]].$$

以下, この同型写像を一つ固定する.  $\mathfrak{m}$  を  $\mathcal{O}$  の極大 ideal とすると,

$$X \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \times \mathfrak{m}, \quad x \mapsto (x(T_1), x(T_2), x(T_3))$$

により,  $X$  を  $K \times K \times K$  の開部分集合とみて, Serre [10] の意味での 3 次元  $K$ -解析的多様体とみなす.

$\bar{\rho}$  に対して Gouvêa の予想が正しいことを示すにあたり,  $\bar{\rho}$  の変形がなす  $K$ -解析的多様体  $X$  における  $p$  進固有形式に付随する変形達の振る舞いを調べる必要がある.

### 2.2. Coleman の無限族と Mazur の infinite fern

$\bar{\rho}$  は仮定により, tame level  $N$  の固有形式に付随しているので, Katz の稠密定理 [3, Proposition I.3.9] と Deligne と Serre の補題の Ash と Stevens による一般化 [3, Lemma III.5.2] により, level  $Np$  の固有形式で  $\bar{\rho}$  が付随しているものが存在することがわかる. この固有形式に Coleman の  $p$  進 “overconvergent” 保型形式に関する定理 [12, Theorem 3.1] を適用すると, 指標の  $p$ -部分が自明である level  $Np$  の  $p$  と素な導手をもつ固有形式  $g$  に  $\bar{\rho}$  が付随することがわかる.  $g$  に付随する level  $N'|N$  の newform  $g'$  から来る “twin forms” にも  $\bar{\rho}$  は付随している. (newform から twin forms を構成することについては, [12, pp. 10-11] を参照.) さらに, 固有形式の slope に着目し



て、必要ならば再び Coleman の定理を適用することにより、 $\bar{\rho}$  が始めから次の条件を満たす固有形式  $f$  に付随していると仮定してよい:

条件  $C(f, k, \alpha)$   $f$  は level  $N_0 p$ , 重み  $k$  で  $p$ -部分が自明な指標を持つ、導手  $N_0$  の  $\mathcal{O}$  上定義された固有形式であり、その slope  $\alpha$  は non-critical であって、 $\alpha \neq (k-1)/2, (k-2)/2$ . ここで、 $N_0$  は level  $N' p$  ( $N'$  は  $N$  の約数), 重み  $k'$  で  $p$ -部分が自明な指標を持ち、その slope  $\alpha'$  が  $\alpha' < k' - 1, \alpha' \neq (k' - 1)/2, (k' - 2)/2$  となっている  $p$ -old な  $\mathcal{O}$  上定義された  $\bar{\rho}$  が付随する固有形式の導手達の中で最小のもの.

Coleman の定理から導かれる次の命題は、上の条件を満たす固有形式  $f$  が  $p$  進的な重みで parametrize される Coleman の無限族 の一員であることを主張している:

命題  $\bar{\rho}$  が付随する固有形式  $f$  が条件  $C(f, k, \alpha)$  を満たすとする. このとき、 $k$  を含む  $K$  内の円盤  $D$ , その上の  $K$ -解析的関数

$$a_n : D \rightarrow \mathcal{O} \quad (n \geq 1),$$

$D$  内の整数の等差数列からなる稠密な部分集合  $E$  が存在して、 $E$  の各点  $k'$  に対し、 $\mathcal{O}$ -係数の形式的冪級数

$$f_{k'}(q) = \sum_{n \geq 1} a_n(k') q^n$$

が条件  $C(f_{k'}, k', \alpha)$  を満たす  $\bar{\rho}$  が付随する固有形式となる. さらに、 $f_{k'} = f$  である.

この命題で得られる Coleman の無限族  $\{f_d\}_{d \in D}$  は全て  $\mathcal{O}$  上定義されているので、それらに付随する  $\bar{\rho}$  の変形  $\rho_d$  達をとることで、 $X$  内に  $D$  で parametrize された 1 次元の slope  $\alpha$  の曲線  $C_\alpha$  を描くことができる ([11, Figure 1]).

曲線  $C_\alpha$  上の  $E$  の各点  $k'$  に対応する点  $x_{k'}$  は、slope  $\alpha$  の  $f_{k'}$  と slope  $k' - 1 - \alpha$  をもつその twin form  $f'_{k'}$  という、異なる slope を持つ二つの固有形式に付随している.  $f'_{k'}$  は条件  $C(f'_{k'}, k', k' - 1 - \alpha)$  を満たすので、この固有形式を通る slope  $k' - 1 - \alpha$  の Coleman の無限族が得られる. それに付随する曲線  $C_{k' - 1 - \alpha}$  を  $E$  の各点に対して  $X$  内に描くことで、 $C_\alpha$  とそれぞれ一点で交わる曲線の無限族  $\{C_{k' - 1 - \alpha}\}_{k' \in E}$  を得る ([11, Figure 2]).

以上のように、Coleman の無限族を得て twin form をとるという操作を繰り返すことで、普遍変形空間  $X$  内に無限個の Coleman の無限族が織りなす “infinite fern” を描くことができる ([11, Figure ...

### 2.3. $X$ における固有形式に付随する点達の稠密性

この節では、上述の infinite fern を用いた主定理の証明の概略を述べたい。この証明は、Gouvêa と Mazur [4] による  $\mathbb{Q}_p$  上の議論を、一般の  $p$  進体  $K$  上へと拡張したものである。(詳しくは、[12, Section 4] を参照のこと。)

主定理の同型を証明するには、 $\text{Spec}(\mathbf{R}(\bar{\rho}, S))$  内で固有形式に付随する点のなす部分集合  $\mathcal{X}$  が稠密であることを示せばよい ([4, Sections 3-4] を参照)。そのために、稠密でないと仮定して矛盾を導く。もし、 $\mathcal{X}$  が  $\text{Spec}(\mathbf{R}(\bar{\rho}, S))$  で稠密でないとすれば、0 でない  $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S)$  の元  $\tau$  で  $\mathcal{X}$  上で消えるものが存在する。仮定により、 $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S) \cong W(\mathbf{k})[[T_1, T_2, T_3]]$  であり、特に  $\mathbf{R}(\bar{\rho}, S)$  は UFD なので、 $\tau$  は既約元であると仮定してよい。

$\mathfrak{m}$  を  $\mathcal{O}$  の極大 ideal として、 $1 + \mathfrak{m}$  の pro- $p$  free な部分を  $\mathcal{U}_{\text{free}}$  と書き、

$$\Psi := \text{Hom}_{\text{cont}}(G_S, \mathcal{U}_{\text{free}})$$

とおく。類体論により、 $G_S$  の極大 pro- $p$  abelian torsion-free 商は  $\Gamma = 1 + p\mathbb{Z}_p$  と同型であり、 $\Gamma$  の位相的生成元の像を対応づけることで、次の同型を得る:

$$\begin{aligned} \Psi &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{cont}}(\Gamma, \mathcal{U}_{\text{free}}) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_{\text{free}}(\hookrightarrow K). \end{aligned}$$

これにより、 $\Psi$  を 1 次元  $K$ -解析的群とみなすことができる。 $\Psi$  は  $X$  に  $K$ -解析的に次のように作用する:

$$\pi: \Psi \times X \rightarrow X, \quad (\psi, x) \mapsto x \circ \psi.$$

ここで、 $x \circ \psi$  は  $\bar{\rho}$  の  $\mathcal{O}$  への変形

$$\rho_x \otimes \psi: G_S \rightarrow \text{GL}_2(\mathcal{O})$$

に対応する  $X$  の点である。前節で得た曲線  $C_\alpha$  にこの作用を制限したものを

$$\pi_0: \Psi \times C \rightarrow X.$$

と書き、 $M = \pi_0(\Psi \times C)$  とおく。 $C_\alpha$  を parametrize している  $K$ -解析的円盤  $D$  を十分小さくすることで、 $M$  が  $X$  において  $\tau = 0$  を定義方程式とする余次元 1 の  $K$ -解析的部分多様体であるとしてよい。

$C_\alpha$  をある特別な指標達で捻ることで、“conjugate arc” と呼ばれる曲線  $\tilde{C}_\alpha$  が  $M$  内に構成され、固有形式に付随する点で既約元  $\tau$  が消えることから、次の補題が示される:

**補題.** 前節で構成した  $C_\alpha$  と交わる曲線達  $\{C_{k'-1-\alpha}\}_{k' \in E}$  は全て  $\tilde{C}_\alpha$  に含まれる。

この補題は、相異なる slope を持つ無限個の曲線達が、一つの曲線  $\tilde{C}_\alpha$  内に含まれることを主張しているが、このことは、等差数列  $E$  が  $K$ -解析的円盤  $D$  内で稠密であるという事実に矛盾する。この矛盾は、既約元  $\tau$  の存在が引き起こしたものであり、これによって、 $\mathcal{X}$  が  $\text{Spec}(\mathcal{R}(\bar{\rho}, S))$  内で稠密であることが証明された。

### References

- [1] G. Böckle, On the density of modular points in universal deformation spaces, *Amer. J. of Math.* **123** (2001), 985-1007.
- [2] R.F. Coleman,  $P$ -adic Banach spaces and families of modular forms, *Invent. Math.* **127** (1997), 417-479.
- [3] F.Q. Gouvêa, "Arithmetic of  $p$ -adic Modular Forms," Lecture Notes in Math., Vol. 1304, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1988.
- [4] F.Q. Gouvêa and B. Mazur, On the density of modular representations, pp. 127-142, in "Computational perspectives on number theory," AMS/IP Studies in Advanced Mathematics **7**, 1998.
- [5] H. Hida, Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4<sup>e</sup> série **19** (1986), 215-273.
- [6] H. Hida, Galois representations into  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p[X])$  attached to ordinary cusp forms, *Invent. Math.* **85** (1986), 545-613.
- [7] B. Mazur, An "infinite fern" in the universal deformation space of Galois representations, *Collect. Math.* **48** (1997), 155-193.
- [8] B. Mazur, Deforming Galois representations, pp. 385-437, in "Galois Groups over  $\mathbb{Q}$ " (Y. Ihara, K. Ribet, and J.-P. Serre, Eds.), Springer-Verlag, Berlin and New York, 1989.
- [9] B. Mazur and A. Wiles, On  $p$ -adic analytic families of Galois representations, *Comp. Math.* **59** (1986), 231-264.
- [10] J.-P. Serre, "Lie Algebras and Lie Groups," Benjamin, 1965.
- [11] 山上 教士, On Gouvêa's conjectures on the universal deformation rings of residual Galois representations, 数理解析研究所講義録 **1200** (2001), 162-172.
- [12] A. Yamagami, On Gouvêa's conjecture in the unobstructed case, preprint.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY, SAPPORO, 060-0810, JAPAN

E-mail address: yamagami@math.sci.hokudai.ac.jp