数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 220-226

局所テータ対応と R 群

市野 篤史 (ICHINO, ATSUSHI)*

1. Introduction

保型形式の構成法のひとつにテータ対応がある．これは，テータ関数を核関数として積分することで，ふたつの古典群の間に保型表現の対応を組織的に与えるものである．例えば，数体 k 上定義された直交群 $G=O_Q$ とシンプレクティック群 $G'=\mathrm{Sp}(2n)$ を考えよう．但し Q は非退化 m 次対称行列で，簡単のため m は偶数と仮定する．このとき，$G(\mathbf{A})$ 上の保型形式 f に対して，$G'(\mathbf{A})$ 上の保型形式 $\theta(f)$ が，

$$\theta(f)(g')=\int_{G(k)\backslash G(\mathbf{A})}\Theta(g,g')f(g)\,dg$$

によって (積分が収束すれば) 定義される．但し $\mathbf{A}$ は k のアデール環，Θ はテータ関数 (これは $G(\mathbf{A})\times G'(\mathbf{A})$ 上の保型形式) である．

さて，最初に問題となるのは

$$\theta(f)\neq 0$$

かどうかを判定することである．この問題は一般には未だに難しい状況にあり，Arthur 予想 [Ar] に基づいて予想を立てようと思っても，そのために不可欠な (局所体上の代数群の) 表現論も十分に分かっているとは言難い．

我々は，このような背景のもとで局所テータ対応について考察する．もちろん，上で述べたように問題意識は保型表現にあるのだが，p 進代数群の表現論としてもそれ自身非常に興味深い現象が起きている．この稿では，p 進体上の reductive dual pair $(G,G')=(U(n,n),U(n,n))$ について，テータ対応をある種の緩増加表現に対して精密に記述する．

2. 局所テータ対応

2.1. 記号．p を奇素数として，F を p 進体，E を F の二次拡大とする．また $\delta\in E^{\times}$ で $\mathrm{tr}_{E/F}(\delta)=0$ を満たすものを固定する．$2n$ 変数 quasi-split

*大阪市立大学大学院理学研究科.

ユニタリ群 $G = G' = U(n,n)$ を次のようにして実現する:

$$G = \left\{ g \in GL_{2n}(E) \,\middle|\, {}^t\bar{g} \begin{pmatrix} & -\delta\mathbf{1}_n \\ \delta\mathbf{1}_n & \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} & -\delta\mathbf{1}_n \\ \delta\mathbf{1}_n & \end{pmatrix} \right\},$$

$$G' = \left\{ g' \in GL_{2n}(E) \,\middle|\, g' \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \end{pmatrix} {}^t\bar{g}' = \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \end{pmatrix} \right\}.$$

実際に $G = G'$ であることは容易に分かる. さて, $G \times G' \subset \mathrm{Sp}(8n^2)$ は自然に reductive dual pair になり, 今の場合は標準的な splitting $G \times G' \hookrightarrow \mathrm{Mp}(8n^2)$ が存在する [K2]. 但し,

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^1 \longrightarrow \mathrm{Mp}(8n^2) \longrightarrow \mathrm{Sp}(8n^2) \longrightarrow 1$$

は metaplectic extension とする.

また, F の自明でない指標 ψ_F を固定すると, $\mathrm{Mp}(8n^2)$ の Weil 表現 ω が定まり, 制限することにより $G \times G'$ の表現が定まる. これも ω で表すことにする. ここで $G \times G'$ の表現 ω は ψ_F だけでなく δ にも依存することに注意する.

2.2. 局所テータ対応. 次の定理は, Howe によって予想され, Waldspurger により $p \neq 2$ の仮定のもとで一般に証明された.

Theorem 2.1 ([H],[W]). π を G の既約許容表現とする. G' の既約許容表現 π' で,

$$\mathrm{Hom}_{G \times G'}(\omega, \tilde{\pi} \otimes \pi') \neq 0$$

を満たすものが存在すると仮定する. 但し, $\tilde{\pi}$ は π の反傾表現を表す. この時, π'(の同型類) は一意的に定まる.

これより, 写像

$$\theta : \Pi(G) \longrightarrow \Pi(G') \cup \{0\}$$

が定まる. 但し $\Pi(G)$ は G の既約許容表現の同型類全体の集合とする. この写像 θ を分かりやすい形で記述したいわけだが, Waldspurger による証明からはそれは不可能に思われる. しかし, Adams による次の予想が知られている.

Conjecture 2.2 ([Ad],[HKS]). W'_F を F の Weil-Deligne 群とする. 局所 Langlands 予想を仮定する. つまり, Langlands parameter (の同値類) $\varphi : W'_F \to {}^LG$ に対して, $\Pi(G)$ の有限部分集合 Π_φ が定まり (L パケットと呼ばれる),

$$\Pi(G) = \coprod_{\varphi} \Pi_\varphi$$

が成立していると仮定する. この時,

$$\pi \in \Pi_\varphi \Longrightarrow \theta(\pi) \in \Pi_\varphi \cup \{0\}.$$

この予想を仮定すると, 写像

$$\theta : \Pi_\varphi \longrightarrow \Pi_\varphi \cup \{0\}$$

が定まる. よって, この写像を記述することが問題となるわけだが, これについては D. Prasad による精密な予想がある [P].

Remark 2.3. Adams の予想で本質的なのは, 一般にテータ対応においては関手性が成り立たないので, その記述のために Arthur parameter を用いていることである. しかし, 今は $G = G'$ の場合を考えているので, 関手性は成り立っていると思われる. また φ が緩増加の場合は L パケット Π_φ の構造を考えることができるが, ここでは無視する.

3. R 群

3.1. **設定.** 以下, π は緩増加と仮定する. つまり, G の放物型部分群 P と, P の Levi 成分 L の離散系列表現 σ で, π が誘導表現 $I(\sigma) = \mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ の既約成分として実現されるものが存在する. ここで $I(\sigma)$ はユニタリ表現であることに注意する. 我々は, さらに $L \simeq GL_{n_1}(E) \times \cdots \times GL_{n_t}(E)$ と仮定する. 但し $n_1 + \cdots + n_t = n$ である. この場合 $\theta(\pi) \neq 0$ で, $\theta(\pi)$ は $I'(\sigma) = \mathrm{Ind}_{P'}^{G'}(\sigma)$ の既約成分となることが, (結果として) 分かる. 但し $P' = P$ を G' の放物型部分群とみなした. この事実は, σ が supercuspidal ならば Kudla による induction principle から従うが [K1], 既約成分の対応を精密に与えるまでには至っていない.

Remark 3.1. 今の場合は, $I(\sigma)$ の既約成分全体がひとつの L パケットをなすと考えられている. つまり, 上の事実は Adams の予想を満たしている.

3.2. **Intertwining operators.** $\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_t$ と表す. 但し $1 \leq i \leq t$ に対し, σ_i は $GL_{n_i}(E)$ の離散系列表現である. σ_i の表現空間を $\mathcal{V}_i$, 中心指標を ω_{σ_i} で表す. $\lambda \in \mathbb{C}^t$ に対し, $I(\sigma, \lambda) = \mathrm{Ind}_P^G(\sigma|\ |^\lambda)$ とおく. 特に, $I(\sigma) = I(\sigma, 0)$ である.

W を L の中心の極大分裂トーラスに関する G の Weyl 群とする. すなわち, W は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^t \rtimes \mathfrak{S}_t$ のある部分群と同型である. W の元の代表 $w \in G$ と, $I(\sigma, \lambda)$ の holomorphic section $f^{(\lambda)}$ に対し, intertwining operator を

$$M(w, \sigma, \lambda) f^{(\lambda)}(g) = \int_{U \cap wUw^{-1} \backslash U} f^{(\lambda)}(w^{-1}ug)\, du$$

によって定義する. 但し U は P の unipotent radical とする. この積分は $\mathrm{Re}(\lambda_1) \gg \cdots \gg \mathrm{Re}(\lambda_t) \gg 0$ ならば絶対収束して, $\mathbb{C}^t$ 上に有理型に解析接続できることが知られている. さらに λ の有理関数 $r(w, \sigma, \lambda)$ で次を満たすものが存在する.

(i) normalized intertwining operator

$$N(w,\sigma,\lambda)=r(w,\sigma,\lambda)^{-1}M(w,\sigma,\lambda)$$

は $\sqrt{-1}\mathbb{R}^t$ 上正則である.

(ii) W の元の代表 $w,w'\in G$ に対して, cocycle condition

$$N(ww',\sigma,0)=N(w,w'\sigma,0)N(w',\sigma,0)$$

が成り立つ.

$1\leq i\leq t$ に対して $r_i\in W$ を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の i 番目の成分に関する sign change とする. r_i の代表として

$$w_i=\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1}_{k_i} & & & & & \\ & & & & \mathbf{1}_{n_i} & \\ & & \mathbf{1}_{m_i} & & & \\ \hline & & & \mathbf{1}_{k_i} & & \\ & -\mathbf{1}_{n_i} & & & & \\ & & & & & \mathbf{1}_{m_i} \end{array}\right)\in G$$

をとる. 但し $k_i=n_1+\cdots+n_{i-1}$, $m_i=n_{i+1}+\cdots+n_t$ とおいた.

3.3. R 群. $I(\sigma)$ の既約分解は Harish-Chandra[S2], Knapp-Stein[KS], Silberger[S1] による R 群を用いて記述することができる. 今の場合, R 群は Goldberg によって計算されている [G].

$\mathfrak{I}$ を $\{1,\ldots,t\}$ の部分集合で, 次の条件を満たす i 全体からなるものとする.

- $\sigma_i\simeq {}^t\bar{\sigma}_i^{-1}$.
- $j>i$ ならば $\sigma_j\not\simeq\sigma_i$.
- $\mathrm{Ind}_{GL_{n_i}(E)}^{U(n_i,n_i)}(\sigma_i)$ は可約.

R を r_i $(i\in\mathfrak{I})$ たちで生成される W の部分群とする. 特に, $R\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\#\mathfrak{I}}$ となる. 各 $i\in\mathfrak{I}$ に対し, 同型写像 $A_i:\mathcal{V}_i\xrightarrow{\sim}\mathcal{V}_i$ で次を満たすものを固定する.

- $A_i^2=\mathrm{id}$.
- 任意の $a\in GL_{n_i}(E)$ に対して, $A_i\sigma_i(a)={}^t\bar{\sigma}_i^{-1}(a)A_i$.

このとき,

$$\mathcal{N}(r_i,\sigma)=\omega_{\sigma_i}(\delta)A_iN(w_i,\sigma,0)$$

は $I(\sigma)$ の self-intertwining operator で, $\mathcal{N}(r_i,\sigma)^2=\mathrm{id}$ を満たす. 一般の $r=r_{i_1}\cdots r_{i_k}\in R$ に対しては,

$$\mathcal{N}(r,\sigma)=\mathcal{N}(r_{i_1},\sigma)\cdots\mathcal{N}(r_{i_k},\sigma)$$

とおく．但し $\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \mathfrak{I}$ である．このとき，R の指標群を $\hat{R}$ とすると，$I(\sigma)$ の既約分解は

$$I(\sigma) = \bigoplus_{\kappa\in\hat{R}} \pi_\kappa$$

の形で与えられ，しかもこの分解は multiplicity free である．但し

$$\pi_\kappa = \{f \in I(\sigma) \,|\, \mathcal{N}(r,\sigma)f = \kappa(r)f,\ \forall r \in R\}.$$

である．実際，準同型写像

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[R] &\longrightarrow \mathrm{End}_G(I(\sigma)) \\ r &\longmapsto \mathcal{N}(r,\sigma) \end{aligned}$$

は R 群の一般論と Goldberg の計算により同型であることが分かる．この既約分解は標準的ではないので，G の極大 unipotent 部分群の非退化指標 χ を固定し，自明指標 $1 \in \hat{R}$ に対応する表現 π_1 が χ-generic となるようにしておく．

同様に，$I'(\sigma)$ の既約分解は

$$I'(\sigma) = \bigoplus_{\kappa'\in\hat{R}'} \pi'_{\kappa'}$$

の形で与えられる．但し，$R' = R$ 等とおいた．特に π'_1 も χ-generic である．

4. 主結果

今の場合，局所テータ対応を記述するためには，R 群の指標 κ, κ' の間の関係を調べればよい．これを記述したのが次の定理である．

Theorem 4.1. $\kappa \in \hat{R}$ とする．このとき，$i \in \mathfrak{I}$ に対して

$$\theta(\kappa)(r_i) = \kappa(r_i)\cdot\varepsilon(1/2,\sigma_i,\psi_F\circ\mathrm{tr}_{E/F})\omega_{\sigma_i}(\delta)^{-1}$$

により $\theta(\kappa) \in \hat{R}'$ が定まり，

$$\theta(\pi_\kappa) = \pi'_{\theta(\kappa)}$$

が成り立つ．但し $\varepsilon(1/2,\sigma_i,\psi_F\circ\mathrm{tr}_{E/F})$ は σ_i の $\psi_F\circ\mathrm{tr}_{E/F}$ に関する *root number* である．

よって，局所テータ対応が定める写像

$$\theta : \Pi_\varphi \longrightarrow \Pi_\varphi$$

は恒等写像ではなく，捻じれが起きている．注目に値すべきは，その捻じれが数論的な量である root number を用いて記述されることである．もちろん，我々の結果は D. Prasad の予想 [P] を満たしている．

4.1. 証明の方針. 簡単にアイデアだけ述べる. 我々は

$$\mathrm{Hom}_{G\times G'}(\omega\otimes I(\sigma,\lambda), I'(\sigma,\lambda))$$

の元 T で, 次の条件を満たすものを構成する.

(i) 任意の $f\in I(\sigma)$ に対して,

$$T(\Phi, f)\neq 0$$

となる $\Phi\in\omega$ が存在する.

(ii) $i\in\mathfrak{I}$, $\Phi\in\omega$, $f^{(\lambda)}\in I(\sigma,\lambda)$ に対して,

$$\begin{aligned} &M(w_i', \sigma, \lambda)T(\Phi, f^{(\lambda)}) \\ &= |\delta|^{n_i\lambda_i}\omega_{\sigma_i}(\delta)^{-1}\epsilon(-\lambda_i+1/2, \sigma_i, \psi)T(\Phi, M(w_i, \sigma, \lambda)f^{(\lambda)}). \end{aligned}$$

が成り立つ.

これらの性質から, 定理は容易に導かれる.

Remark 4.2. 最近, 我々の構成法は一般の放物形部分群に対して適用できることが分かった. このことから, 緩増加表現に対して Plancherel 測度の対応が得られ, さらに supercuspidal 表現に対しては first occurence index に関する情報を得ることができる [I2].

References

[Ad] J. Adams, *L-functoriality for dual pairs*, Astérisque **171-172** (1989), 85–129.

[Ar] ———, *Unipotent automorphic representations: conjectures*, Astérisque **171-172** (1989), 13–71.

[G] ———, *R-groups and elliptic representations for unitary groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1267–1276.

[HKS] M. Harris, S. S. Kudla, and W. J. Sweet, Jr., *Theta dichotomy for unitary groups*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 941–1004.

[H] R. Howe, *θ-series and invariant theory*, Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math. 33-1, Amer. Math. Soc., 1979, pp. 275–285.

[I1] A. Ichino, *On the local theta correspondence and R-groups*, preprint, 2002.

[I2] A. Ichino, *On the local theta correspondence and Plancherel measures*, in preparation.

[KS] A. W. Knapp and E. M. Stein, *Intertwining operators for semisimple groups, II*, Invent. Math. **60** (1980), 9–84.

[K1] S. S. Kudla, *On the local theta-correspondence*, Invent. Math. **83** (1986), 229–255.

[K2] ———, *Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs*, Israel J. Math. **87** (1994), 361–401.

[P] D. Prasad, *Theta correspondence for unitary groups*, Pacific J. Math. **194** (2000), 427–438.

[S1] A. J. Silberger, *The Knapp-Stein dimension theorem for p-adic groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), 243–246; *Correction*, Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979), 169–170.

[S2] ———, *Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Princeton University Press, 1979.

[W] J.-L. Waldspurger, *Démonstration d'une conjecture de dualité de Howe dans le cas p-adique, $p \neq 2$*, Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I, Weizmann, 1990, pp. 267–324.

〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138
E-mail address: ichino@sci.osaka-cu.ac.jp