数理解析研究所講究録 1282 巻 2002 年 153-155



# 「力学系理論、可積分系」セッション説明

独立行政法人・通信総合研究所　　梅野　健(Ken Umeno)
Communications Research Laboratory,
Independent Administrative Institution

## 1．　はじめに

近可積分ハミルトン系の数理と応用にとって、そもそも可積分性とは何かという問題は、ガイドラインとすべき基礎的な問題であるにも関わらず、現在でもまだ不明な問題が多い。このセッションでは、その広い意味の力学系の可積分性に関わる次の 3 つの問題を考察する。

(a) 非可積分性充分条件とカオスの関係
(b)離散時間力学系の可積分性
(c)可解カオス系と力学的決定論的拡散

以下、順に説明する。

## 2．　非可積分性充分条件とカオスの関係

微分方程式の可積分系の必要条件を導出するという問題は、コワレフスカヤに始まる特異点解析を源流とする Ziglin 解析、その後の吉田のコワレフスキー指数による必要条件の導出、モラレスによる微分ガロア理論による解析と発展し続けており、問題は古くとも新しい話題を提供し、我々の数理的知見を今尚広げる古くて新しい問題の典型の問題と言ってよい。この可積分系の充分条件から、逆に非可積分系の充分条件が対偶をとり得られるが、この非可積分系の充分条件と、非可積分系の一種とされるカオスの発生条件と、どの程度一致しており、又どの程度乖離しているかは（数学的な）可積分性と（物理的な）カオスとの基本的関係を探る上で、大変興味ある問題である。矢々崎は、「サドル・センターを有するハミルトン系における可積分性へのガロア的障壁，メルニコフ関数およびアーノルド拡散型現象」という題の講演の中で、この問題を取り上げ、モラレスの微分ガロア理論によって与えられる非可積分性の充分条件とカオスを生ずる充分条件として知られるメルニコフ条件とが、ある
サドル・センターを有するハミルトン系で一致するという最新の結果を報告す

る。この一致がどの程度一般的に成立するかは今後の解析を待たねばならないが、少なくとも、数学的にも非可積分性とカオスが密接に関連することを示している点で、又、数学的に厳密にかつ有限手順で判定可能な非可積分性の充分条件が、カオスか否かを判定するのに使える可能性があることから、この分野の研究の進展は、ハミルトン系に限らず力学系理論一般にとっても重要である。

## 3. 離散時間力学系の可積分性

これは、例えば、次の様な離散時間力学系

$$X_{n+1}=F(X_n)$$

の可積分性とは何か？という問題である。

保存量を持つことが可積分性を意味するのか？又は一般解が解けるという意味で可解性が可積分性を意味するのか？そうであれば、$F(x)=4x(1-x)$の場合、一般解を有する可解カオス系であることが知られているが、それは可積分系なのか？　又離散系の可積分テストとして Singularity Confinment テスト(SC と呼ぶ)が知られているが、その SC は通るが、カオス的振る舞いをする系が Hietarinta によって見つかっており、離散系の可積分性の統一的な見方は未だ無いといってよい。その様な状況の中で、近藤は、「離散系の可積分性とその応用」という題の講演の中で、ソリトン理論から急速に発展した離散時間可積分系を可積分性を保存する差分スキームとして捉え、最近の有理写像で与えられる写像力学系の有理写像に含まれるの既約多項式最大次数が、iteration と共に指数関数的に増加するか、又は多項式オーダーに止まるかを判定に使えば、今までの矛盾が解決するというフランスを中心としたグループの研究成果を報告する。これは、有限の手順で判定可能な判定条件を与えたというよりも、離散（非）可積分性の特徴付けをしたに過ぎないとの見方も可能である。但し、これが単なる特徴付けに終わるのは、近藤によっても紹介があるネバリンナ理論によっても、有限の手順で上記判定ができない場合である。

実は、この問題は、予想以上に深刻である。例えば、リヤプノフ指数を正とする系を非可積分系と考え、リヤプノフ指数が０とするのを可積分系と区別するのとどこが違うのだろうか？やはり、有限手順で判定できる離散可積分性の必要条件を導出する更なる工夫（根本的な手段変更を含める）が必要であろう。

ここで、著者は、問題の在り処をよりはっきりとさせるため、次の問題を提案する。Vezlov は、有理写像で与えられる写像力学系 F が可積分の必要充分条件として、ある何らかの有理写像 G と可換、つまり

$$F\circ G=G\circ F$$

であることを提案している。この様な写像力学系の例として、コサイン関数の倍角の公式で与えられるチェビシェフ多項式による可解カオス力学系、楕円関数の加法公式により与えられる可解カオス力学系がある。これらは、全て、上述の意味では、つまり、有理写像の最大既約多項式次数が指数関数的か否かという意味では、全て非可積分である。つまり、写像の最大既約多項式次数の増加によって特徴付けされる離散時間力学系の可積分性と写像の可換性によって定義される写像の離散時間力学系の可積分性とは明らかに矛盾する。

これは、如何に解決されるのか？

鍵となるのが、可換な写像力学系であり、カオスと可積分性の両方の特徴を持つ可解カオス系であると考える。近藤は、最後に、行列式解による可解カオス系の一般解を行列式解で表示するという最新の研究成果を報告する。

## 4．可解カオス系と決定論的拡散

上述した様に、可積分性の新しい問題である離散時間力学系の可積分性を考える上で、可解なカオス系というのは、興味深い話題を提供する。可解なカオス系は、その名の通りカオス系であり、その振る舞いは、ランダムであり、よって確率論的振る舞いをする。では、その可解カオス系というのは、確率論的振る舞いを記述する上で、どの位の表現能力を持つかという問題が生じる。梅野は、「決定論的拡散のルベーグスペクトル解析」と題する講演の中で、ハミルトン系の中の確率論的振る舞いとして興味深い拡散（この場合、決定論的メカニズムによる拡散なので決定論的拡散）の問題を、可解カオスに関連する直交関数により展開するという方法（ルベーグスペクトル解析）を提案し、その結果、拡散係数が、ルベーススペクトルの展開係数によって陽に与えられることを示す。

## 5．終わりに

このセッションは、特に力学系の可積分性に関連する話題について議論することを目的とした。話題は、微分方程式の可積分性から、離散方程式の可積分性、可解カオス系の話題と近可積分系ハミルトン系周辺の力学系理論を新旧、織り交ぜた形となる。直ちに、これらの研究成果が、近ハミルトン系の数理と応用に生かされるということは期待できないにしても、近可積分系の問題は、ポアンカレが最初に、非可積分系を”意識”した時を起源とすることを考えると、可積分性にまつわるこれらの話題から、新しい近可積分系の問題が生まれることは多いに期待できると思われる。