

近可積分ハミルトン系における古典量子化条件について

首藤 啓

東京都立大学 大学院理学研究科
shudo@phys.metro-u.ac.jp

1. 近可積分系の古典量子化

近可積分ハミルトン系の「古典量子化条件」の問題を考える。近可積分系の位相空間には、トーラスとカオスが共存する。その構造はたとえ系が2次元であっても極めて複雑である。カオスとトーラス、という質的に全く異なる不変集合がひとつの位相空間内に共存する系の古典量子化はどのように与えられるべきだろうか？

まず、トーラスが位相空間全面を覆う完全可積分系を考える。完全可積分系ではトーラスという不変構造上がある。Bohr-Sommerfeldの方法は、1次元系の周期軌道上に定在波が立つ条件として量子化条件を与えるものであるが、一般の多次元完全可積分系では、対応するトーラスに対して同様の条件を課すことで古典量子化が実行される [1]。

一方、カオスが位相空間全体に広がる双曲型力学系では、トーラスは存在しない代わりに周期軌道が位相空間を稠密に埋め尽くしている。そのような周期軌道全体を用いることにより古典量子化条件を考えることができる。EBK量子化では1つのトーラスは1つの固有状態に対応していたが、双曲型力学系では、跡公式を介して、すべての周期軌道とすべてのエネルギーレベルが結びつけられる [2]。

では、両者が混在する近可積分系ではどうだろうか？ すぐに思い付く答えは(実際にどのように実行するかどうかは別にして)、位相空間上トーラス領域に対しては、EBK量子化を、カオス領域に対しては跡公式を、というものである。実際、近可積分系でのレベル統計を議論する際、Berry-Robnik公式と呼ばれる完全可積分系とカオス系をつなぐ、一種の内挿する公式が知られているが、これは、トーラス領域とカオス領域に対する量子状態を全く独立に重ね合わせることによって導出されるものである [3]。近可積分系のレベル統計の数値計算結果は、この内挿公式が、かなりの精度で、純粹に量子力学的に計算されたものを再現することから、トーラス領域とカオス領域とがそれぞれ別々に量子化される、という描像は第0近似的には良さそうにも見える [4]。

しかしながら、この考え方には、近可積分系に関する問題の中で、最も大事な(そして難しい)点が全く考慮されていない。というのは、近可積分系の位相空間上に存在するトーラス領域とカオス領域とは互いに複雑な入れ子構造を作っており、系のパラメータを動かすことなどによってそれぞれを独立にコントロールすることはできないからである。両者は明かに位相空間に“混在”している。

量子論ではこのことがより顕著に反映される。例えば、「トーラスを量子化している」固有関数は、トーラス上にそのほとんどの確率密度が局在しているものの、その裾がカオス領域に入ったところでは必ずカオス領域の影響を受けるし、「カオスを量子化している」はずの固有関数も、カオス領域全体には広がることができるが、その裾がトーラスにかかった場所ではトーラスにブロックされる。つまり、近可積分系では、どんな固有状態でも、そのひとつの状態の中に、トーラス・カオス双方の性質を併せもっている。このことが近可積分系の大きな特徴であって、この点を無視してそれぞれのエルゴード成分を独立に処理してしまうと、近可積分系固有な問題は何もなくなってしまう。

量子論は、古典的に遷移不可能な不変集合の間どうしであっても遷移することができる。これは、量子論が波動的な性質をもっているからに他ならず、いわゆる「量子効果」の帰結である。ここでは、それらをすべてを引くくめて、広い意味での「トンネル効果」と呼ぶことにすると（特に、位相空間の不変構造間のトンネル効果の場合、動的トンネル効果、と呼ばれる）、近可積分系で問題になるのは、トーラスとカオスという質的にまったく異なる不変集合がトンネル効果を伝えていかに結合するか？ということになる。

2. 2次元保測写像の動的トンネル効果とジュリア集合

では、位相空間上の異なる不変集合はどうやって量子的につながることができるのか？ここでは、そのことを古典的に考えていく。特に、複素領域の古典軌道を用いることにより、実古典軌道では表現することのできない純量子効果の記述によってその解釈を行う。複素軌道によって量子効果、特にトンネル効果を計算する、というアイデア自体は決して新しいものではなく、古くはインスタント理論に始まる常套手段の一つである、しかしながら、従来の複素軌道を用いた議論はすべて完全可積分系に限られ、以下にみるように非可積分系では全く状況が異なってくる。

以下、話しを簡単にするために、2次元保測写像：

$$F : \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'(p_n) - V'(\theta_n) \\ \theta_n + H'(p_n) - V'(\theta_n) \end{pmatrix} \quad (1)$$

を考える。 $H(p) = p^2/2$, $V(\theta) = K \sin \theta$ とすれば、標準写像、 $H(p) = p^2/2$, $V(\theta) = c\theta - \theta^3/3$ は、エノン写像である。

上記写像の量子論は、状態 $p_0 = \alpha$ から状態 $p_n = \beta$ への n ステップのユニタリーな遷移振幅 U^n ,

$$\langle p_n | U^n | p_0 \rangle = \int \cdots \int \prod_j d\theta_j \prod_j dp_j \exp \left[-\frac{i}{\hbar} S(\{\theta_j\}, \{p_j\}) \right], \quad (2)$$

を考えることによって構成される。

以後、議論の対象となる、半古典論評価は、離散的な Van-Vleck type のプロパゲータ：

$$\Psi_n(p_0, p_n) \approx \sum_{\substack{p_0=\alpha \\ p_n=\beta}} A_n(p_0, \theta_0) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} S_n(p_0, \theta_0) \right\}, \quad (3)$$

の表式で与えられる。近似 \approx は、純量子論プロパゲータに対する鞍点近似の主要部のみを考慮していることを表す。ここで、 $S_n(p_0, \theta_0) = \sum_{j=1}^n [H(\theta_j) - V(\theta_j) + \theta_j(p_j - p_{j+1})]$ は古典軌道に沿った作用汎関数、 $A_n(p_0, \theta_0) = [2\pi\hbar(\partial p_n / \partial \theta_0)_{p_0}]^{-1/2}$ は振幅因子である。ここでは、プロパゲータ（波動関数と言ってもよい）の表示として p 表示をとっているため、始状態 p_0 と終状態 p_n は実数でなければならない。このことから直ちに次のことがわかる。もし、始状態 p_0 と終状態 p_n が古典的に同じ不変成分上に乗っていれば、 $p_0 \rightarrow p_n$ を結ぶ古典軌道が実面上に存在するが、そうではなく、両者が、異なる不変成分上にある場合、2状態を結ぶ古典軌道は少なくとも実面上には存在しない。

ところが、始状態 p_0 が完全に指定されている一方、 p_0 に共役な θ_0 は全く自由にとることができるため、そのことを最大限に利用すると、複素軌道を使って実ダイナミクスでつながって

ない不変成分間をつなぐことができる。すなわち、初期座標 θ_0 を実数とは限らず、 $\theta_0 = \xi + i\eta$ のように複素領域に解析接続することにより、始状態 p_0 と終状態 p_n をつなぐ軌道の候補を広げることができる。このことによって、実面上で経路が存在しない状態間に古典軌道（複素古典軌道）による橋渡しがなされる。この複素軌道によって始状態 p_0 と終状態 p_n との間のトンネル遷移が記述されることになる [6]。半古典プロパゲータ (3) に寄与する複素軌道は、以下で定義される集合：

$$\mathcal{M}_n \equiv \bigcup_{\beta \in \mathbb{R}} \mathcal{M}_n^{*,\beta} = \bigcup_{\beta \in \mathbb{R}} \{(p, \theta) \in \mathbb{C}^2 \mid p_n = \beta\} \quad (4)$$

と、初期座標 θ_0 とのスライス $\{p_0 = \alpha\}$ によって与えられる。

系が非可積分であると、たとえ、始状態 p_0 と終状態 p_n とが実古典軌道で結ばれていない場合でも（たとえば、始状態 p_0 と終状態 p_n とが異なるトーラス上にある、あるいは、始状態 p_0 がトーラス上にあり、終状態 p_n がカオス領域にある、など）、両状態を結ぶ複素軌道は極めてたくさん存在する [6]。これらの中で、作用汎関数 $S_n(p_0, \theta_0)$ の虚部が小さいものが（絶対値が大きいので）、半古典和 (3) の中で最も大きな寄与を与え（作用虚部の絶対値が大きく符号が正のものはストークス現象で切り落とされることに注意 [7]）、それらの間の競合関係を議論することは、トンネル効果の詳細を議論する上でたいへん重要な課題であるが [8]、ここではその点よりも、半古典和に寄与する軌道の必要条件として、 $n \rightarrow \infty$ でも作用汎関数の虚部が有限に留まる次のような軌道の集合：

$$\mathcal{C}_{\text{Laputa}} \equiv \{(p, \theta) \in \mathcal{M}_\infty \mid \text{Im } S_n(p, \theta) \text{ converges absolutely at } (p, \theta)\} \quad (5)$$

を考え、その素性を追求したい [5]。ただしここで、

$$\mathcal{M}_\infty \equiv \bigcup_{\beta \in \mathbb{R}} \mathcal{M}_\infty^\beta, \quad (6)$$

であり、 \mathcal{M}_∞^β は $\mathcal{M}_n^{*,\beta} \equiv \{(p, \theta) \in \mathbb{C}^2 \mid p_n = \beta\}$ のハウスドルフ極限として与えられる。Laputa の命名は、寄与軌道の数値的な探索の途上発見された、初期値面内の特徴的な構造に対して付けられたもので、半古典和 (3) の中で大きな振幅をもつ軌道群である [6]。実は、このように定義された半古典和寄与軌道（の候補）は、考えている写像 (1) を複素領域に解析接続した複素力学系のジュリア集合と以下のような関係にある：

定理 1 (Ishii) F は (1) で与えられる \mathbb{C}^2 上の複素写像とし、 $H(p) = p^2/2$ 、 $V(\theta) = c\theta - \theta^3/3$ とする。 $h_{\text{top}}(F)$ を F の実面上のトポロジカルエントロピーとするととき、

- (i) もし、 $h_{\text{top}}(F|_{\mathbb{R}^2}) > 0$ であれば、 $\overline{\mathcal{C}_{\text{Laputa}}} \supset J^+$ 。
- (ii) もし、 F が J 上で双曲的かつ、 $h_{\text{top}}(F|_{\mathbb{R}^2}) > 0$ であれば、 $\overline{\mathcal{C}_{\text{Laputa}}} = J^+$ 。
- (iii) もし、 F が J 上で双曲的かつ、 $h_{\text{top}}(F|_{\mathbb{R}^2}) = \log 2$ であれば、 $\mathcal{C}_{\text{Laputa}} = J^+$ 。

ここで、前方 (resp. 後方) ジュリア集合 J^\pm は、以下の前方 (resp. 後方) 充填ジュリア集合

$$K^\pm = \{(p, \theta) \mid \{F^{\pm n}(p, \theta)\}_{n>0} \text{は有界}\} \quad (7)$$

の境界：

$$J^\pm = \partial K^\pm. \quad (8)$$

で与えられるものである。定理の証明に本質的に使われるのは、以下の Bedford-Smillie による「収束定理」である：

定理 2 (Bedford-Smillie) M を J^- 内の局所 1 次元部分多様体とすると、定数 c が存在して、

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2^n} [f^{-n} M] = c \cdot dd^c G^\pm \quad (9)$$

ただし、

$$G^\pm(x, y) \equiv \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2^n} \log^+ \|f^n(x, y)\|. \quad (10)$$

は、 K^\pm に対するグリーン関数で、 dd^c 、 $dd^c u \equiv 2i \sum_{j,k} \partial u / \partial z_j \partial \bar{z}_k dz_j \wedge d\bar{z}_k$ で定義される複素ラプラシアンである。また、 $[M]$ は、 M の積分カレントであり、 $[M](\phi) = \int_M \phi|_M$ で与えられるものである。

定理 1 は、(i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii) となるにつれて（つまり、理想カオス系に近づくにつれて）半古典寄与集合とジュリア集合との関係は強くなるが、ここで注目したいのは (i) の場合である。(i) は、エノン写像のパラメータがいかなるときにも成り立つステートメントであり、**KAM トーラスとカオス領域が実面に共存する近可積分系に対しても成立する**。この事実は、Bedford-Smillie の上記定理が、エノン写像に対する何の仮定をも必要としないことからの直接の帰結である。実面に制限された力学系では、明かに上記と類似のことは成立しない。なぜならば、実近可積分系では、カオス領域が KAM トーラスによって分断されており、カオス領域内にある任意の初期値集合がたった 1 つの不変集合に収束することは有り得ないからである。このことから、Bedford-Smillie の収束定理が、複素力学系固有の著しい性質を主張していることがわかる。

特に、グリーン関数 $G^\pm(x, y)$ から (1,1)-カレント

$$\mu^\pm \equiv \frac{1}{2\pi} G^\pm(x, y) \quad (11)$$

を定義すると、 $\text{supp } \mu^\pm = J^\pm$ となり、さらに、 $\mu \equiv \mu^+ \wedge \mu^-$ によって与えられる μ は F -不変な確率測度になり、一般に $J^* \equiv \text{supp } \mu \subset J$ となる [9] (F が双曲的な場合は、 $\text{supp } \mu = J$ となる)。非可積分系系のトンネル現象を理解する上で最も重要なのは以下の事実である。

定理 3 (Bedford-Smillie) μ は混合的である。

このことからただちに、 μ のエルゴード性が言える。つまり、複素エノン写像は、 $J^* = \text{supp } \mu$ 上で、系が近可積分にあってもジュリア集合上ではエルゴード性が成り立っていることになる。当然のことながら、 J^* は、写像 F に対してただひとつ定まるものであるから、ラフに言えば、複素領域には 1 つのカオス領域しか存在しないことをこの定理は主張しているのである。この事実は、カオス的成分が一般には KAM トーラスで分断され無限個存在する近可積分な実写像と全く対照的であることに注意したい。

3. 近可積分系の滞留点集合と回転領域

次に、カオス成分とそれ以外の成分とが複素空間の中にどのように住み分けているかを考えてみる。系が近可積分であるとき、実力学系のトーラス全体は KAM の定理より実位相空間上で正の測度をもつ。つまり、KAM トーラスは、実 2 次元平面上で 2 次元体積 (= 面積) をもつ。

一方, ジュリア集合 J , および充填ジュリア集合 K はその定義より以下が直ちにいえる. 仮に充填ジュリア集合 K が4次元体積をもつ場合を考えてみる. このとき, $J \neq K$ であり, 充填ジュリア集合は内点をもつことになる. 最も詳しく調べられている1次元多項式写像では, ジーゲル円板・エルマン環といった, いわゆる回転領域が現れる場合が知られ, その場合, K は内点をもち面積 (つまり, 2次元体積) をもつ.

逆に, K が4次元体積をもたないときには, 再び定義より, $J = K$ となる. 実面のKAMトーラス上の軌道は, 前方, および後方時間発展双方に対して有界なので, 当然 K の要素であるが, K が4次元体積をもたないときには, KAMトーラスがジュリア集合 J の要素であることになる. ジュリア集合は, 複素空間上でのいわばカオス的に振る舞う成分であるから, その中にKAMトーラスが含まれる, というステートメントは実力学系を考えると奇妙に聞こえるが, 論理的にはそうならなければならない. ジュリア集合上の確率測度 μ がエルゴード的である, という定理3と併せて考えると, もし $J = K$ であれば, 実面のKAMトーラス上の任意の近傍に, J 上をエルゴード的に経巡る軌道 (もちろん, 複素軌道) が存在することになる. 実面上では, KAMトーラスが作る円環領域の間に挟まれて外に出ることのできない軌道も, 初期条件にわずかでも虚部をもたすことによって (ただし, ジュリア集合の中に入るようにして) J 上どこにでも到達させることができることになる. 同様のことは, 標準写像を使った複素ホモクリニック軌道に対しての数値的な考察によっても予想されている [10]:

予想 (Lazutkin-Simó) 標準写像における複素安定・不安定多様体の閉包は全実面を含む.

ここまでの議論から想像されるように, 充填ジュリア集合 K が \mathbb{C}^2 空間の中で体積をもっているか否か, という点は, 複素軌道によるトンネル効果を記述していく上で極めて重要である. 残念ながら, 複素エノン写像に関して厳密にわかっているのは, 体積が保存しない場合のみであり, 我々が最も興味ある保測写像の関する厳密な結果はまだない. すなわち, a を F のヤコビアンとするとき,

$$(i) |a| = 1 \text{ のとき, } m(K) = m(K^+) = m(K^-) < +\infty$$

$$(ii) |a| < 1 \text{ のとき, } m(K^-) = 0 \text{ で, } m(K^+) = 0 \text{ または } \infty$$

$$(iii) |a| > 1 \text{ のとき, } m(K^+) = 0 \text{ で, } m(K^-) = 0 \text{ または } \infty$$

である.

面積保測写像の場合, アトラクターが存在しないことから, K の内点になる候補としては, 複素領域を中立に運動する軌道, つまり回転領域が考えられる. 円板 $\Delta = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < r\}$ ($r > 0$) からの1対1の正則写像 $\phi: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ と正整数 n が存在し, $f^n(\phi(\zeta)) = \phi(e^{i\pi\kappa}\zeta)$ ($\zeta \in \Delta$) (ただし κ は無理数) となる場合, $D = \phi(\Delta)$ をジーゲル円板をいう. 同様に, 円環 $A = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid r_1 < |\zeta| < r_2\}$ ($0 < r_1$) からの1対1の正則写像 $\phi: A \rightarrow \mathbb{C}$ と正整数 n が存在し, $f^n(\phi(\zeta)) = \phi(e^{i\pi\kappa}\zeta)$ ($\zeta \in A$) (ただし κ は無理数) となるとき, $\mathcal{H} = \phi(A)$ をエルマン環と呼ぶ.

ジーゲル円板の存在は, ジーゲルの線形化問題として古くから知られ, 特に, 1次元複素写像 $z' = \lambda z + z^2$ ($\lambda = e^{2\pi i\kappa}$, κ は無理数) に対して, κ が Bryuno 条件を満たす無理数であることが線形化可能の必要十分条件であることなど, 詳しい状況が研究が進んでいるが, いま考えている2次元保測写像は, そもそも非共鳴条件を満足しない場合に相当していることから, ジーゲル円板が存在することは考えられない. エルマン環についても同様のことが予想される.

次にKAMトーラスが作る回転領域を考えてみる。写像(1)に対するKAMトーラスとは、 (p, θ) 面上、(しかるべき)無理数の回転数 ω を与えるごとに、 φ でパラメトライズされる曲線：

$$C_\omega : \begin{pmatrix} p \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi\omega + u(\varphi, \omega) - u(\varphi - 2\pi\omega, \omega) \\ \varphi + u(\varphi, \omega) \end{pmatrix} \quad (12)$$

である。ここでは写像(1)の $H(p) = p^2/2$ の場合を考えている。KAMトーラス上での軌道の時間発展は、 $\varphi_{n+1} = \varphi_n + 2\pi\omega$ である。共役関数 $u(\varphi, \omega)$ は、以下の関数方程式から決まる：

$$u(\varphi + 2\pi\omega, \omega) - 2u(\varphi, \omega) + u(\varphi - 2\pi\omega, \omega) = V'(\varphi + u(\varphi, \omega)). \quad (13)$$

与えられた ω に対するKAMトーラスの存在は、解析的な $u(\varphi, \omega)$ が存在するか否か、という問題に置き換えられる。Lindstedt級数、

$$u(\varphi, \omega) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} K^k \sum_{\nu \leq k} e^{i\nu\varphi} u_\nu^{(k)}(\omega) \quad (14)$$

を考え、その収束半径を考えることにより、KAMトーラスの崩壊を議論することができる[11, 12]。 ω を決めるごとにLindstedt級数の収束半径が定まる(critical function)。系が非可積分であることは、どのような ω に対しても収束半径は有限になることに反映される。つまり、実面に存在するKAMトーラスは、系が非可積分であると、自然境界の出現により複素面上での解析性が崩れる。(以上の事実は、数値計算による状況証拠があるのみで厳密な証明はまだないようであるが…)

しかし、摂動強度 K が十分小さい場合、少なくとも実面に十分近いところでは、複素KAMトーラスが存在する。複素KAMトーラスは、 \mathbb{C}^2 の力学系の中で充填ジュリア集合 K に属するが、 \mathbb{C}^2 の中で体積をもつだろうか？KAMの定理より、正の収束半径をもつような ω の集合は、 ω 軸上で正の測度をもつ。このことから、近可積分系での複素KAMトーラスは、トーラスをパラメトライズする $[\varphi$ の実部方向+虚部方向]の2次元に加えて $[\omega$ 方向]に長さをもつため3次元にはなるが、4次元にはならない。 ω を複素領域まで拡張した場合には、Lindstedt級数には、いわゆる小さい分母の問題がなくなり、 $\text{Re}\omega$ に対する無理数性の条件なく収束するが、しかし、その軌道は、有界に束縛されることなくスパイラル状に実面から離れ、ファトゥ成分 $F \equiv \mathbb{C}^2 - K$ に属する。

以上の考察より、保測な2次元複素写像の充填ジュリア集合は内点をもたない、つまり、 $m(K) = 0$ 、従って、 $J = K$ となっていることが予想される。(保測エノン写像に対する)数値計算もこのことを支持する。実際、 \mathbb{C}^2 内に初期点をもつほとんどすべての点は時間が経つといずれは無限遠に発散することが観察される。

4. 近可積分系での複素トンネル軌道

KAMトーラスに自然境界が存在することは、半古典和に寄与する複素軌道としてはどのような意味をもつだろうか。まず、 $K = 0$ の場合を考える。プロパゲータ(2)では p 表示が用いられたが、状態 $|p\rangle$ は、写像(1)の非摂動系($K = 0$)の固有状態である。 $K = 0$ での半古典プロパゲータ(3)を考えると、初期運動量 p_0 と最終運動量 p_n が異なる場合、すなわち、 $\alpha \neq \beta$ の場合、初期座標 θ_0 をいくら複素領域に解析接続しても、状態 p_0 と状態 p_n を結ぶ古典軌道は存在しない。 $p = \text{const}$ で指定される完全可積分系のトーラスは複素解析的であるため、ト

ラスを指定する初期状態から軌道が出ることはできないからである。時間発展しない状態は固有状態なので、 $|p\rangle$ が固有状態を与える、つまり、 $p = \text{const}$ で指定されるトーラスが1つの固有状態を定めていることがわかる。

一方、 $K > 0$ で系が非可積分系になると、状態 $|p\rangle$ は固有関数ではなくなる。ではどういう状態が固有状態か？ということを上と同様に時間領域から見るために、 $K > 0$ の場合のトーラスを初期状態に取った時間発展を考える。 $K > 0$ での各トーラスは、 ω を与えたとき、(12)式により決まる C_ω を決めることに相当しているの、プロパゲータの初期状態として $|C_\omega\rangle$ を選べば良い。

1節の設定では、複素トンネル経路を寄与に含めるために、初期座標を $\theta = \xi + i\eta$ と複素領域に拡張したが、KAMトーラス状態を初期条件にとる立場でそれに相当するのは、 $\varphi = \xi + i\eta$ とすることである。トーラス C_ω は、共役関数 $u(\varphi, \omega)$ によって決まったが、 $\varphi = \xi + i\eta$ とすることは、そのトーラスを複素領域に拡張することに他ならない。

ところが、既に述べたように、系が非可積分であるとき、 $u(\varphi, \omega)$ を定める Lindstedt 級数は複素面に自然境界をもつ。Lindstedt 級数の収束半径内では、完全可積分系のトーラスと全く同様、初期状態 C_ω が指定されたときの軌道はその（複素）トーラスから外に出ることができず、異なる状態への遷移を記述する古典軌道は存在しないが、非可積分系でそれが可能なのは Lindstedt 級数の収束半径内だけである。自然境界を越えて φ を虚方向に広げると、もはやトーラスが存在しないところに出てしまう。半古典プロパゲータの初期条件としては、 $\varphi = \xi + i\eta$ の虚部 η を制限する理由は何もなく、自然境界の外側にある初期条件を考えても一向に構わないので、半古典プロパゲータの初期値集合としては、必ず自然境界の外の初期値を拾ってきってしまう。

ここで、話しをエノン写像に限定して定理1~定理3と、複素KAMトーラスが自然境界をもつこととの関係を考えてみる。前節で議論したように、もし、充填ジュリア集合 K が内点をもたないならば、複素KAMトーラス自身もジュリア集合 J であり、 μ がエルゴード的であることから、複素KAMトーラスの任意の近傍にエルゴード的に J 内を動き回る軌道が存在するはずである。このことから、自然境界が現れることにより複素トーラスが途切れた場所にも、当然、 J 内を彷徨するジュリア集合上の軌道が存在することが期待される。

つまり、半古典プロパゲータの初期条件を実面のトーラスに置き、 $\varphi = \xi + i\eta$ により解析接続していくと、必ずどこかでトーラスの自然境界に達する。そして、そのすぐ近傍にはジュリア集合全体を経巡ることのできるエルゴード軌道が存在することから、どんなに実トーラスに忠実な初期条件を選んだとしても、 η が自然境界に達したところで、どうしても最初に選んだトーラス面から外れて動く軌道を初期条件の集合の中に取り込んでしまう。ジュリア集合上を動くエルゴード的な軌道は、ジュリア集合上、すべての点の任意近傍を通過するので、たとえ実面の初期状態をトーラス上に巧妙に選んでおいても、最初に指定した ω で決まるトーラス以外のトーラスにもいづれ近づくことができるばかりでなく、トーラス領域の外側に広がるカオスの海にも出ていくことができることになる。

超越関数を写像に含む場合（例えば、標準写像）には、ジュリア集合自体が有界領域に留まっていないことから（正確には、超越写像をもつ1次元写像ではジュリア集合が有界に収まっていない例が知られている。2次元写像でも数値計算を眺める限りでは、同様の性質をもっているように見える）、自然境界の外の状況はエノン写像とは異なることが予想されるが、自然境界の外側から始めた軌道は、ジュリア集合を伝って外側のカオス領域に出ることが出来る。我々がラピュータ鎖と呼んだ初期値面上の特徴的な構造も、実はそのような軌道に対応してい

5. ジュリア集合を介したカオス領域とトーラス領域との結合

近可積分系では、トーラスとカオスとは異なる領域に共存する。しかし、もし「2次元保測力学系の充填ジュリア集合は4次元体積をもたない」ことが正しければ（線形化の不可能性、KAMトーラスの自然境界の存在、直接の数値計算などはそのことを支持しているように見える）、実面上にある軌道を除けば、複素ジュリア集合上のエルゴード的な軌道が、有界な領域にあるすべて点をつないでいることになる。そのような軌道は、トーラス的な運動とカオス的な運動の両面を1つの軌道のなかに同時に兼ね揃えている。定理1 (i) は、トーラス ↔ カオス間のトンネル過程が、このような軌道を媒介として起こっていることを主張している。つまり、非可積分系のトンネル過程を担っているのは、このような意味でのジュリア集合上の軌道であり、実面上では分断されていたトーラス領域とカオス領域との間には、複素空間のジュリア集合、という「トンネル」を介してつながっている、というのが定理1の物理的解釈である。

さらに換言すれば、トーラスとカオスの両面を併せもつ量子論の波動関数は、複素力学系のジュリア集合によって体现されている、ということになる。この事実を踏まえると、冒頭に提起した問題に対するひとつの可能性が示唆される。近可積分系の古典量子化条件は、実力学系を見る限り、トーラス領域とカオス領域とは異なる種類の量子化条件をそれぞれ独立に課すことしかいまのところ方法はない。しかし、複素領域に広げた力学系では、量子化条件を課すべき自然な対象として、複素空間のジュリア集合という単一のエルゴード成分 μ が存在し、その上にサドル周期点が稠密に存在する。近可積分系において、 $cl(\text{サドル周期点}) \supset KAM \text{ トーラス}$ 、というようなことが成立していれば、サドル周期点の中でKAMトーラスをいくらかでも近似するものが存在することになり、KAMトーラスに対する量子化条件をそのようなサドル周期点に対する量子化条件で置き換えることができてもおかしくないだろう。しかるべき正当化が行われれば、近可積分系の古典量子化条件は非常に単純なものになる。

References

- [1] I.C. Percival, *Adv. Chem. Phys.* **36**, 1 (1977).
- [2] M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).
- [3] M.V. Berry and M. Robnik, *J. Phys. A* **17**, 2413 (1984).
- [4] T. Prosen and M. Robnik, *J. Phys. A* **27**, 8059 (1994).
- [5] A. Shudo, Y. Ishii and K.S. Ikeda, to be published.
- [6] A. Shudo and K. S. Ikeda, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 682 (1995); *Physica D* **115**, 234 (1998).
- [7] A. Shudo and K.S. Ikeda, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 4151 (1996); 首藤啓, 池田研介: 数理解析研究所講究録, **1133**, 53 (2000); *ibid*, **1168**, 55 (2000); *ibid*, **1180**, 48(2000); *ibid*, **1220**, 39(2001).
- [8] T. Onishi, A. Shudo, K.S. Ikeda and K. Takahashi, *Phys. Rev. E* **64**, 025201-1 (2001); 準備中.
- [9] E. Bedford and J. Smillie, *Invent. Math.* **103**, 69 (1991); *J. Amer. Math. Soc.* **4**, 657 (1991); *Math. Ann.* **294**, 395 (1992).