

# 一定渦度をもつ中心渦領域とその周りの渦領域の平衡形

京大・情報 福田 義之 (Yoshiyuki Fukuda)

京大・情報 船越 満明 (Mitsuaki Funakoshi)

Graduate School of Informatics, Kyoto University

## 1 はじめに

渦力学の分野において、互いの位置関係を変えずに、一緒に回転あるいは平行移動を行うような何個かの点渦の配置が数多く知られている。そして、その一部は、有限の大きさをもつ渦領域からなる配置に拡張された。すなわち、一定渦度をもつ渦領域の平衡形についての研究が約 25 年前から行われてきた。一定渦度をもついくつかの渦領域からなる 2 次元系を考えた場合、各点における速度はこれらの領域の境界の形と境界における渦度の差にのみ依存し、平衡形を求める問題は一次元的な形に定式化することができる。Deem and Zabusky [1] は最初にこのことを指摘し、このような定式化を 'contour dynamics' と呼んだ。彼らは、'V state' と呼ばれる、全体として平行移動あるいは回転を行う渦領域の平衡形をいくつか計算した。また、Zabusky et al.[2] は contour dynamics を用いた渦領域の相互作用のシミュレーションをいくつか示した。それ以後、contour dynamics は、非圧縮非粘性流体の 2 次元渦流れの研究において、広く使われる方法の 1 つとなった。さらに、逆符号の渦度をもち、形を変えずに平行移動する 2 つの対称な渦領域の形は、Pierrehumbert [3] によっても計算された。彼は、これらの渦領域の形を数値的に計算する上で効果的な反復法を用いた。また、Dritschel [4] は、一緒に回転する一定渦度の 2 個から 8 個の渦領域の平衡形を数値的に計算した。

ある点渦を中心とする円周上に、等しい強さをもつ何個かの点渦が等間隔で配置されたとき、これらの点渦からなる系は、その対的な位置関係を保ったまま一定の角速度で回転することが知られている。本研究においては、有限の大きさをもち一定渦度である渦領域に関して、この点渦系と同様な配置の平衡形を詳しく調べる。すなわち、ある角速度で回転する回転座標系においてその形が定常的であるような、中心渦領域とその周りの渦領域の形を調べることを目的とする。その際、周りの渦領域は等しい渦度をもつと仮定する。

本研究で調べられる中心渦とその周り渦は、多重渦構造をもつ竜巻 (Rotunno [5]) とある程度関係がある。すなわち、竜巻の中心付近の流体は剛体回転をしていて中心付近の領域は一定渦度をもっているが、強い竜巻の周りには、いくつかの小さな竜巻が発生することが観察されている。また、電子プラズマでの巨視的な力学は 2 次元非粘性流体の力学と対応が付き、プラズマでの電子密度は流体の渦度と対応していることが期待される。プ

ラズマの実験において、回転対称性をもつ平衡形に近い挙動を見ることができるといふ報告がなされている (例えば Kiwamoto et al. [6]) が、このような挙動は本研究と関係づけられるかもしれない。

## 2 問題の定式化

図1で描かれたような、中心渦とその周りの渦の平衡形を考える。中心渦を0番目の渦、そして、 $x$ 軸正方向上にある周りの渦を1番目の渦、その渦から反時計回りに、2から $N$ 番目の渦とする (図1は $N=2$ の場合に対応している)。周りの渦はすべて同じ形であると仮定し、中心渦の形は $\frac{2\pi}{N}$ の角度の回転に対して対称性をもつと仮定する。また、周りの渦の配置も同じ対称性をもつと仮定する。中心渦と周りの渦の渦度は、それぞれ $\omega_0$ 、 $\omega_1$ とする。 $a_0$ は $x$ 軸正方向と中心渦の境界の交点と原点の間の距離である。 $a_1$ と $a_2$ は、それぞれ、原点から $x$ 軸に沿って1番目の渦の最も近い点までの距離と最も遠い点までの距離である。それゆえ、 $a_0$ は中心渦の大きさに関するパラメータであり、 $a_1$ と $a_2$ は周りの渦の大きさに関するパラメータである。 $\alpha$ は、原点 $O$ の周りの $x$ 軸正方向からの角度であり、 $g_0(\alpha)$ は中心渦の形を決める関数である。また $\beta$ は、1番目の渦に対しては、点 $(\frac{a_1+a_2}{2}, 0)$ の周りの $x > \frac{a_1+a_2}{2}$ からの角度である。 $h_0(\beta)$ は周りの渦の形を決める関数である。以下では、 $h_0(\beta) = h_0(-\beta)$ の条件を満足し、かつ $g_0(\alpha)$ 、 $h_0(\beta)$ は一価関数である解に限定する。これらの仮定から、中心渦の形は $\frac{2(l-1)\pi}{N} \leq \alpha \leq \frac{2l\pi}{N}$ の範囲で $\alpha = \frac{(2l-1)\pi}{N}$ , ( $l=1, \dots, N$ ) に関して線対称性をもつことがわかる。

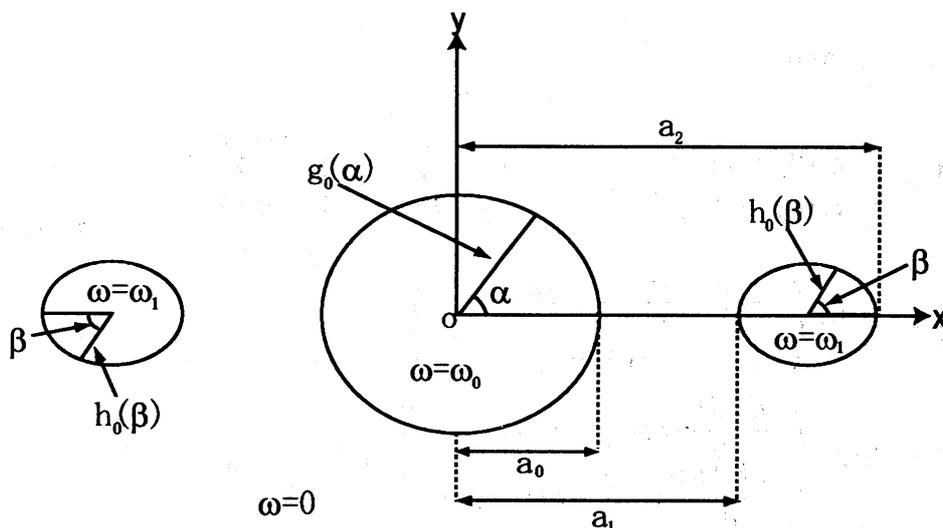


図1: 中心渦とその周りの $N$ 個の渦の配置. ( $N=2$ ).

$\Psi_0(g_0(\alpha), \alpha)$  と  $\Psi_1(h_0(\beta), \beta)$  を、それぞれ、角度 $\alpha$ と $\beta$ での中心渦と1番目の周りの渦

の境界上の流れ関数の値であるとする、それらは以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \Psi_0(g_0(\alpha), \alpha) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{C_0} \log r_{00}(\theta, \alpha) \{(x_0(\theta) - x_0(\alpha)) dy_0(\theta) \\ & - (y_0(\theta) - y_0(\alpha)) dx_0(\theta)\} \\ & - \frac{\omega_1^*}{4\pi} \sum_{j=1}^N \int_{C_j} \log r_{j0}(\theta, \alpha) \{(x_j(\theta) - x_0(\alpha)) dy_j(\theta) \\ & - (y_j(\theta) - y_0(\alpha)) dx_j(\theta)\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(h_0(\beta), \beta) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{C_0} \log r_{0k}(\theta, \beta) \{(x_0(\theta) - x_k(\beta)) dy_0(\theta) \\ & - (y_0(\theta) - y_k(\beta)) dx_0(\theta)\} \\ & - \frac{\omega_1^*}{4\pi} \sum_{j=1}^N \int_{C_j} \log r_{jk}(\theta, \beta) \{(x_j(\theta) - x_k(\beta)) dy_j(\theta) \\ & - (y_j(\theta) - y_k(\beta)) dx_j(\theta)\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

ただし、 $C_j$  は  $j$  番目の渦領域の境界線（反時計回り）であり、

$$\omega_1^* = \frac{\omega_1}{\omega_0},$$

$$r_{jk}^2(\theta, \theta_1) = (x_j(\theta) - x_k(\theta_1))^2 + (y_j(\theta) - y_k(\theta_1))^2, \quad (j, k = 0, \dots, N)$$

for  $\theta_1 = \alpha$  and  $\beta$ , and

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_0(\theta) \\ y_0(\theta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g_0(\theta) \cos \theta \\ g_0(\theta) \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} dx_0(\theta) \\ dy_0(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dg_0(\theta)}{d\theta} \cos \theta - g_0(\theta) \sin \theta \\ \frac{dg_0(\theta)}{d\theta} \sin \theta + g_0(\theta) \cos \theta \end{pmatrix} d\theta, \\ \begin{pmatrix} x_k(\theta) \\ y_k(\theta) \end{pmatrix} &= R(k) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right) + h_0(\theta) \cos \theta \\ h_0(\theta) \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} dx_k(\theta) \\ dy_k(\theta) \end{pmatrix} &= R(k) \begin{pmatrix} \frac{dh_0(\theta)}{d\theta} \cos \theta - h_0(\theta) \sin \theta \\ \frac{dh_0(\theta)}{d\theta} \sin \theta + h_0(\theta) \cos \theta \end{pmatrix} d\theta. \quad (k = 1, \dots, N) \end{aligned}$$

ここで、 $R(k)$  は次のように定義される行列である。

$$R(k) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi(k-1)}{N} & -\sin \frac{2\pi(k-1)}{N} \\ \sin \frac{2\pi(k-1)}{N} & \cos \frac{2\pi(k-1)}{N} \end{pmatrix}. \quad (k = 1, \dots, N)$$

ここで変数は  $a_2$  と  $\omega_0$  を用いて無次元化されている。もし、中心渦と周りの渦が形を変えずに一定角速度  $\Omega$  で回転しているならば、角速度  $\Omega$  で回転している座標系での流れ関数は、それぞれの渦境界上で一定の値であるという以下の条件を満足するべきである。

$$D_0 = \Psi_0(g_0(\alpha), \alpha) + \frac{1}{2}\Omega g_0^2(\alpha) \quad (2.3)$$

$$D_1 = \Psi_1(h_0(\beta), \beta) + \frac{1}{2}\Omega(r_0^2 + h_0^2(\beta) + 2r_0h_0(\beta)\cos\beta), \quad (2.4)$$

ただし、 $D_0$  と  $D_1$  は定数であり、 $r_0 = \frac{1}{2}(1 + \frac{a_1}{a_2})$  である。仮定された渦の形の対称性と  $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$  の定義から、 $g_0(\alpha)$  と  $h_0(\beta)$  は次の条件を満足すべきである。

$$g_0\left(\frac{2\pi(k-1)}{N}\right) = a_0^*, \quad (k = 1, \dots, N), \quad (2.5)$$

$$h_0(0) = h_0(\pi) = \frac{1}{2}(1 - a_1^*). \quad (2.6)$$

ただし、

$$a_0^* = \frac{a_0}{a_2}, \quad a_1^* = \frac{a_1}{a_2}.$$

式(2.3)、(2.4)、(2.5)、(2.6)を使って、

$$\Omega = 2 \frac{\Psi_1\left(\frac{1}{2}(1 - a_1^*), \pi\right) - \Psi_1\left(\frac{1}{2}(1 - a_1^*), 0\right)}{1 - a_1^{*2}}, \quad (2.7)$$

$$D_0 = \Psi_0(a_0^*, 0) + \frac{1}{2}\Omega a_0^{*2}, \quad (2.8)$$

$$D_1 = \Psi_1\left(\frac{1}{2}(1 - a_1^*), 0\right) + \frac{1}{2}\Omega, \quad (2.9)$$

を得る。式(2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.4)、(2.7)、(2.8)、(2.9)は、 $g_0(\alpha)$  と  $h_0(\beta)$  に関する非線形連立微積分方程式を与える。以上のことより、4つのパラメータ  $a_0^*$ 、 $a_1^*$ 、 $\omega_1^*$ 、 $N$  が解くべき問題の特徴づける。本研究では、Pierrehumbert [3] と同様な反復法を用いて、各渦領域の平衡形を表す解を数値的に求めた。その際、各渦領域を約 288 個の離散点によって表した。

### 3 結果

$S_1$  と  $S_2$  をそれぞれ、中心渦と周りの渦の面積とする。ここでは  $S_1$  と  $S_2$  の比を固定し、いくつかの  $S_1$  の値に対する渦領域の平衡形を重ね合わせて示す。本研究においては、すべての渦領域が同じ渦度をもつ場合の平衡形のみを調べた。すなわち、 $\omega_1^*$  を 1 に固定し、 $N = 2, 3, 4, 5$  に対して解を求めた。もし、 $S_1$  と  $S_2$  が両方とも十分に小さいならば、中心渦と周りの渦の形はいずれもほぼ円形に近いと期待できる。本研究では、 $S_1$  と  $S_2$  が増加するにつれてそれぞれの渦が円形からどのように変形していくかを調べる。

図2に、 $N = 2$  の場合の渦領域の平衡形の計算結果を、いくつか重ね合わせて示す。 $S_1$  と  $S_2$  が両方とも小さい時には、予想された通りすべての渦領域はほぼ円形に近い。しかしながら、 $S_1$  と  $S_2$  が十分大きくなると、中心渦は  $\alpha = 0, \pi$  で最も大きい曲率をもつ形となり、周りの渦は中心渦に最も近い点で最も大きい曲率をもつ洋なし型のような形となる。図2(a)と2(c)の比較から、中心渦の形の  $\alpha = 0, \pi$  での曲率は、 $\frac{S_2}{S_1}$  が大きいほど大きくなることがわかる。さらに、 $\frac{S_2}{S_1}$  が十分小さい時には、図2(c)にみられるように中心渦はすべての  $S_1$  の値に対して円形に近い。

図3に、 $N = 3$  の場合の渦領域の平衡形を重ね合わせて示す。 $N = 2$  の場合と同様に、 $S_2$  が十分大きい時、すべての  $\frac{S_2}{S_1}$  の値に対して、周りの渦は中心渦に最も近い点で最も大きい曲率をもつ洋なし型になる。また、図3(b)にみられるように、 $\frac{S_2}{S_1}$  が十分小さい時、中心渦はすべての  $S_1$  の値に対して円形に近くなる。しかしながら、大きい  $\frac{S_2}{S_1}$  に対する中心渦の変形は  $N = 2$  の場合と異なっている。すなわち、中心渦は周りの渦に最も近い”3”点で最も大きい曲率をもつ形となる。さらに、図3(b)と3(c)の比較から、中心渦の上記の3点での曲率は、 $\frac{S_2}{S_1}$  が大きいほど大きくなることがわかる。

図4は、 $N = 4$  に対して渦領域の平衡形を重ね合わせて示している。 $N = 2, 3$  のときと同様に、 $S_2$  が十分大きい時、周りの渦は中心渦に最も近い点で最も大きい曲率をもつ洋なし型になる。一方、 $\frac{S_2}{S_1}$  が1のときの中心渦の円形からの変形は、 $N = 2, 3$  の場合よりも小さくなる。さらに、図4(b)にみられるように、 $\frac{S_2}{S_1}$  が十分小さい時、中心渦はすべての  $S_1$  の値に対してほとんど円形になる。

$N = 5$  に対する渦領域の平衡形の重ね合わせは、図5に示される。図5(a)と5(b)からわかるように、 $\frac{S_2}{S_1}$  が十分小さい時には、十分大きい  $S_2$  に対して周りの渦は中心渦に最も近い点で最も大きい曲率をもつ洋なし型になる。しかしながら、図5(c)にみられるように、 $\frac{S_2}{S_1}$  が十分大きい時には、十分大きい  $S_2$  に対して、周りの渦は中心渦から最も遠い点で最も大きい曲率をもつ洋なし型になる。この周りの渦の傾向は、 $N = 2, 3, 4$  の場合と異なっている。また、図5からも推測できるように、 $N$  が十分大きいときには、中心渦はすべての  $S_1$  の値に対してほぼ円形となる。

本研究の数値計算では、 $a_0^*$  の値を固定して、 $a_1^*$  の値を十分1に近い値から少しずつ減少させていき、反復法によって解の得られる最小の  $a_1^*$  まで渦領域の形を求めた。このときの  $\frac{S_2}{S_1}$  の値は、 $a_1^*$  の減少に伴って必ずしも単調に増加するわけではなく、比較的小さい  $a_1^*$  の領域では減少していく場合もある。したがって、図5に示したように、ある与えられた  $a_0^*$  の値に対して、2つの異なる  $a_1^*$  が同じ  $\frac{S_2}{S_1}$  の値を与えることもある。図2—5においては、本研究の計算法で所定の  $\frac{S_2}{S_1}$  の値をもつ解が得られた最も大きい  $a_0^*$  までの渦領域の平衡形が示してある。

また、渦領域全体の回転角速度  $\Omega$  の値を、対応する点渦系の回転角速度  $\Omega_p$  と比較した。ここで対応する点渦系とは、各渦領域を、その重心の位置にあり同じ循環をもつ点渦で置き換えたものである。数値計算の結果、 $\Omega$  はつねに  $\Omega_p$  より大きいことがわかった。これは、各渦領域が円形から変形していることによる効果であり、少なくとも  $N = 2$  の場合は、上で述べた各渦領域の形を楕円形で近似したものから説明できる。

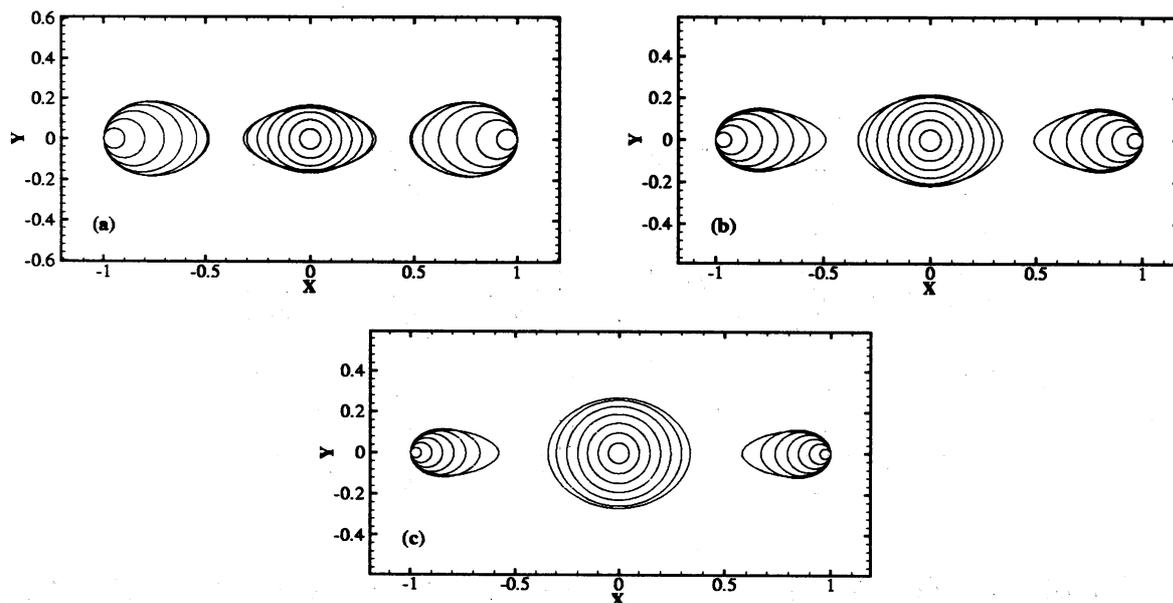


図 2: 渦領域の平衡形の重ね合わせ. ( $N = 2$ .) (a)  $S_1 : S_2 = 1 : 1$ . 内側の渦から外側の渦へ順番に、 $(a_0^*, a_1^*) = (0.05, 0.9002), (0.10, 0.8018), (0.15, 0.7068), (0.20, 0.6183), (0.25, 0.5420), (0.30, 0.4897), (0.315, 0.4809)$ , (b)  $S_1 : S_2 = 2 : 1$ . 内側の渦から外側の渦へ順番に、 $(a_0^*, a_1^*) = (0.05, 0.9293), (0.10, 0.8584), (0.15, 0.7872), (0.20, 0.7152), (0.25, 0.6421), (0.30, 0.5658), (0.340, 0.4906)$ . (c)  $S_1 : S_2 = 4 : 1$ . 内側の渦から外側の渦へ順番に、 $(a_0^*, a_1^*) = (0.05, 0.9499), (0.10, 0.8994), (0.15, 0.8477), (0.20, 0.7939), (0.25, 0.7362), (0.30, 0.6696), (0.340, 0.5799)$ .

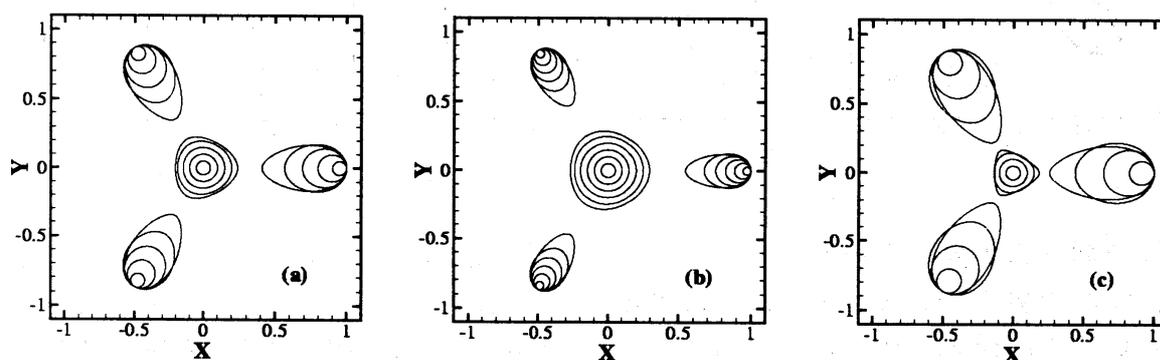


図 3: 渦領域の平衡形の重ね合わせ. ( $N = 3$ .) (a)  $S_1 : S_2 = 1 : 1$ . 内側の渦から外側の渦へ順番に、 $(a_0^*, a_1^*) = (0.05, 0.8996), (0.10, 0.7969), (0.15, 0.6881), (0.20, 0.5642), (0.24, 0.4089)$ . (b)  $S_1 : S_2 = 3 : 1$ . 内側の渦から外側の渦へ順番に、 $(a_0^*, a_1^*) = (0.05, 0.9421), (0.10, 0.8831), (0.15, 0.8215), (0.20, 0.7546), (0.25, 0.6757), (0.295, 0.5463)$ . (c)  $S_1 : S_2 = 1 : 3$ , 内側の渦から外側の渦へ順番に、 $(a_0^*, a_1^*) = (0.05, 0.8259), (0.10, 0.6450), (0.15, 0.4423), (0.185, 0.2599)$ .

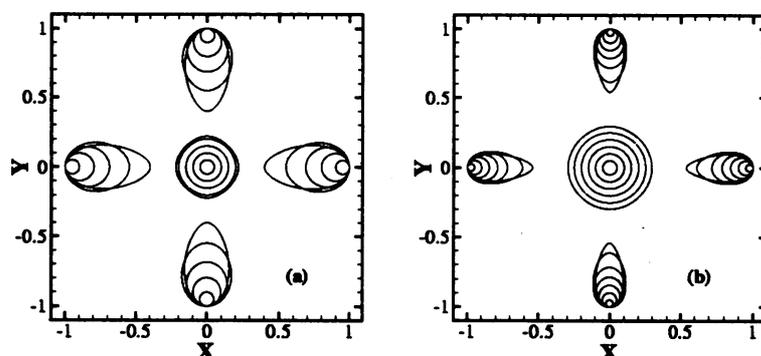


図 4: 渦領域の平衡形の重ね合わせ. ( $N = 4$ .) (a)  $S_1 : S_2 = 1 : 1$ . 内側の渦から外側の渦へ順番に、 $(a_0^*, a_1^*) = (0.05, 0.8996), (0.10, 0.7967), (0.15, 0.6859), (0.20, 0.5473), (0.220, 0.4000)$ . (b)  $S_1 : S_2 = 4 : 1$ . 内側の渦から外側の渦へ順番に、 $(a_0^*, a_1^*) = (0.05, 0.9498), (0.10, 0.8988), (0.15, 0.8454), (0.20, 0.7873), (0.25, 0.7183), (0.295, 0.6140), (0.295, 0.5411)$ .

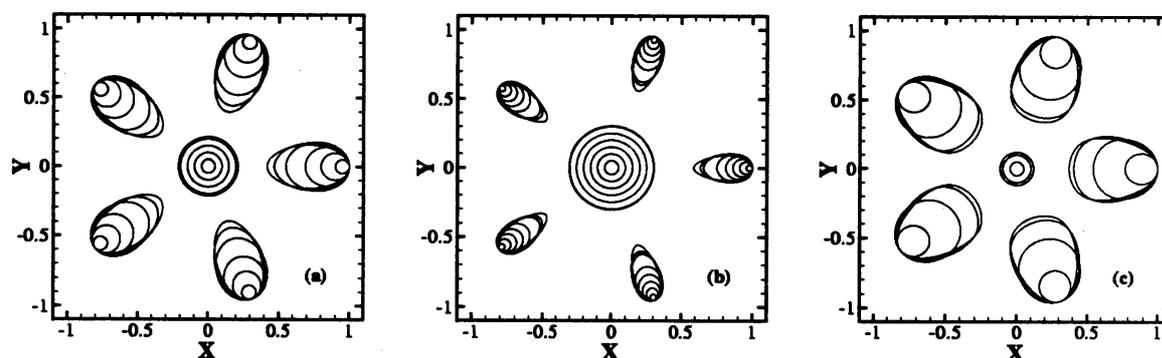


図 5: 渦領域の平衡形の重ね合わせ. ( $N = 5$ .) (a)  $S_1 : S_2 = 1 : 1$ . 内側の渦から外側の渦へ順番に、 $(a_0^*, a_1^*) = (0.05, 0.9000), (0.10, 0.7980), (0.15, 0.6891), (0.20, 0.5523), (0.215, 0.4700), (0.215, 0.4195)$ . (b)  $S_1 : S_2 = 5 : 1$ . 内側の渦から外側の渦へ順番に、 $(a_0^*, a_1^*) = (0.05, 0.9553), (0.10, 0.9099), (0.15, 0.8625), (0.20, 0.8113), (0.25, 0.7515), (0.30, 0.6578), (0.305, 0.6450), (0.305, 0.5880)$ . (c)  $S_1 : S_2 = 1 : 5$ . 内側の渦から外側の渦へ順番に、 $(a_0^*, a_1^*) = (0.05, 0.7764), (0.10, 0.5427), (0.12, 0.4043), (0.12, 0.3709)$ .

## 4 まとめ

等しい渦度をもつ中心渦とその周りの  $N$  個の渦の平衡形を調べた。すべての渦領域の面積が十分小さい時、各渦領域は円形に近くなる。しかし、中心渦の面積  $S_1$  が十分大きい時、この渦は小さい  $N$  に対しては周りの渦に最も近い点で最も大きい曲率をもつ形となり、大きい  $N$  に対しては円形に近くなる。ただし、小さい  $\frac{S_2}{S_1}$  の値に対しては、中心渦は  $N$  の値にかかわらずほぼ円形となる。ここで、 $S_2$  は周りの渦の面積である。周りの渦領域は、本研究で調べた多くの場合には中心の渦に最も近い点で最も大きい曲率をもつ洋なし型をしているが、 $N=5$  で  $\frac{S_2}{S_1}$  が十分大きい時には、周りの渦は中心渦から最も遠い点で最も大きい曲率をもつ洋なし型となる。また、渦領域全体の回転角速度は、対応する点渦系の回転角速度より大きい。

## 参考文献

- [1] G. S. Deem and N. J. Zabusky: Vortex waves: Stationary "V States," interactions, recurrence, and breaking. *Phys. Rev. Lett.* **40**, 859-862. (1977).
- [2] N. J. Zabusky, M. H. Hughes & K. V. Roberts: Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions. *J. Comp. Phys.* **30**, 96-106. (1979).
- [3] R. T. Pierrehumbert: A family of steady, translating vortex pairs with distributed vorticity. *J. Fluid. Mech.* **99**, 129-144. (1980).
- [4] D. G. Dritschel: The stability and energetics of corotating uniform vortices. *J. Fluid. Mech.* **157**, 95-134. (1985).
- [5] R. Rotunno: A note on the stability of a cylindrical vortex sheet. *J. Fluid. Mech.* **87**, 761-771. (1978).
- [6] Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei, and A. Mohri: Dynamics of electron-plasma vortex in background vorticity distribution. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3173-3176. (2000).