

圧縮性乱流の幾何学について

電通大・知能 前川 博 (Maekawa Hiroshi) 竹原 洋三 (Takehara Yohzo)

Dept. Mechanical Engineering and Intelligent Systems,  
Univ. of Electro-Communications

1. はじめに

乱流の幾何学というのは基礎方程式系のある初期値・境界条件に対する乱流解が幾何学的にどんなふうになっているか研究することであり、乱流解の特徴がどんなふうに幾何学に反映されているか眺めてみようということが本研究の意図である。乱流解は滑らかな多様体としてとらえられ接ベクトルからなる多様体内部構造を幾何学特有の言葉で解釈する。ここで用いる幾何学的見方とはトポロジーも微分幾何学も同じ視野の中に入れて見出す立場である。

非圧縮性乱流と異なる圧縮性乱流の特徴は、波としての現象が豊かであり、線形波としての音波および衝撃波やショックレットに見られる非線形波動現象がより明確に見えることである。一方、乱流は渦運動のダイナミクスが見え、圧縮性乱流においても非圧縮性乱流と同様に運動する渦の幾何学を考えることもたいへん興味深いものがある。渦に基づく構造と波が基本の構造とは幾何学的に相違があると想像できる。さらに、私たちの最近の研究で深まった圧縮性乱流渦構造の特徴に密度勾配などの熱力学的状態量の変化が渦構造に影響を与えている点である。ここでは乱流解は高精度直接シミュレーションをつかった数値解であり、その精度の高い数値解における瞬間的な流線が研究対象としたベクトル場である。

2. 閉曲面とオイラー数

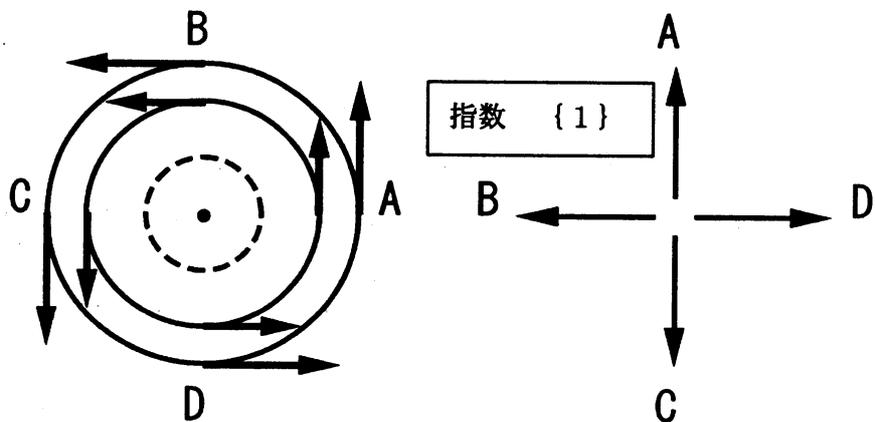
オイラー数  $\chi$  は種数  $g$  の閉曲面  $S_g$  に対して

$$\chi(S_g) = 2 - 2g \tag{2.1}$$

任意の三角形分割に対して成り立ち、種数  $g$  の閉局面とは  $g$  個の穴のあいた曲面で  $g = 1$  の場合がドーナツ面やトーラスと一般に呼ばれている。

3. 特異点の指数

図1に示すように、特異点(平衡点)にいる観測者がベクトルの向きを東西南北に時計回りか反時計回りに何度変化するか観測したとすれば、それを特異点の指数という。図1(a)ではAは南から、Bは



(a) 渦状点

東からCは北、さらにDは西、そしてAに戻り、結局反時計回りに一周したことになる。このとき指数を1とする。指数は、渦運動にたとえると右回りか左回りか渦の回転の向きによらない。

次に、図1(b)のような鞍点まわりのベクトル場を見てもとさきほどの渦運動と異なり、時計回りに回転することがわかる。この場合は指数は{-1}となる。この例を見ると分かるように、楕円的な流れと双曲的な流れでは特異点の指数の符号が変わることがわかる。渦点や鞍点以外に特異点には節点などあるが、いずれも同様な手続きによって指数が決める。

4. ポアンカレホップの定理  
ポアンカレホップの定理が述べている内容は以下の通りである。100年以上も前にポアンカレによって美しい定理が証明された。すなわち、閉曲面  $S_g$  上に、有限個の特異点をもつベクトル場があると

する。このとき各特異点の指数の総和はつねに  $S_g$  のオイラー数  $\chi(S_g) = 2 - 2g$  に等しい。この内容は後にホップ(1926)によって高次元の滑らかな図形に対しても成立するように定式化され、厳密な証明が与えられた。

5. 接平面と曲面の曲がり方

曲面1点の曲がり方は、定性的には「楕円的」や「双曲的」および「放物的」などの特徴を持つ。例えば「楕円的」の中には尖った塔のように鋭いでっぱりからほとんど平面に近いものまであり、また「双曲的」な曲がり方にもさまざまな度合いがある。

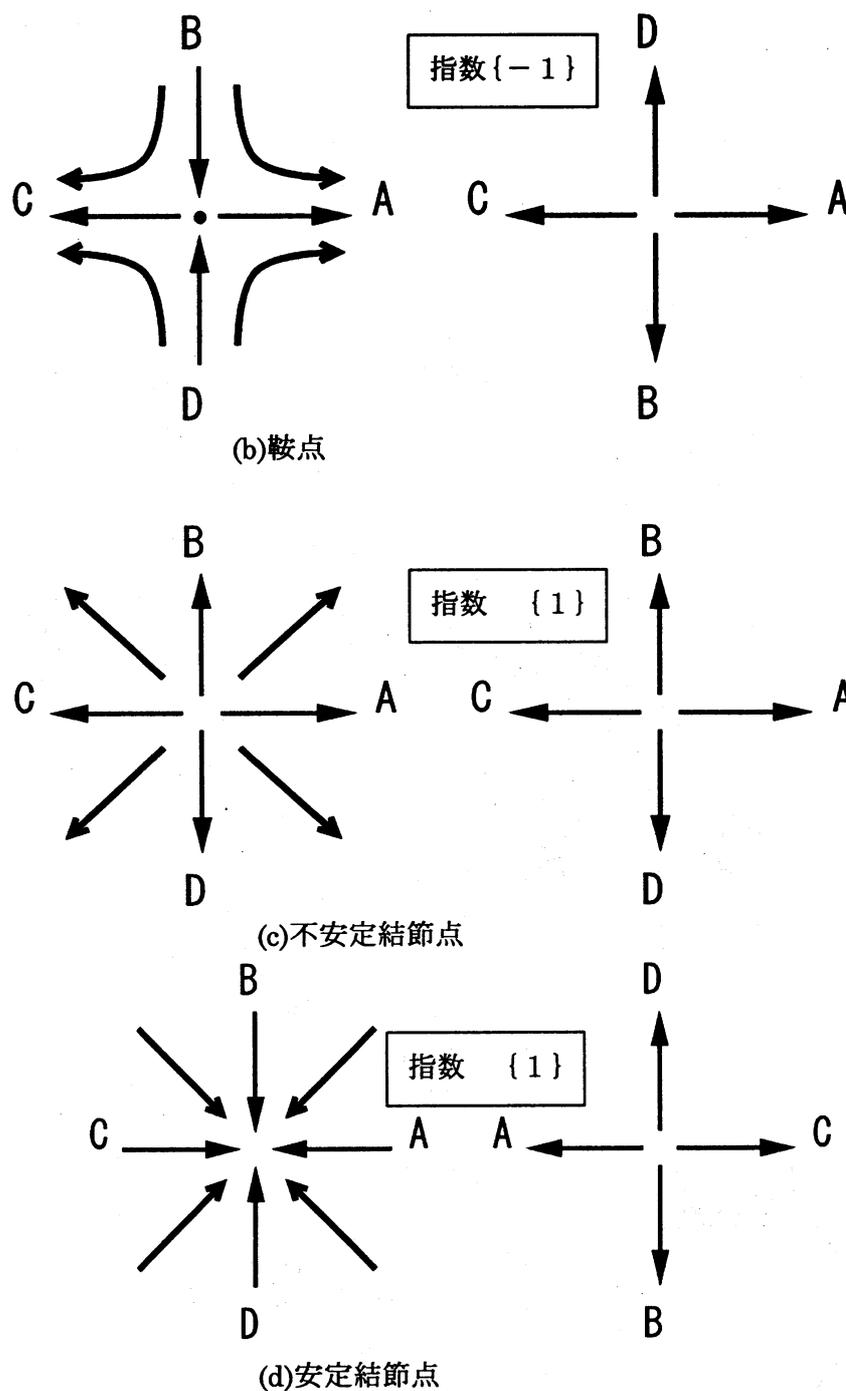


図1 特異点の指数

## 6. ガウス曲率

ガウス写像  $g$  は

$g: S \rightarrow$  単位球面

と定義される。曲面の曲がり方を定量的に表わすためにはガウス曲率を用いる。

ガウス曲率  $K$  は以下のように定義する。

$$K(P) = \lim_{\sigma \rightarrow P} \frac{g(\sigma)}{\sigma}$$

分子の  $g(\sigma)$  は符号付きの面積であり、分母  $\sigma$  は曲面の面積である。楕円的点であれば  $K(P) > 0$  であり、双曲的点では  $K(P) < 0$  である。その大きさは図 2 に示すように、 $\sigma$  を  $S$  から切り取り、それを伸び縮みさせながら、また時には裏返しにしたりしながら、単位球に貼り付けるようになる。

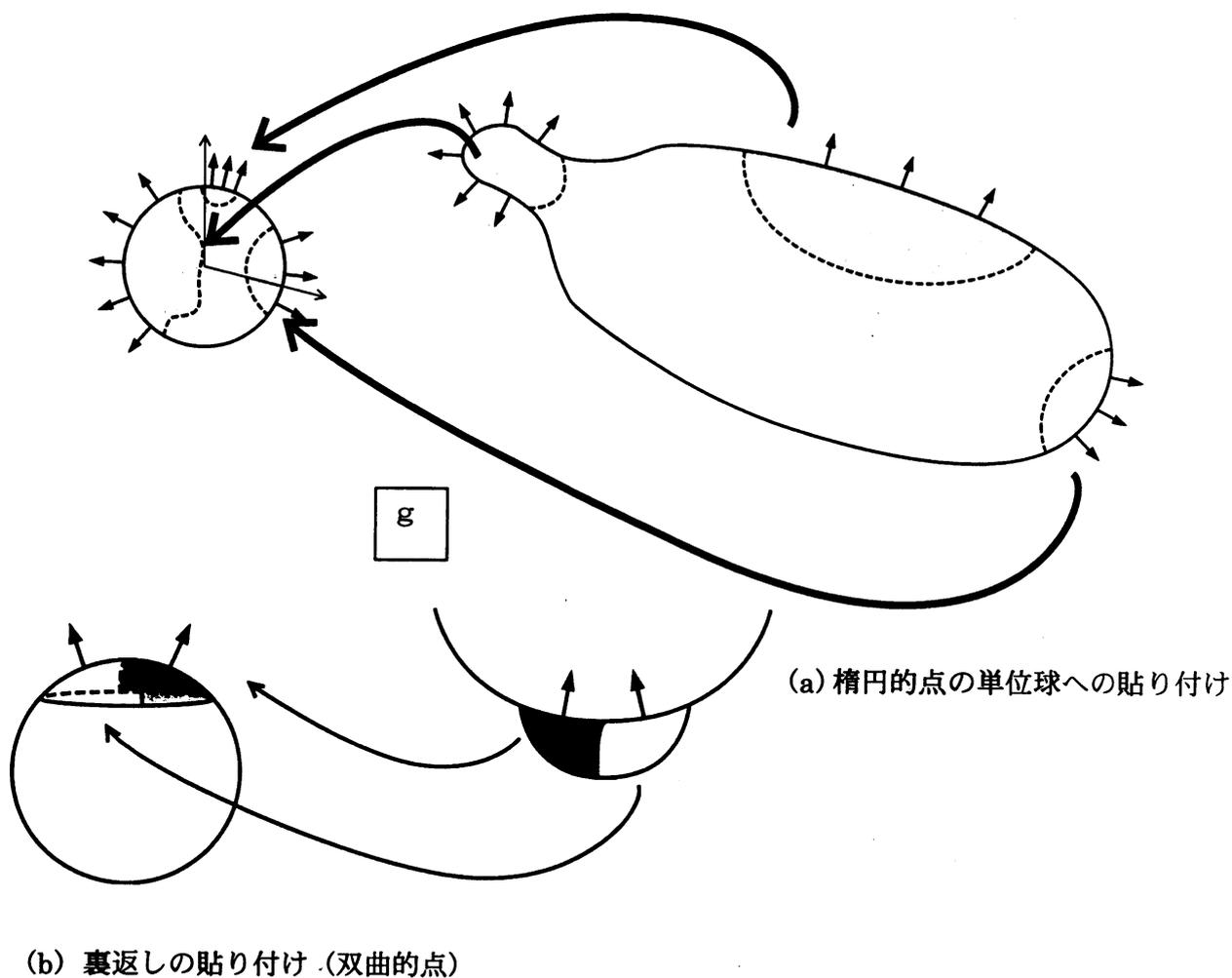


図 2. 楕円的点と双曲的点

図 2 (a) に示すように、楕円的な点の中で曲率の大きな点は単位球に写像されるとき大きな面積を占めることになる。すなわち、 $K(P) > 0$  でその大きさは大きい。一方、図 2 (b) に示すように、双曲的点においては単位球に写像されるとき、法線ベクトルをみると左右逆転しており、ちょうど裏返しの貼り付けと考えることができる。

## 7. ガウス-ボンネの定理

閉曲面  $S$  上のガウス曲率  $K$  の総和は閉曲面のオイラー数  $\chi$  の  $2\pi$  倍に等しい。積分の記号を使うと、

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K(P) d\sigma = \chi(S) \quad (7.1)$$

と表わすことができる。単位球面上の点の取り方によらず、単位球を覆っている枚数の数が決まる。すなわち、ガウス写像により曲面  $S$  が単位球を覆っている枚数は曲面の種数によって決まることを意味している。

## 8. 曲面上の局所座標

曲面上で局所座標

$$D = \left\{ (x_\alpha^1, x_\alpha^2) \mid x_\alpha^1{}^2 + x_\alpha^2{}^2 < 1 \right\}$$

を定義する。これは局所座標写像  $\varphi$  をもつ有界閉集合  $R^3$  の閉集合で曲面  $S$  が

$$S = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots \cup V_\lambda$$

座標近傍  $V_1, V_2, \dots, V_\lambda$  によって覆われており局所写像  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\lambda$  によって図中の  $V_\alpha$  の点  $P$  は

$\varphi_\alpha(P) = (x_\alpha^1, x_\alpha^2)$  と表わすことができる。そして  $V_\alpha \cap V_\beta$  のような重なり目では、局所座標の変換則は微分可能な関数になっている。このような性質を持つ集合を位相多様体ということができる。曲面概念の高次元への一般化という。位相多様体  $M$  は有限個の局所座標

で覆うことができる：

$$M = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots \cup V_\lambda$$

私たちは曲面という概念から多様体上で幾何学を考える立場に向かう。

次に位相多様体  $M$  と局所座標系を

$$\begin{cases} M = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots \cup V_\lambda \\ \varphi_\alpha : D \rightarrow V_\alpha \end{cases}$$

とする。局所座標写像  $\varphi_\alpha$  が滑らかで、 $V_\alpha$  上の各点で一次独立な基底ベクトルが存在するとき  $M$

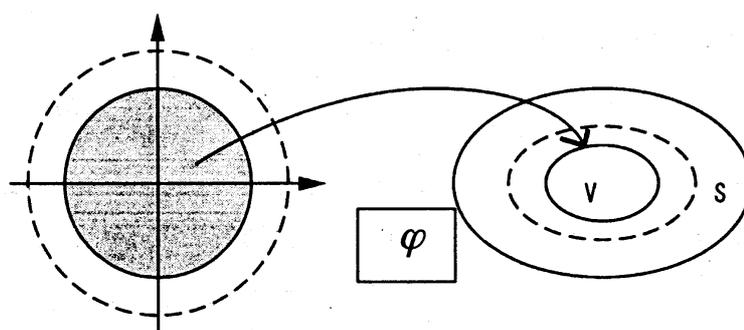
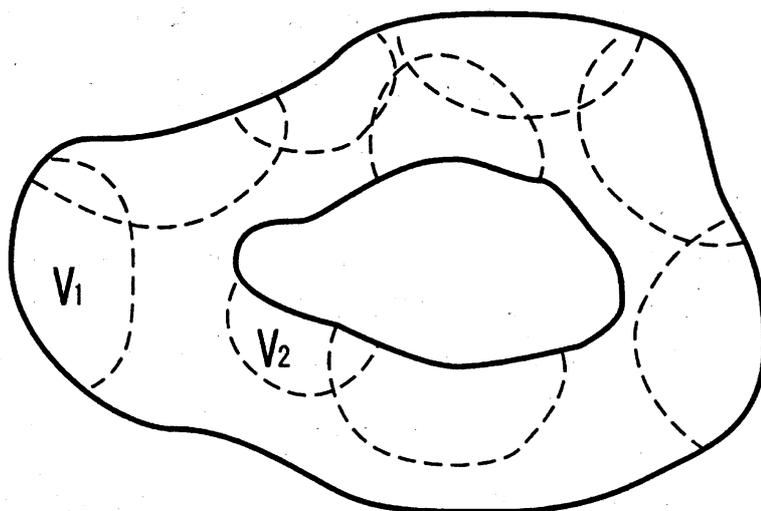


図3 局所座標系

は滑らかな多様体ができあがることになる。すなわち、点  $P$  における接ベクトルが

$$\xi_\alpha^1 e_\alpha^1(P) + \xi_\alpha^2 e_\alpha^2(P) + \cdots + \xi_\alpha^n e_\alpha^n(P) \quad (8.1)$$

となる。

## 9. 接空間

$n$ 次元多様体  $M$  上の一つ一つの点  $P$  に、 $n$ 次元ベクトル空間  $T_p(M)$  を与えて、これを  $P$  における  $M$  の接空間と考える。局所座標から浮かび上がる  $P$  のまわりの幾何学的イメージを  $T_p(M)$  に付与しようとする。したがって、 $T_p(M)$  の基底ベクトルとして

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n} \quad (9.1)$$

で表わされたものとする。この基底ベクトルの間には基底変換の関係が成り立っている。

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} \quad (9.2)$$

接ベクトルの貼り合わせを接空間とする。

$$T(M) = \bigcup_{P \in M} T_p(M)$$

このように接ベクトルの一見抽象的定義から、接ベクトルが多様体  $M$  への働きとしてどのようにかかっているのかは以下のように理解することができる。ベクトル空間  $T_p(M)$  が

$$\xi = \xi_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} + \xi_\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha^2} + \cdots + \xi_\alpha^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n} \quad (9.3)$$

によって与えられる  $\xi \in T_p(M)$  接ベクトルを考える。ここで、 $f \in C^\infty(M)$  に対して、 $f$  の  $\xi$  方向からの微分の値が

$$\xi(f) = \sum_{i=1}^n \xi_\alpha^i \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i}(P) \quad (9.4)$$

によって決めることができる。もし、 $P \in V_\alpha \cap V_\beta$  のとき、右辺の表示を  $\xi$  の  $V_\beta$  の表示を別の書き方で

$$\sum_{i=1}^n \xi_\beta^i \frac{\partial f}{\partial x_\beta^i}(P) \quad (9.5)$$

と計算しても同じ値になっていることを保証する。基底変換の条件が貼り合わせの条件になっていることを示している。この接ベクトルの関数への働きを通して、多様体  $M$  上の幾何学的量が構成されていることが理解できる。多様体  $M$  のもつ幾何学的性質を、 $f \in C^\infty(M)$  とその上に働く接ベクトルを通して働く微分を通して考えているといえる。曲面論が多様体上ではるかな高みへと上がったことを表わしている。

定義  $M$  を可微分多様体とし、 $X$  を  $M$  上のベクトル場とする。可微分曲線  $s: (\alpha, \beta) \rightarrow M$  が  $X$  の積分曲線であるとは

$$\frac{ds}{dt}(t) = X_{s(t)} \quad t \in (\alpha, \beta)$$

がなりたつことである。

これは、流体力学における流線と速度場の定義と一致する。ここで、 $s_i(t): (\alpha, \beta) \rightarrow R, i=1, 2, \dots, n$  を流線群としておくと都合がよい。

したがって、この接空間を圧縮性 Navier・Stokes 方程式の瞬時的速度場と対応させることができる。

#### 10. 臨界点 (特異点)

接空間の幾何学的性質を調べるのが主題である。そのためには、積分曲線の臨界点 (特異点) における指数を調べることでありと理解される。ここでは速度勾配テンソルの不変量を調べることによって臨界点の指数を与える。圧力  $p$  については、圧力勾配より与えられる Hesse 行列の負の固有値の個数を調べることによって臨界点の指数を与えることができる。

#### 11. 二次元圧縮性乱流

空間微分に対してフーリエ・スペクトル法を用いる。時間積分は4次のルンゲ・クッター法を用いる。この DNS における初期値は非圧縮性条件を満たすように選んだ乱数より作られた速度場と対応する圧力場と密度場を与える。初期速度場のエネルギースペクトルは

$$E(k) \sim k^4 \exp(-k^2/k_0^2) \quad (10.1)$$

として与えられている。乱流エネルギーの無次元時間  $t^*$  による変化を図4に示す。

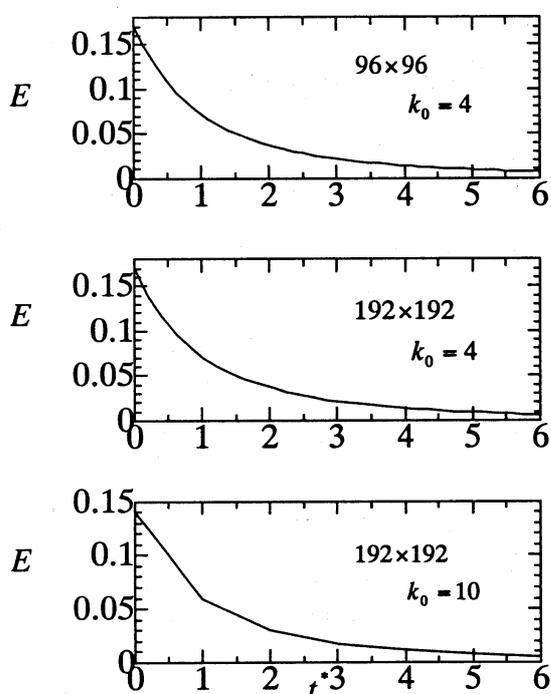


図4 乱流エネルギー

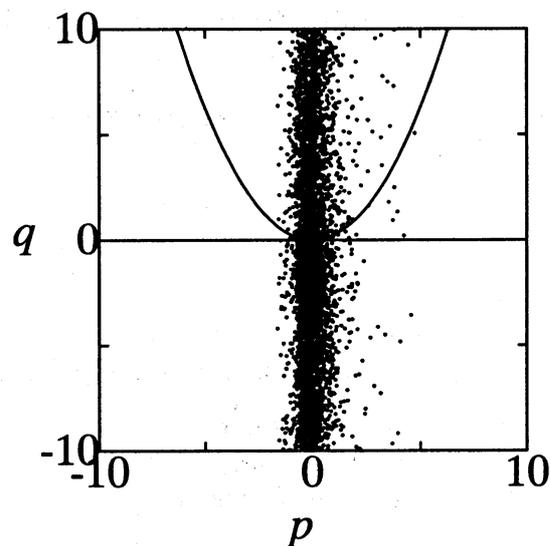


図5 不変量プロット

ここで、速度勾配テンソル  $\partial u_i / \partial x_j$   $\{A\}$  の第一不変量、第二不変量をそれぞれ  $p$ 、 $q$  とする。

$$p = -\text{trace}A, \quad q = \det A \quad (10.2)$$

図5に示すように、渦点が  $q = 1/4p^2$  の内側に存在し、その外側には鞍点と節点が存在する。初期には  $p = 0$  軸上にプロットが存在するが、時間とともに、プロットが  $p \neq 0$  に拡散する様子が観察できる。また、減衰乱流であるため、しだいにプロット点は原点近傍に集積する。

3章で述べたように、各臨界点における指数をカウントするとガウス・ボンネの定理によって多様体の幾何学的特徴が現れる。また、ポアンカレ・ホップの定理により、オイラー数を与えることによって高次元曲面（多様体）の特徴が理解される。図6は2種 {グリッド数  $(96 \times 96), (192 \times 192)$  と波数  $(k_0 = 4, k_0 = 10)$  } の計算結果の指数を調べたものである。鞍点による指数が渦点や節点による指数より大きく、時間経過とともにその差は変化するが逆転することはない。図6では黒丸と白丸の差に注目しよう。グリッド数が4倍になってもその差（密度割合）

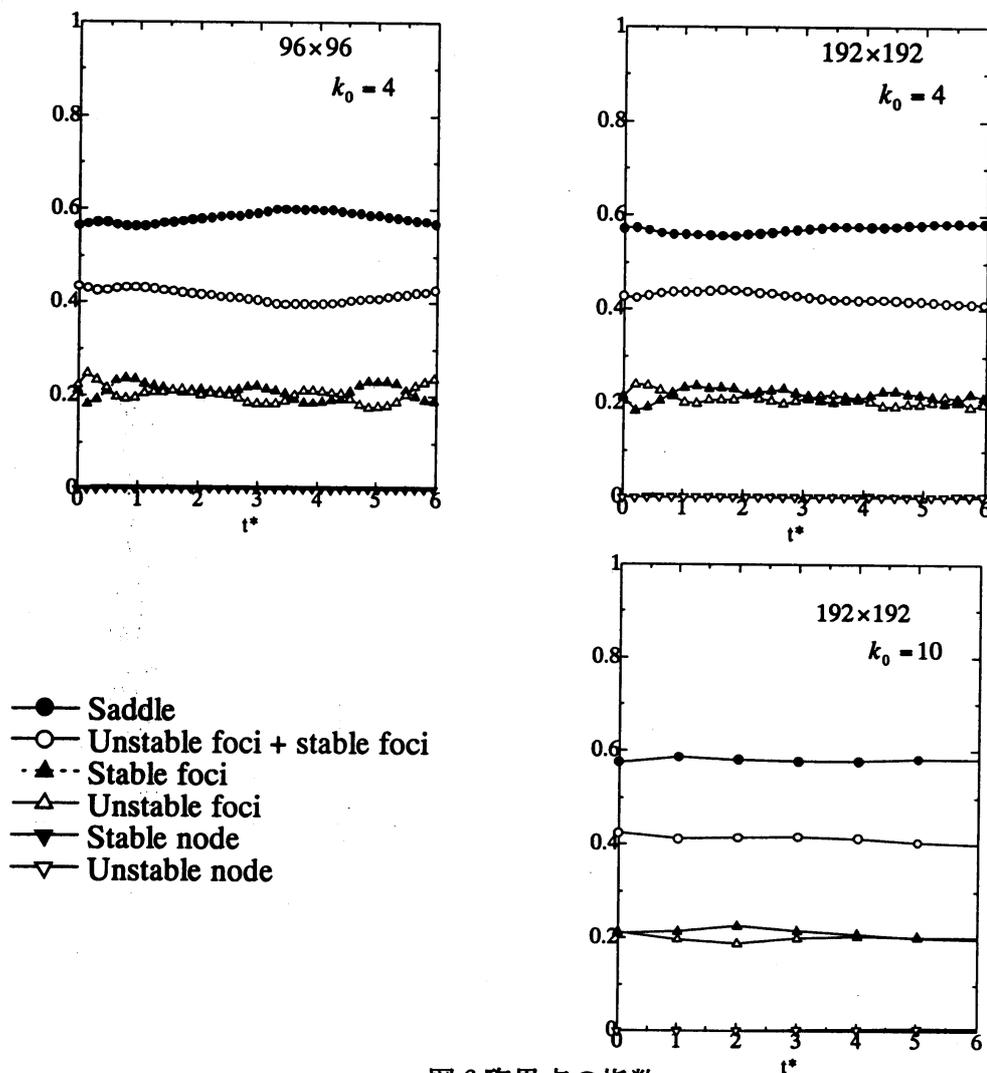


図6 臨界点の指数

は変化しない。 $k_0 = 4, k_0 = 10$  と初期値を変えても、その差はほとんど変化しない。波数が大きい場合は構造が微細であるが、その幾何学そのものは普遍であることを示唆している。いっぽう、圧縮性固有の特徴は安定結節点や不安定結節点が存在することによってわかるが、乱流マッハ数が大きくない場合は、幾何学に及ぼす影響は小さい。

したがって、乱流場の指数の総和は常に負になり、オイラー数は負である。このことは、ガウスの全曲率を積分すると負になっていることを示している。また、負のオイラー数より、高次元曲面はたくさん穴があいた曲面に見える。ホモトピー同値な概念で理解されるだろう。

## 12. まとめ

精度の高い数値解を使って、圧縮性2次元乱流の幾何学を研究した。

- 1) 二次元圧縮性等方性乱流場は“平均的に”負の曲率をもつ。
- 2) 乱流場は穴がたくさんあいた曲面として見える

## 参考文献

- ・微分幾何学とトポロジー: Fomenko A.T. 三村訳、(1996) 共立出版
- ・多様体とモース理論: 横田一郎、(1978) 現代数学社