数理解析研究所講究録 1289 巻 2002 年 1-34

不変式論へのSAGBI基底の応用

SAGBI bases for invariant rings

東北大学大学院理学研究科数学専攻

Mathematical Institute, Tohoku University

黒田 茂 (Shigeru Kuroda)*

序

SAGBIとは，**S**ubalgebra **A**nalogue to **G**röbner **B**ases for **I**deals の頭文字をとったものである．この概念は1980年代の後半頃にRobbiano-Sweedler [37]，Kapur-Madlener [18] らによって導入された．その名の通り，イデアルに対してグレブナー基底を考えるように，多項式環の部分代数に対しても，計算に使えるような良い性質を備えた生成系を考えるというものである．

ところで，不変式論ではどれだけ不変式があれば不変式環が生成できるか，あるいはそもそも不変式環は有限生成なのかということが重要な問題となる．さらに具体的に不変式系を求めるという,「計算」の側面にも大きな関心が向けられる．こうした問題は古くから研究されてきた (c.f. [49]).

近年，計算機の進歩に伴い人間が労力を費やしていた一部の単純な計算を，機械に肩代わりさせられるようになった．またそれを効率良く行うための概念もたくさん研究されている．本稿では，こうした概念の一つであるSAGBI基底を，不変式の研究に応用する方法について考察する．それは単に計算機の利用のためだけでなく，不変式環の構造

*Supported by JSPS Recerch Fellowships for Young Scientists.

を理論的に調べる上でも効果的であると考えられる．

第1節では，SAGBI基底の定義や基本性質を復習する．また，グレブナー基底との類似点や相違点についても触れる．典型的な例として，有限群のある作用に対する不変式環の場合を取り上げる．

第2節では，いろいろな不変式環のSAGBI基底を考える．初めに剰余環に対するイニシャル代数・SAGBI基底を定義し，それを用いたStillman-Tsaiによる不変式系の計算アルゴリズムを紹介する．また，1次元加法的代数群のある非線形な作用による不変式環のSAGBI基底を具体的に決定する．

第3節では，イニシャル項の一般化であるイニシャル形式と，微分の関係を考察する．そして，両者の間に自然な結びつきがあることが分かる．ここでの議論は，まだ予備的考察に過ぎないが，今後，もっと深い性質が明らかになるのではないかと期待している．

参考文献には，SAGBI基底に関係した論文・著書を可能な限り加えた．参考文献にあげたもののなかで，SAGBI基底と関係があるのは次のものである [1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 26, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48].

今回，講演の機会を与えてくださった日比孝之先生に心から感謝いたします．

1 SAGBI基底とグレブナー基底の比較

1.1 定義と基本性質

k を体とし，$k[\mathbf{x}] = k[x_1, \ldots, x_n]$ を k 上の n 変数多項式環，$k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] = k[x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}]$ をローラン多項式環とする．ベクトル $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$ に対して，$\mathbf{x}^a$ はモノミアル $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ を表すものとする．第 i 成分が1で他は全て零である $\mathbf{Z}^n$ 元を e_i と表すことにする．$k[\mathbf{x}]$ や $k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ は，モノミアル全体の集合上の k 値関数全体 $\prod_{a \in \mathbf{Z}^n} k\mathbf{x}^a$ の k 部分ベクトル空間とみなせる．一般に，$f = \sum_{a \in \mathbf{Z}^n} \alpha_a \mathbf{x}^a \in \prod_{a \in \mathbf{Z}^n} k\mathbf{x}^a$ に対して，f の台 $\mathrm{supp}(f)$ を

$$\mathrm{supp}(f) = \{a \in \mathbf{Z}^n \mid \alpha_a \neq 0\} \tag{1.1}$$

$\mathbf{Z}^n$ 上の全順序 $\preceq$ は，任意の $a, b, c \in \mathbf{Z}^n$ に対して $a \preceq b$ ならば $a+c \preceq b+c$ が成り立つとき加法的であるという．本稿では，$a \preceq b$ は b が a 以上であることを表し，$a \prec b$ は $a \preceq b$ かつ $a \neq b$ を表すものとする．ベクトル a とモノミアル $\mathbf{x}^a$ の同一視により，$a \preceq b$ や $a \prec b$ を $\mathbf{x}^a \preceq \mathbf{x}^b$ や $\mathbf{x}^a \prec \mathbf{x}^b$ と書く場合もある．$\mathbf{Z}^n$ 上の加法的全順序全体の集合を Ω とおく．

$\preceq \in \Omega$ とする．$f \in k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ のとき，$\preceq$ についての $\mathrm{supp}(f)$ の最大元 a に対して，

$$\mathrm{in}_{\preceq}(f) = \alpha \mathbf{x}^a \tag{1.2}$$

とおき，$\preceq$ に関する f の イニシャル項と呼ぶ．ここで，α は f における $\mathbf{x}^a$ の係数とする．f が0のときは，$\mathrm{in}_{\preceq}(f) = 0$ 定める．すると，任意の $f, g \in k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ に対して

$$\mathrm{in}_{\preceq}(fg) = \mathrm{in}_{\preceq}(f)\mathrm{in}_{\preceq}(g) \tag{1.3}$$

が成り立つ．k 部分ベクトル空間 $V \subset k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ に対して，

$$\mathrm{in}_{\preceq}(V) = (\{\mathrm{in}_{\preceq}(f) \mid f \in V\} \text{ が生成する } k \text{ ベクトル空間}) \tag{1.4}$$

と定める．これを，$\preceq$ に関する V のイニシャルベクトル空間と呼ぶ．

k ベクトル空間 V の基底 $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は，$\{\mathrm{in}_{\preceq}(f_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が $\mathrm{in}_{\preceq}(V)$ の基底となるとき，$\preceq$ に関する V の標準基底という．$f \in k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ は $\mathrm{supp}(f - \mathrm{in}_{\preceq}(f)) \cap \mathrm{supp}(\mathrm{in}_{\preceq}(V)) = \emptyset$ を満たすとき，$\mathrm{in}_{\preceq}(V)$ に関して被約であるという．被約な元から成る標準基底を被約標準基底という．任意の V と $\preceq \in \Omega$ に対して被約標準基底が存在する訳ではない．例えば $n = 1$ のとき，$\{x_1^i - x_1^{i-1} \mid i \in \mathbf{Z}\}$ が生成する k ベクトル空間は，どんな $\preceq \in \Omega$ に対しても被約標準基底を持たない．V が $\preceq$ に関して被約標準基底を持つための必要十分条件は，全ての $a \in \mathrm{supp}(\mathrm{in}_{\preceq}(V))$ に対して $\mathrm{in}_{\preceq}(V)$ に関する被約元 $f \in V$ が存在して，$\mathbf{x}^a = \mathrm{in}_{\preceq}(f)$ が成り立つことである．k ベクトル空間 V に対して，被約標準基底が存在するような $\preceq \in \Omega$ 全体の集合を $\Delta(V)$ とおく．

$V \subset k[\mathbf{x}]$ のとき，$\preceq \in \Omega$ が項順序ならば $\preceq \in \Delta(V)$ である．ここで，Ω の元が項順序であるとは，0 が $\mathbf{Z}_{\geq 0}{}^n$ の最小元であるときにという．次の性質は，イニシャルベクトル空間に対して基本的である．

補題 1.1 $V \subset V' \subset k[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]$ を k ベクトル空間，$\preceq \in \Delta(V)$, $\preceq' \in \Delta(V')$ とする．このとき，$\mathrm{in}_{\preceq}(V) = \mathrm{in}_{\preceq'}(V')$ ならば $V = V'$ である．

さて，I を多項式環 $k[\mathbf{x}]$ のイデアルとする．(1.3) より，k ベクトル空間 $\mathrm{in}_{\preceq}(I)$ は $k[\mathbf{x}]$ のイデアルとなる．これを，$\preceq$ に関する I のイニシャルイデアルと呼ぶ．イデアル I の生成系 $\mathcal{G}$ は，$\{\mathrm{in}_{\preceq}(g) \mid g \in \mathcal{G}\}$ がイデアル $\mathrm{in}_{\preceq}(I)$ を生成するとき，I のグレブナー基底であるという．

$A \subset k[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]$ を k 部分代数とする．イニシャルイデアルやグレブナー基底と並行に，イニシャル代数と SAGBI 基底を次のように定義する．(1.3) より，集合 $\{\mathrm{in}_{\preceq}(f) \mid f \in A\}$ は乗法について閉じている．したがって，k ベクトル空間 $\mathrm{in}_{\preceq}(A)$ は代数の構造を持つ．これを $\preceq$ についての A のイニシャル代数と呼ぶ．k 代数 A の生成系 $\mathcal{S}$ は，$\{\mathrm{in}_{\preceq}(s) \mid s \in \mathcal{S}\}$ が k 代数 $\mathrm{in}_{\preceq}(A)$ を生成するとき，A の SAGBI 基底であるという．

グレブナー基底に対しては，割り算アルゴリズムおよびブックバーガーのアルゴリズムという計算手順が良く知られている．SAGBI 基底に対しても，この 2 つにそれぞれ類似したアルゴリズムがある．割り算アルゴリズムの類似は，次のサブダクション（除去）アルゴリズムである．

サブダクションアルゴリズム

$f \in k[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]$ およびサブダクション集合 $\mathcal{S}$ を入力する．

(1) $g = f$ とおく．

(2) $g \neq 0$ かつ $\mathrm{in}_{\preceq}(g) \in k[\{\mathrm{in}_{\preceq}(s) \mid s \in \mathcal{S}\}]$ のとき: $\mathrm{in}_{\preceq}(g) = \lambda \prod_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{in}_{\preceq}(s)^{u_s}$ を満たす $\lambda \in k$ と $u_s \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ を探す．$g - \lambda \prod_{s\in\mathcal{S}} s^{u_s}$ を改めて g と置いて初めからやりなおす．

(3) $g = 0$ または $\mathrm{in}_{\preceq}(g) \notin k[\{\mathrm{in}_{\preceq}(s) \mid s \in \mathcal{S}\}]$ のとき: g を出力する．

こうして出力された g を，サブダクション集合 $\mathcal{S}$ による f のサブダクションという．(2) のステップにおいて $(u_s)_{s\in\mathcal{S}}$ の選び方は一般に一意的でないので，f の $\mathcal{S}$ によるサブダクションも一意的とは限らない．もし，$\preceq$ が $\mathrm{supp}(k[\mathcal{S}])$ 上の整列順序であれば，この手続きは必ず有限回で終わる．このことから次が従う．

補題 1.2 $A \subset k[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]$ を k 部分代数，$\mathcal{S} \subset A$ を部分集合，$\preceq \in \Omega$ とする．$\mathrm{supp}(k[\mathcal{S}])$

は $\preceq$ に関して整列集合であると仮定する．このとき，$k[\{\mathrm{in}_{\preceq}(s) \mid s \in \mathcal{S}\}] = \mathrm{in}_{\preceq}(A)$ ならば，$\mathcal{S}$ は A のSAGBI基底である．特に，$\mathcal{S}$ は k 代数 A を生成する．

グレブナー基底理論におけるブックバーガーのアルゴリズムとは，与えられたイデアルの生成系に対して新たな元を次々に加えて，グレブナー基底を生み出す計算手順である．SAGBI基底に対するこのアルゴリズムの類似が，次のSAGBIアルゴリズムである．

k 部分代数 $A \subset k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ とその生成系 $\mathcal{S}_0$ が与えられたとする．これらに対して，次の手続きにより帰納的に $\mathcal{S}_i$ $(i \in \mathbf{N})$ を定める．すると，$\mathcal{S}_\infty = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{S}_i$ は A のSAGBI基底となる．

SAGBIアルゴリズム

$\mathcal{S}_{i-1}$ と同じ濃度の変数を持つ多項式環 $k[\mathbf{y}] = k[\{y_s \mid s \in \mathcal{S}_{i-1}\}]$ を用意する．代入 $y_s \mapsto \mathrm{in}_{\preceq}(s)$ により定まる準同型 $k[\mathbf{y}] \to \mathrm{in}_{\preceq}(A)$ の核の，イデアルとしての生成系 $\{h_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset k[\mathbf{y}]$ を求める．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，多項式 h_λ の変数 y_s に s を代入した式の，$\mathcal{S}_{i-1}$ によるサブダクションの1つを h'_λ とおく．そして $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{i-1} \cup \{h'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda, h'_\lambda \neq 0\}$ と定める．

A が $\preceq$ に関して有限SAGBI基底を持つことが，上のアルゴリズムが有限回で終わるための必要十分条件である．しかし，k 代数 A が有限生成であってもこの手続きは有限回で終わるとは限らない．次に見るように，A が有限生成でも $\mathrm{in}_{\preceq}(A)$ が有限生成でない場合があるからである．

1.2 SAGBI基底の例

前項で述べた限りでは，SAGBI基底もグレブナー基底もほとんど似たような性質を持つように見える．しかし次に挙げる例はその憶測を覆す．

0 を含む部分半群 $S \subset \mathbf{Z}^n$ に対して，$R = k[\{\mathbf{x}^a \mid a \in S\}]$ とおく．有限群 G が，S に忠実に作用しているとする．このとき，$\sigma \in G$ と $f = \sum_{a \in S} \lambda_a \mathbf{x}^a \in R$ に対して $\sigma(f) = \sum_{a \in S} \lambda_a \mathbf{x}^{\sigma(a)}$ と定めることにより，k 代数 R への G の作用が定義される．この作用による不変部分環 $R^G = \{f \in R \mid \sigma(f) = f\}$ を考える．各 $\sigma \in G$ に対して

$R_\sigma = k[\{\mathbf{x}^a \mid \sigma(a) = a\}]$ とおく．$\sigma \in G$ は，

$$\mathrm{trans.deg}_k R_\sigma = \mathrm{trans.deg}_k R - 1 \tag{1.5}$$

を満たすとき鏡映という．G は鏡映によって生成されるとき，鏡映群であるという．ここで，一般に k 上の整域 A に対して，$\mathrm{trans.deg}_k A$ は A の k 上の超越次数を表すものとする．

定理 1.3 ([21]. [20, 8, 9, 10, 11, 12, 35] も見よ) $\preceq \in \Omega$ は任意とする．

(1) k 代数 R が有限生成ならば，イニシャル代数 $\mathrm{in}_\preceq(R^G)$ が有限生成であるための必要十分条件は，G が鏡映群であることである．

(2) k 代数 R が有限生成でないならば，イニシャル代数 $\mathrm{in}_\preceq(R^G)$ も有限生成でない．

例えば，$S = \mathbf{Z}_{\geq 0}{}^n$ に対称群 $\mathfrak{S}_n$ が座標成分の置換により作用する場合は，R は多項式環 $k[\mathbf{x}]$ で，$k[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}_n}$ は $x_1, \ldots, x_n$ の対称式全体のなす $k[\mathbf{x}]$ の部分代数である．この作用では互換と鏡映は同じである．$\mathfrak{S}_n$ は互換で生成されるので鏡映群である．したがって，定理 1.3 (1) より $\mathrm{in}_\preceq(k[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}_n})$ は有限生成である．実際，任意の $\preceq \in \Omega$ に対して，基本対称式全体の集合が $k[\mathbf{x}]^{\mathfrak{S}_n}$ の SAGBI 基底となる ([37, 23, 20, 21])．

1 つの巡回置換によって生成される部分群 $C_n \subset \mathfrak{S}_n$ にこの作用を制限しても，ヒルベルトの定理より $k[\mathbf{x}]^{C_n}$ は有限生成である．しかし，$n \geq 3$ では C_n は互換で生成できないから，鏡映群でない．よって，定理 1.3 (1) よりイニシャル代数 $\mathrm{in}_\preceq(k[\mathbf{x}]^{C_n})$ は有限生成でない．

定理 1.4 ([21, 20]) R^G の異なるイニシャル代数全体 $\{\mathrm{in}_\preceq(R^G) \mid \preceq \in \Omega\}$ の濃度は，

(1) G が鏡映群ならば G の位数と等しい．

(2) G が鏡映群でないならば非可算である．

例えば $k[\mathbf{x}]^{C_n}$ は，$n \geq 3$ なら非可算個の異なるイニシャル代数を持つ．しかし C_n はアーベル群なので，変数の 1 次変換が定める $k[\mathbf{x}]$ の自己同型によって，$k[\mathbf{x}]^{C_n}$ は有限個のモノミアルが生成する k 部分代数に写される (c.f. [43, 2.7.3])．モノミアルが生成する

k 代数のイニシャル代数はもとの k 代数と同じだから，$k[\mathbf{x}]^{C_n}$ の像は唯一の有限生成なイニシャル代数を持つことになる．このように代数構造が同じでも，イニシャル代数が全く異なることもある．

もちろん有限生成な k 代数のイニシャル代数が有限生成となる場合もたくさんある．しかし有限生成な k 代数に対して，そのイニシャル代数が有限生成かどうかを判定するのは，一般に容易でない．ただし，次のようなことは分かる．

命題 1.5 k 代数 $A \subset k[\mathbf{x}]$ は $\{\mathrm{in}_{\preceq}(A) \mid \preceq$ は項順序$\}$ が無限集合ならば，ある項順序 $\preceq$ に対して $\mathrm{in}_{\preceq}(A)$ は有限生成でない．

この命題は集合 Ω のある位相構造と密接な関係がある ([20] により一般の場合がある)．$k[\mathbf{x}]$ のイデアル I に対しては，$\{\mathrm{in}_{\preceq}(I) \mid \preceq$ は項順序$\}$ の濃度は常に有限である ([40, 44]．本質的に命題 1.5 の対偶に相当する)．

A が有限生成であっても命題 1.5 の逆は一般に正しくない．例えば，

$$A = k[x_2 + x_3 - 2x_1,\ (x_2 - x_1)(x_3 - x_1),\ (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)^2] \tag{1.6}$$

は異なるイニシャル代数を有限個しか持たないが，その中に有限生成でないものがある．実際，例 3.11 より A は異なるイニシャル代数を高々6 個しか持たない．またその証明の議論から，$\preceq \in \Omega$ が $x_1 \prec x_2, x_3$ を満たすとき，$\mathrm{in}_{\preceq}(A) = \mathrm{in}_{\preceq}(A_1)$ が成り立つ．ここで A_1 は，代入 $x_1 \mapsto 0$ が定める準同型による A の像とする．ところが，どのような Ω の元に対しても $A_1 = k[x_2 + x_3,\ x_2x_3,\ x_2x_3^2]$ のイニシャル代数は有限生成でない [37, 1.20]．

2　不変式系の計算

2.1　剰余環のイニシャル代数・SAGBI 基底

前節で定義したイニシャル代数や SAGBI 基底の概念を，剰余環の場合に対して拡張する．初めに商ベクトル空間のイニシャルベクトル空間を考える．$W \subset V \subset k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ を k ベクトル空間とする．次のことはよく知られている．

補題 2.1 (Macaulay) $\preceq \in \Delta(W)$ とする．任意の $f \in V/W$ に対して，$\mathrm{in}_{\preceq}(W)$ に関して被約な $\tilde{f} \in V$ が存在して $\tilde{f} \equiv f \pmod W$ が成り立つ．

$\preceq \in \Delta(W)$ とする．$W \subset V$ だから $\mathrm{in}_{\preceq}(W) \subset \mathrm{in}_{\preceq}(V)$ である．$f \in V/W$ のイニシャル項 $\mathrm{in}_{\preceq}(f)$ を，(1.2) で定めた $\mathrm{in}_{\preceq}(\tilde{f})$ の，$\mathrm{in}_{\preceq}(V)/\mathrm{in}_{\preceq}(W)$ における像と定める．すると，$\{\mathrm{in}_{\preceq}(f) \mid f \in V/W\}$ は k ベクトル空間 $\mathrm{in}_{\preceq}(V)/\mathrm{in}_{\preceq}(W)$ を生成する．(1.4) に倣って，V/W のイニシャルベクトル空間 $\mathrm{in}_{\preceq}(V/W)$ を $\mathrm{in}_{\preceq}(V)/\mathrm{in}_{\preceq}(W)$ と定義する．ただし，$\preceq_1, \preceq_2 \in \Delta(W)$ に対して 2 つのイニシャルベクトル空間 $\mathrm{in}_{\preceq_1}(V/W)$ と $\mathrm{in}_{\preceq_2}(V/W)$ が等しいのは，$V_{\preceq_1} = V_{\preceq_2}$ かつ $\mathrm{in}_{\preceq_1}(V_{\preceq_1}) = \mathrm{in}_{\preceq_2}(V_{\preceq_2})$ が成り立つときと定める．ここで，$\preceq \in \Delta(W)$ に対して $V_{\preceq} = \{\preceq$ に関する $\tilde{f} \mid f \in V/W\}$ とする．定理 1.4 のように異なるイニシャルベクトル空間全体の濃度を考えたり，補題 1.1 の類似を考えたりするとき，2 つのイニシャルベクトル空間が "等しい" ことの明確な定義が必要になる．

例 2.2 $V = k(x_1 + x_2) + kx_3$, $W = k(x_1 + x_2)$ とする．W は有限次元なので $\Delta(W) = \Omega$ である．$\preceq_1, \preceq_2 \in \Delta(W)$ はそれぞれ $x_1 \prec_1 x_2$, $x_2 \prec_2 x_1$ を満たすとする．このとき $V_{\preceq_1} = V_{\preceq_2} = \mathrm{in}_{\preceq_1}(V_{\preceq_1}) = \mathrm{in}_{\preceq_2}(V_{\preceq_2}) = kx_3$ なので $\mathrm{in}_{\preceq_1}(V/W) = \mathrm{in}_{\preceq_2}(V/W)$ である．

例 2.3 $V = k(x_1 + x_2) + k(x_2 + x_3)$, $W = k(x_1 - x_3)$ とする．$\preceq_1, \preceq_2 \in \Delta(W) = \Omega$ はそれぞれ $x_1 \prec_1 x_2 \prec_1 x_3$, $x_3 \prec_2 x_2 \prec_2 x_1$ を満たすとする．このとき $\mathrm{in}_{\preceq_1}(V) = kx_2 + kx_3$, $\mathrm{in}_{\preceq_2}(V) = kx_1 + kx_2$, $\mathrm{in}_{\preceq_1}(W) = kx_3$, $\mathrm{in}_{\preceq_2}(W) = kx_1$ である．したがって，$i = 1, 2$ に対して $\mathrm{in}_{\preceq_i}(V)/\mathrm{in}_{\preceq_i}(W) \simeq kx_2$ である．しかし，$V_{\preceq_1} = k(x_1 + x_2)$, $V_{\preceq_2} = k(x_2 + x_3)$ だから，$\mathrm{in}_{\preceq_1}(V/W)$ と $\mathrm{in}_{\preceq_2}(V/W)$ は異なるイニシャルベクトル空間である．

さて，$A \subset k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ が k 部分代数で，I が A のイデアルの場合を考える．このとき $f, g \in A/I$ に対して，$\mathrm{in}_{\preceq}(f)\mathrm{in}_{\preceq}(g) \neq 0$ ならば $\mathrm{in}_{\preceq}(fg) = \mathrm{in}_{\preceq}(f)\mathrm{in}_{\preceq}(g)$ が成り立つ．したがって，集合 $\{\mathrm{in}_{\preceq}(\tilde{f}) \mid f \in A/I\}$ は積について閉じていて，k ベクトル空間 $\mathrm{in}_{\preceq}(A/I)$ は代数の構造を持つ．これを A/I のイニシャル代数と呼ぶ．A/I の生成系 $\mathcal{S}$ は，$\{\mathrm{in}_{\preceq}(s) \mid s \in \mathcal{S}\}$ が k 代数 $\mathrm{in}_{\preceq}(A/I)$ を生成するとき，A/I の SAGBI 基底という．サブダクションアルゴリズムや SAGBI アルゴリズムも，第 1 節の場合と同様に拡張で

Stillman-Tsai [42] は，I を $k[\mathbf{x}]$ のイデアルとしたときに，剰余環 $k[\mathbf{x}]/I$ の k 部分代数 A に対してイニシャル代数を考えた．A が k 部分代数 $A' \subset k[\mathbf{x}]$ の像として与えられたとき，A のイニシャル代数は剰余環 $(A'+I)/I$ に対して上で定義したイニシャル代数と等しい．この場合，A' が有限生成であっても k 代数 $A'+I$ は有限生成とは限らない．したがって $A'+I$ のイデアルとして，I も有限生成とは限らない．

例 2.4 (Stillman-Tsai) $I = k[x_1, x_2](x_1^2 - x_1x_2)$, $A' = k[x_1] \subset k[x_1, x_2]$ とする．すると，

$$A' + I = k[\{x_1x_2^i \mid i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}] \tag{2.1}$$

が成り立つ．実際，$i > 0$ に対して

$$x_1x_2^i = x_1^{i+1} + \sum_{j=0}^{i-1} x_1^{i-j-1}x_2^j(x_1x_2 - x_1^2) \in A' + I \tag{2.2}$$

である．また，$A'+I$ に属す式には y_2^i $(i > 0)$ という形のモノミアルを含まない．よって (2.1) が成り立つ．$A'+I$ はモノミアルが生成するので，任意の $\preceq \in \Omega$ に対して $\mathrm{in}_\preceq(A'+I) = A'+I$ である．$\preceq \in \Omega$ が $x_1^2 \prec x_1x_2$ を満たすときは，$\mathrm{in}_\preceq(I)$ は $\mathrm{in}_\preceq(A'+I)$ のイデアルとして $\{x_1x_2^{i+1} \mid i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$ で生成される．この場合は $\mathrm{in}_\preceq(A'+I)/\mathrm{in}_\preceq(I) \simeq k[x_1]$ となる．一方，$x_1x_2 \prec x_1^2$ のときは，$\mathrm{in}_\preceq(I)$ は $\{x_1^2x_2^i \mid i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$ によって生成される．この場合は $\mathrm{in}_\preceq(A'+I)/\mathrm{in}_\preceq(I)$ は有限生成でない．

2.2 アフィン代数群の作用による不変式環：実践的応用

G をアフィン代数群，$\psi : G \times \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ を n 次元アフィン空間への G の作用とする．G の座標環は，多項式環 $k[\mathbf{y}] = k[y_1, \ldots, y_m]$ とそのイデアル I によって $k[\mathbf{y}]/I$ と表せる．ψ に対応して，k 代数の準同型

$$\psi^* : k[\mathbf{x}] \to (k[\mathbf{y}]/I) \otimes_k k[\mathbf{x}] = k[\mathbf{y}, \mathbf{x}]/Ik[\mathbf{x}] \tag{2.3}$$

が定まる．このとき，k 代数

$$k[\mathbf{x}]^G = \{f \in k[\mathbf{x}] \mid 1 \otimes f \in \psi^*(k[\mathbf{x}])\} \simeq (1 \otimes k[\mathbf{x}]) \cap \psi^*(k[\mathbf{x}]) \tag{2.4}$$

を G による不変式環という．$k[\mathbf{x}]^G$ の生成系を調べることが，不変式論では重要である．

例 2.5 特殊線形群の作用 $\psi : \mathbf{SL}(r) \times \mathbf{A}^{r\times n} \to \mathbf{A}^{r\times n}$ を $((y_{i,j})_{i,j}, (x_{j,l})_{j,l}) \mapsto (\sum_{j=1}^{r} y_{i,j} x_{j,l})_{i,l}$ により定める．すると，対応する座標環の準同型

$$\psi^* : k[\{x_{i,j} \mid i,j\}] \to \left(\frac{k[\{y_{i,j} \mid i,j\}]}{(\det(y_{i,j}) - 1)}\right) \otimes_k k[\{x_{i,j} \mid i,j\}] \tag{2.5}$$

は $x_{i,j} \mapsto \sum_{l=1}^{r} y_{i,l} \otimes x_{l,j}$ によって与えられる．ここで，$x_{i,j}$ は $1 \le i \le r$, $1 \le j \le n$ に対して，$y_{i,j}$ は $1 \le i,j \le r$ に対して考えるものとする．このとき，$k[\{x_{i,j} \mid i,j\}]^{\mathbf{SL}(r)}$ は $f(1 \otimes x_{i,j}) = f(\sum_{l=1}^{r} y_{i,l} \otimes x_{l,j})$ を満たす $f \in k[\mathbf{x}]$ 全体の集合である．

命題 2.6 (Stillman-Tsai [42]) 項順序 $\preceq$ は $y_1, \ldots, y_m$ を消去するための消去順序とする．このとき $\mathcal{S}$ が $\psi^*(k[\mathbf{x}])$ の $\preceq$ に関する SAGBI 基底ならば，$k[\mathbf{x}] \cap \{\preceq$ に関する $\tilde{s} \mid s \in \mathcal{S}\}$ は $k[\mathbf{x}]^G$ の SAGBI 基底である．

命題 2.6 で本質的なのは，消去順序を使って $k[\mathbf{x}] \cap \psi^*(k[\mathbf{x}])$ の生成系を求めることである．この命題は $k[\mathbf{x}]^G$ の生成系を計算する手順を与えている．実際，$\psi^*(k[\mathbf{x}])$ は $\mathcal{S}_0 = \{\psi^*(x_1), \ldots, \psi^*(x_n)\}$ で生成されるので，この有限集合から始めて SAGBI アルゴリズムに従って順々に計算して，SAGBI 基底を構成することが出来る．もちろん $\psi^*(k[\mathbf{x}])$ が有限 SAGBI 基底を持たなければ，計算は終わらない．

例 2.5 の場合には SAGBI 基底は分かっている．

定理 2.7 (Sturmfels [43, 44]) $\preceq \in \Omega$ は $x_{1,1} \prec x_{1,2} \prec \cdots \prec x_{1,n} \prec x_{2,1} \prec x_{2,2} \prec \cdots \prec x_{r,n}$ を満たす辞書式順序とする．このとき，$(x_{i,j})_{i,j}$ の $r \times r$ 小行列式全体は，例 2.5 の不変式環 $k[\mathbf{x}]^{\mathbf{SL}(r)}$ の SAGBI 基底である．

$r = 2$ なら，任意の $\preceq \in \Omega$ に対して上の主張は正しい．$\mathbf{SL}(r)$ は簡約群と呼ばれる代数群の典型的なものである．ヒルベルトの定理より，簡約群の作用による不変式環は常に有限生成である．そこで，Sturmfels は次の予想を立てた．

予想 2.8 G が連結簡約アフィン代数群ならば，不変式環 $k[\mathbf{x}]^G$ は有限 SAGBI 基底を

定理 1.3 で見たように，有限群の不変式環にはどんな $\preceq \in \Omega$ に対しても有限 SAGBI 基底を持たないものもある．有限群は簡約群だが，自明な場合を除いて連結でない．

例 2.9 1 次元加法的代数群 $\mathbf{G}_a$ の線形な作用

$$\psi : \mathbf{G}_a \times \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n, \quad (t, (x_1, \ldots, x_n)) \mapsto (x_1, \ldots, x_n) + t(x_2, \ldots, x_n, 0) \tag{2.6}$$

を考える．対応する座標環の準同型 $\psi^* : k[\mathbf{x}] \to k[t] \otimes_k k[\mathbf{x}]$ は，$x_1 \mapsto x_1$, $x_i \mapsto x_i + t \otimes x_{i-1}$ $(i > 1)$ で与えられる．$\mathbf{G}_a$ の座標環は 1 変数の多項式環なので，この場合は剰余環を考える必要はない．Stillman-Tsai は計算機を使って $n = 5$ までの $k[\mathbf{x}]^{\mathbf{G}_a}$ の SAGBI 基底を計算した [42]．$n = 4$ までの $k[\mathbf{x}]^{\mathbf{G}_a}$ の SAGBI 基底は，定理 2.11 より以下のようになる．$\preceq \in \Omega$ は任意する．

$$f = 2x_1x_3 - x_2^2,\ g = 3x_1^2x_4 - 3x_1x_2x_3 + x_2^3,\ h = 9x_1^2x_4^2 + 8x_1x_3^3 - 18x_1x_2x_3x_4 - 3x_2^2x_3^2 + 6x_2^3x_4$$

とおく．このとき，$n = 2$ なら $\{x_1\}$ が，$n = 3$ なら $\{x_1, f\}$ が，$n = 4$ なら $\{x_1, f, g, h\}$ が，それぞれ $k[\mathbf{x}]^{\mathbf{G}_a}$ の SAGBI 基底である．

$\mathbf{G}_a$ の線形な作用による不変式環は，Weitzenböck の定理より有限生成である．そこで，Vasconcelos は次の予想を立てた．

予想 2.10 例 2.9 の不変式環 $k[\mathbf{x}]^{\mathbf{G}_a}$ は，全ての n に対して有限 SAGBI 基底を持つ．

2.3 ある不変式環の SAGBI 基底

不変式環と微分の核との間には深い関係があり (c.f. [32])，不変式環の研究において微分の核は重要である．一般に k 代数 A に対して，k 線形写像 $D : A \to A$ は $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ が全ての $f, g \in A$ に対して成り立つとき，A 上の k 微分という．k 部分ベクトル空間 $V \subset A$ に対して，

$$V^D = \{f \in V \mid D(f) = 0\} \tag{2.7}$$

とおく．V が k 部分代数ならばV^D は V の k 部分代数である．k 代数 V が有限生成でも，V^D は一般に有限生成とは限らない (c.f. [5, 6, 19]. [27, 28, 22] も見よ)．

以降，体 k の標数は零とする．A 上の k 微分 D は，各 $f \in A$ に対してある $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ が存在して，全ての $s \geq r$ に対して $D^s(f) = 0$ となるとき，局所冪零であるという．A 上に局所冪零微分を定めることと，$\mathbf{G}_a$ の作用を与えることは同じである．実際，A 上の局所冪零微分 D に対して，準同型 $A \ni f \mapsto \sum_{p=0}^{\infty}(t^p/p!) \otimes D^p(f) \in k[t] \otimes_k A$ は $\mathbf{G}_a$ の A への作用を定める．一方，$\mathbf{G}_a$ の作用 $\psi^* : A \to k[t] \otimes_k A$ が与えられたとき，$f \in A$ に対して $\psi^*(f)$ における t の係数を $D(f)$ とすると，写像 $D : A \to A$ は A 上の局所冪零微分となる．この対応により，両者は一対一に対応する．そして，局所冪零微分 D の核 A^D は，対応する $\mathbf{G}_a$ の作用による不変式環 $A^{\mathbf{G}_a}$ と等しい．例えば，例 2.9 で定めた $\mathbf{G}_a$ の $k[\mathbf{x}]$ への作用には，

$$D = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + \cdots + x_{n-1}\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{2.8}$$

が対応する．

D を多項式環 $k[\mathbf{x}]$ 上の k 微分とする．全ての $1 \leq i \leq n$ に対して $D(x_i) \in k[x_1, \ldots, x_{i-1}]$ となるとき，D は三角であるという．D は三角ならば局所冪零である．$k[\mathbf{x}]$ 上の三角微分で

$$D = \kappa_1\mathbf{x}^{\delta_1}\frac{x_{n-2}\partial}{\partial x_{n-2}} + \kappa_2\mathbf{x}^{\delta_2}\frac{x_{n-1}\partial}{\partial x_{n-1}} + \kappa_3\mathbf{x}^{\delta_3}\frac{x_n\partial}{\partial x_n} \tag{2.9}$$

の形のものに対して，核 $k[\mathbf{x}]^D$ の SAGBI 基底を考える．

D は三角なので，各 δ_i の $n-2+i$ 番目以降の成分は零であり，第 $n-3+i$ 成分は -1 である．$\epsilon_i = \delta_i - \delta_1$ とおき，ϵ_i の第 j 成分を $\epsilon_{i,j}$ と定める．すると，$\epsilon_{2,n-2}, \epsilon_{3,n-2} > 0$, $\epsilon_{2,n-1} = \epsilon_{3,n} = -1$, $\epsilon_{3,n-1} \geq 0$, $\epsilon_{2,n} = 0$ が成り立つ．$\varepsilon_i = \epsilon_{i,n-2}/\gcd\{\epsilon_{2,n-2}, \epsilon_{3,n-2}\}$, $\eta = \varepsilon_2\epsilon_3 - \varepsilon_3\epsilon_2$ とおく．η は $\eta^+, \eta^- \in \mathbf{Z}_{\geq 0}{}^n$ を用いて $\eta = \eta^+ - \eta^-$ と書ける．η, η^+, η^- の第 i 成分をそれぞれ $\eta_i, \eta_i^+, \eta_i^-$ と表す．すると，$\eta_{n-2} = \eta_{n-2}^+ = \eta_{n-2}^- = \eta_n^+ = \eta_{n-1}^- = 0$, $\eta_{n-1}^+ = \varepsilon_2\epsilon_{3,n-1} + \varepsilon_3$, $\eta_n^- = \varepsilon_2$ が成り立つ．ここで，

$$\tilde{F}_1 = 1 - \frac{\kappa_2}{\epsilon_{2,n-2}\kappa_1}\mathbf{x}^{\epsilon_2}, \quad \tilde{F}_2 = 1 - \sum_{l=0}^{\epsilon_{3,n-1}} \varphi(l)\mathbf{x}^{\epsilon_3 + l\epsilon_2} \tag{2.10}$$

とおく．ただし，

$$\varphi(l) = \frac{\kappa_3}{\kappa_1 \epsilon_{3,n-2}} \left(-\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^l \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{\epsilon_{3,n-1} + (i-1)\epsilon_{2,n-1}}{\epsilon_{3,n-2} + i\epsilon_{2,n-2}} \right) \tag{2.11}$$

とする．$\tilde{F} = \mathbf{x}^{\eta^+} \tilde{F}_1^{\eta_{n-1}^+} - \mu \mathbf{x}^{\eta^-} \tilde{F}_2^{\eta_n^-}$ とおく．ただし，

$$\mu = (-1)^{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} \frac{\kappa_2^{\varepsilon_2 \epsilon_{3,n-1} + \varepsilon_3}}{\varphi(\epsilon_{3,n-1})^{\varepsilon_2} (\epsilon_{2,n-1} \kappa_1)^{\varepsilon_2 \epsilon_{3,n-1} + \varepsilon_3}} \tag{2.12}$$

とする．次が成り立つように $c_1, c_2, c \in \mathbf{Z}^n$ を選び，$F_1 = \mathbf{x}^{c_1} x_{n-1} \tilde{F}_1$，$F_2 = \mathbf{x}^{c_2} x_n \tilde{F}_2$，$F = \mathbf{x}^c \tilde{F}$ とおく．すなわち $F_1, F_2, F \in k[\mathbf{x}]$，かつ任意の $1 \leq i \leq n$ に対して，F_1, F_2, F は $k[\mathbf{x}]$ において x_i で割り切れない．このような $c_1, c_2, c \in \mathbf{Z}^n$ は一意的に存在し，それらの $n-2$ 番目以降の成分は零であることに注意する．

定理 2.11 D は (2.9) の形の $k[\mathbf{x}]$ 上の三角微分とする．このとき任意の $\preceq \in \Omega$ に関して，$\{x_1, \ldots, x_{n-3}, F_1, F_2, F\}$ は $k[\mathbf{x}]^D$ の SAGBI 基底である．

これは実質的に [23] の一般化になっている．以下，定理 2.11 を証明する．

$\preceq \in \Omega$ を任意にとり，

$$R = k[x_1, \ldots, x_{n-3}, \mathrm{in}_{\preceq}(F_1), \mathrm{in}_{\preceq}(F_2), \mathrm{in}_{\preceq}(F)] \tag{2.13}$$

とおく．定理 2.11 を示すには，$\mathrm{in}_{\preceq}(k[\mathbf{x}]^D) = R$ を示せばよい．実際，$\preceq \in \Omega$ が項順序の場合を考えれば，補題 1.2 より $k[\mathbf{x}]^D = k[x_1, \ldots, x_{n-3}, F_1, F_2, F]$ も従う．

補題を 2 つ用意する．

補題 2.12 $x_1, \ldots, x_{n-3}$ についてのモノミアル $\mathbf{x}^a$ に対して次が成り立つ．

(1) $s \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して，$\mathbf{x}^a (x_{n-2+i} \tilde{F}_i)^s \in k[\mathbf{x}]$ ならば $\mathrm{in}_{\preceq}(\mathbf{x}^a (x_{n-2+i} \tilde{F}_i)^s) \in R$.

(2) $\mathbf{x}^a (\mathbf{x}^{\eta^+} \tilde{F}_1^{\eta_{n-1}^+} - \mu \mathbf{x}^{\eta^-} \tilde{F}_2^{\eta_n^-}) \in k[\mathbf{x}]$ ならば $\mathrm{in}_{\preceq}(\mathbf{x}^a (\mathbf{x}^{\eta^+} \tilde{F}_1^{\eta_{n-1}^+} - \mu \mathbf{x}^{\eta^-} \tilde{F}_2^{\eta_n^-})) \in R$.

(3) $\mathbf{x}^a (\mathbf{x}^{\eta^+} \tilde{F}_1^{\eta_{n-1}^+} - \nu \mathbf{x}^{\eta^-} \tilde{F}_2^{\eta_n^-}) \in k[\mathbf{x}]$ ならば $\mathrm{in}_{\preceq}(\mathbf{x}^a (\mathbf{x}^{\eta^+} \tilde{F}_1^{\eta_{n-1}^+} - \nu \mathbf{x}^{\eta^-} \tilde{F}_2^{\eta_n^-})) \in R$. ここで，$\nu$ は $\mu, 0$ と異なる k 上代数的な元とする．

証明 $H = \mathbf{x}^a(x_{n-2+i}\tilde{F}_i)^s$, $\mathbf{x}^a(\mathbf{x}^{\eta^+}\tilde{F}_1^{\eta^+_{n-1}} - \mu\mathbf{x}^{\eta^-}\tilde{F}_2^{\eta^-_n})$ とする．$H \in k[\mathbf{x}]$ とすると，F_i, F の定め方からそれぞれ $H = \mathbf{x}^{a'}F_i^s, \mathbf{x}^{a'}F$ となる．ここで，$\mathbf{x}^{a'} \in k[\mathbf{x}]$ は $x_1, \ldots, x_3$ についてのモノミアルである．よって，$\mathrm{in}_{\preceq}(H) \in R$ となる．これで (1), (2) が示せた．

$\mathbf{x}^{\eta}\tilde{F}_1^{\eta^+_{n-1}} - \nu\tilde{F}_2^{\eta^-_n}$, $\mathbf{x}^{\eta}\tilde{F}_1^{\eta^+_{n-1}}$, $\tilde{F}_2^{\eta^-_n}$ のサポートの凸包を，それぞれ N, N_1, N_2 とおく．(3) を証明するために，初めに $\mathrm{conv}(N_1 \cup N_2) = N$ を示す．$\eta + \eta^+_{n-1}\epsilon_2 = \epsilon_3 + \epsilon_{3,n-1}\epsilon_2$ に注意すると，

$$N_1 = \mathrm{conv}\{\eta, \epsilon_3 + \epsilon_{3,n-1}\epsilon_2\},\ N_2 = \mathrm{conv}\{0, \epsilon_3, \epsilon_3 + \epsilon_{3,n-1}\epsilon_2\} \tag{2.14}$$

が分かる．それぞれ $\mathbf{x}^{\eta}\tilde{F}_1^{\eta^+_{n-1}}$, $\tilde{F}_2^{\eta^-_n}$ における $\mathbf{x}^{\epsilon_3+\epsilon_{3,n-1}\epsilon_2}$ の係数を μ_1, μ_2 とする．すると $\mu_1/\mu_2 = \mu$ が成り立つ．$\nu \neq \mu$ だから $\mu_1 - \nu\mu_2 \neq 0$ である．よって，$N = \mathrm{conv}\{\eta, 0, \epsilon_3 + \epsilon_{3,n-1}\epsilon_2\}$ である．したがって，$\mathrm{conv}(N_1 \cup N_2) = N$ が成り立つ．

$\mathbf{x}^a(\mathbf{x}^{\eta^+}\tilde{F}_1^{\eta^+_{n-1}} - \nu\mathbf{x}^{\eta^-}\tilde{F}_2^{\eta^-_n}) \in k[\mathbf{x}]$ だから $(a+\eta^-+N) \subset \mathbf{Z}_{\geq 0}{}^n$ である．$\mathrm{supp}(\mathbf{x}^{a+\eta^+}\tilde{F}_1^{\eta^+_{n-1}}) \subset a+\eta^-+N_1$ かつ $a+\eta^-+N_1 \subset a+\eta^-+N$ だから，$\mathrm{supp}(\mathbf{x}^{a+\eta^+}\tilde{F}_1^{\eta^+_{n-1}}) \subset \mathbf{Z}_{\geq 0}{}^n$，すなわち $\mathbf{x}^{a+\eta^+}\tilde{F}_1^{\eta^+_{n-1}} \in k[\mathbf{x}]$ である．すると，(1) より $\mathrm{in}_{\preceq}(\mathbf{x}^{a+\eta^+}\tilde{F}_1^{\eta^+_{n-1}}) \in R$ が従う．同様に，$\mathrm{in}_{\preceq}(\mathbf{x}^{a+\eta^-}\tilde{F}_2^{\eta^-_n}) \in R$ となる．$\mathrm{conv}(N_1 \cup N_2) = N$ より，$\mathrm{in}_{\preceq}(\mathbf{x}^a(\mathbf{x}^{\eta^+}\tilde{F}_1^{\eta^+_{n-1}} - \nu\mathbf{x}^{\eta^-}\tilde{F}_2^{\eta^-_n}))$ は $\mathrm{in}_{\preceq}(\mathbf{x}^{a+\eta^+}\tilde{F}_1^{\eta^+_{n-1}})$ または $\mathrm{in}_{\preceq}(\mathbf{x}^{a+\eta^-}\tilde{F}_2^{\eta^-_n})$ のどちらかと，スカラー倍をの差を除いて等しい．よって，それは R に含まれる．これで (3) が示せた． □

$g \in k[\{x_j \mid j \neq n-2\}]$ に代入 $x_{n-1} \mapsto x_{n-1}\tilde{F}_1$, $x_n \mapsto x_n\tilde{F}_2$ を施して得られる式を $\Psi(g)$ とおく．すると，$\Psi(x_{n-1}) = x_{n-1}\tilde{F}_1$, $\Psi(x_n) = x_n\tilde{F}_2$, $\Psi(\mathbf{x}^{\eta^+} - \nu\mathbf{x}^{\eta^-}) = \mathbf{x}^{\eta^+}\tilde{F}_1^{\eta^+_{n-1}} - \nu\mathbf{x}^{\eta^-}\tilde{F}_2^{\eta^-_n}$ が成り立つ．

補題 2.13 $f \in k[\mathbf{x}]^D \setminus \{0\}$ とする．このとき，$\sum_i \Psi(g_i) = f$ とできる．ここで，各 $g_i \in k[\{x_j \mid j \neq n-2\}]$ は $\mathbf{x}^a \sum_{j=0}^p \alpha_j \mathbf{x}^{j\mu}$ $(\alpha_i \in k)$ の形の式で，$i \neq j$ ならば $\mathrm{supp}(\Psi(g_i)) \cap \mathrm{supp}(\Psi(g_i)) = \emptyset$ を満たすとする．

この補題は第 3 節で証明する．

定理 2.11 の証明． 定理 2.11 の直後に書いたことより，$f \in k[\mathbf{x}]^D$ に対して $\mathrm{in}_{\preceq}(f) \in R$ を示せばよい．補題 2.13 より，$\Psi(g) \in k[\mathbf{x}]$ を満たすある $g = \mathbf{x}^{a'} \sum_{i=0}^p \alpha_i \mathbf{x}^{i\mu} \in k[\{x_j \mid$

$j \neq n-2\}]$ に対して，$\mathrm{in}_{\preceq}(f) = \mathrm{in}_{\preceq}(\Psi(g))$ が成り立つ．よって，$\mathrm{in}_{\preceq}(\Psi(g)) \in R$ を示せばよい．

必要なら a' を取り替えるえることで，$\alpha_0 \neq 0$ と仮定してよい．すると，k 上代数的な元 $\beta_i \neq 0$ を用いて

$$g = \alpha_0 \mathbf{x}^{a'} \prod_{i=1}^{p} (\mathbf{x}^{\mu} - \beta_i) = \alpha_0 \mathbf{x}^{a} \prod_{i=1}^{p} (\mathbf{x}^{\mu^+} - \beta_i \mathbf{x}^{\mu^-}) \tag{2.15}$$

表せる．$g, \mathbf{x}^{\mu^+}, \mathbf{x}^{\mu^-} \in k[\{x_j \mid j \neq n-2\}]$ だから，$\mathbf{x}^a$ は x_{n-2} を含まないモノミアルである．a の第 $n-1$, 第 n 成分をそれぞれ a_{n-1}, a_n とおく．$\Psi(g) \in k[\mathbf{x}]$ だから，$x_1, \ldots, x_{n-3}$ についてのモノミアル $\mathbf{x}^{b_1}, \ldots, \mathbf{x}^{b_{p+2}}$ が存在して $\sum_{i=1}^{p+2} b_i + a_{n-1}e_{n-1} + a_n e_n$，かつ $1 \leq i \leq p$ に対して $\Psi(\mathbf{x}^{b_i}(\mathbf{x}^{\mu^+} - \beta_i \mathbf{x}^{\mu^-})) \in k[\mathbf{x}]$，$i = 1, 2$ に対して $\Psi(\mathbf{x}^{b_{p+i}} x_{n-2+i}^{a_{n-2+i}}) \in k[\mathbf{x}]$ が成り立つ．$1 \leq i \leq p$ に対して，$\Psi(\mathbf{x}^{b_i}(\mathbf{x}^{\mu^+} - \beta_i \mathbf{x}^{\mu^-})) = \mathbf{x}^{b_i}(\mathbf{x}^{\eta^+} \tilde{F}_1^{\eta^+_{n-1}} - \beta_i \mathbf{x}^{\eta^-} \tilde{F}_2^{\eta^-_n})$ である．よって補題 2.12 (2), (3) より，この式のイニシャル項は R に含まれる．$i = 1, 2$ に対して，$\Psi(\mathbf{x}^{b_{p+i}} x_{n-2+i}^{a_{n-2+i}}) = \mathbf{x}^{b_{p+i}} (x_{n-2+i} \tilde{F}_i)^{a_{n-2+i}}$ が成り立つ．よって補題 2.12 (1) より，$\mathrm{in}_{\preceq}(\Psi(\mathbf{x}^{b_{p+i}} x_{n-2+i}^{a_{n-2+i}})) \in R$ が従う．ゆえに，$\mathrm{in}_{\preceq}(\Psi(g)) \in R$ が成り立つ．これで定理 2.11 が証明された． □

3　微分の核とイニシャル形式

引き続き，体 k の標数は零とする．D を多項式環 $k[\mathbf{x}]$ 上の k 微分とする．このとき，部分集合 $\{\delta_1, \ldots, \delta_m\} \subset \mathbf{Z}^n$ を次のようにとることが出来る．各 $1 \leq j \leq n$ に対して，適当な $\kappa_{i,j} \in k$ を用いて $x_j^{-1} D(x_j) = \sum_{i=1}^{m} \kappa_{i,j} \mathbf{x}^{\delta_i}$ と表せる．また，そのような部分集合の中で包含関係で極小である．このとき，$1 \leq i \leq m$ に対して $k[\mathbf{x}]$ 上の k 微分 D_i を

$$D_i = \mathbf{x}^{\delta_i} \left(\kappa_{i,1} \frac{x_1 \partial}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_{i,n} \frac{x_n \partial}{\partial x_n} \right) \tag{3.1}$$

のように定める．すると，$D = D_1 + \cdots + D_m$ となる．この節を通して，多項式環 $k[\mathbf{x}]$ 上の k 微分に対してこの記号を用いる．D は自然に $k[\mathbf{x}]$ の商体 $k(\mathbf{x})$ 上の k 微分に拡張できるが，それも同じ記号 D で表す．

3.1 微分とフィルター付け

フィルター付けられた k 代数上の k 微分について考える．フィルター付けられた k 代数上の k 微分は，同伴な次数付き k 代数上の斉次な k 微分を導くことが知られている (cf. [7, Exercise 1.2.7])．Robbiano はイニシャル項の概念を一般化するために，Γ フィルター付けの概念を考えた [36]．この項では，通常のフィルター付けを持つ k 代数上の k 微分と同様に，Γ フィルター付けを持つ k 代数上の k 微分も，同伴な Γ 次数付き k 代数上の斉次な k 微分を導くことを示す．

初めに Γ フィルター付けの概念を復習する．Γ は加法と両立する半順序 $\preceq$ が定義された加群とする．すなわち加法と半順序は，任意の $\gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$ に対して，$\gamma \preceq \gamma'$ ならば $\gamma + \gamma'' \preceq \gamma' + \gamma''$ を成り立たせるとする．

A を k 代数とする．k 部分ベクトル空間 $F_\gamma A \subset A$ の族 $F_A = \{F_\gamma A\}_{\gamma \in \Gamma}$ は，次の性質を満たすとき A の Γ フィルター付けという．

(a) $\gamma \preceq \gamma'$ ならば $F_\gamma A \subset F_{\gamma'} A$.

(b) 任意の $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対して $(F_\gamma A)(F_{\gamma'} A) \subset F_{\gamma+\gamma'} A$.

(c) 全ての $f \in A \setminus \{0\}$ に対して，$\{\gamma \in \Gamma \mid f \in F_\gamma A\}$ の最小元 $\deg(f)$ が存在する．$f \in k \setminus \{0\}$ のときは，$\deg(f)$ は Γ の零元である．

(d) 任意の $f_1, f_2 \in A$ と $\gamma \in \Gamma$ に対して，$\deg(f_1), \deg(f_2) \prec \gamma$ ならば $\deg(f_1 + f_2) \prec \gamma$ が成り立つ．

Robbiano による定義では $\preceq$ は全順序だが，(d) を付け加えてこのようにしても本質的に同じである．$\preceq$ が全順序ならば，条件 (d) は自動的に満たされる．A が Γ フィルター付け $F_A = \{F_\gamma A\}_{\gamma \in \Gamma}$ を持つとき，

$$F_\gamma^\circ A = \bigcup_{\gamma' \prec \gamma} F_{\gamma'} A \tag{3.2}$$

とおく．条件 (d) よりこれは k ベクトル空間となる．ここで

$$\mathrm{gr}_{F_A}(A) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma A / F_\gamma^\circ A \tag{3.3}$$

とおく．すると，$\mathrm{gr}_{F_A}(A)$ は単位元をもつ Γ 次数付き k 代数となる．すなわち，任

意の $\gamma,\gamma' \in \Gamma$ に対して $(F_\gamma A/F^\circ_\gamma A)(F_{\gamma'} A/F^\circ_{\gamma'} A) \subset (F_{\gamma+\gamma'} A/F^\circ_{\gamma+\gamma'} A)$ が成り立つ．各 $f \in A \setminus \{0\}$ に対して，$F_{\deg(f)} A/F^\circ_{\deg(f)} A$ における f の像を $\mathrm{in}_\preceq(f)$ と表し，f のイニシャル形式と呼ぶ．便宜的に $\mathrm{in}_\preceq(0)=0$ と定める．このとき任意の $f,f' \in A$ に対して，$\mathrm{in}_\preceq(f)\mathrm{in}_\preceq(f') \neq 0$ ならば

$$\mathrm{in}_\preceq(ff') = \mathrm{in}_\preceq(f)\mathrm{in}_\preceq(f') \tag{3.4}$$

が成り立つ．定義より，k ベクトル空間 $\mathrm{gr}_{F_A}(A)$ は $\{\mathrm{in}_\preceq(f) \mid f \in A\}$ によって生成される．標記を簡潔にするために，$F_\gamma A/F^\circ_\gamma A$ を B_γ と書くことにする．

今，D を A 上の k 微分とする．さらにある $\gamma_0 \in \Gamma$ が存在して，任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $D(F_\gamma A) \subset F_{\gamma+\gamma_0} A$ が成り立つと仮定する．例えば，$\{\deg(D(f)) - \deg(f) \mid f \in A \setminus A^D\}$ のどの元も γ_0 以下ならば，γ_0 はこの性質を満たす．このとき，γ_0 に関して k 線形写像

$$\mathrm{gr}_{F_A,\gamma_0}(D) : \mathrm{gr}_{F_A}(A) \to \mathrm{gr}_{F_A}(A) \tag{3.5}$$

を次のように定義する．各 $\gamma \in \Gamma$ に対して，線形写像 $\mathrm{gr}_{F_A,\gamma_0}(D)_\gamma : B_\gamma \to B_{\gamma+\gamma_0}$ を，$\bar{f} \in B_\gamma$ を $D(f)$ の像に写すことにより定める．ただし，$f \in F_\gamma A$ は $\bar{f}$ の代表元とする．そして，$\mathrm{gr}_{F_A,\gamma_0}(D) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{gr}_{F_A,\gamma_0}(D)_\gamma$ と定義する．$\mathrm{gr}_{F_A,\gamma_0}(D)_\gamma$ が矛盾なく定義されていることは，次のようにして分かる．まず，仮定より $D(F_\gamma A) \subset F_{\gamma+\gamma_0} A$ である．もし $f \in F^\circ_\gamma A$ ならば $\deg(f) \prec \gamma$ なので，$\deg(f)+\gamma_0 \prec \gamma+\gamma_0$ となる．定義より $F_{\deg(f)+\gamma_0} A \subset F^\circ_{\gamma+\gamma_0} A$ である．$D(f) \in F_{\deg(f)+\gamma_0} A$ なので，$D(f) \in F^\circ_{\gamma+\gamma_0} A$ となる．よって，$D(F^\circ_\gamma A) \subset F^\circ_{\gamma+\gamma_0} A$ が成り立つ．以上より，線形写像 $\mathrm{gr}_{F_A,\gamma_0}(D)_\gamma$ が矛盾なく定義されていることが分かる．γ_0 が明らかなときは，$\mathrm{gr}_{F_A,\gamma_0}(D)$ を単に $\mathrm{gr}_{F_A}(D)$ と記す．

補題 3.1 写像 $\mathrm{gr}_{F_A}(D)$ は $\mathrm{gr}_{F_A}(A)$ 上の Γ 斉次な k 微分である．さらに $\mathrm{in}_\preceq(A^D) \subset \mathrm{gr}_{F_A}(A)^{\mathrm{gr}_{F_A}(D)}$ が成り立つ．

証明 $\mathrm{gr}_{F_A}(D)$ は k 線形写像である．微分であることを示すには

$$\mathrm{gr}_{F_A}(D)(hh') = h'\mathrm{gr}_{F_A}(D)(h) + h\mathrm{gr}_{F_A}(D)(h') \tag{3.6}$$

を確かめればよい．ここで，$f,f' \in A$, $h = \mathrm{in}_\preceq(f), h' = \mathrm{in}_\preceq(f')$ とする．$\gamma_1 = \deg(f) + \deg(f') + \gamma_0$ とおく．すると $\mathrm{gr}_{F_A}(D)(hh')$, $h'\mathrm{gr}_{F_A}(D)(h)$, $h\mathrm{gr}_{F_A}(D)(h')$ は，B_{γ_1} におけ

るそれぞれ $D(ff')$, $f'D(f)$, $fD(f')$ の像である．D は A 上の k 微分だから，$D(ff') = f'D(f) + D(f')f$ が成り立つ．よって (3.6) が従う．ゆえに $\mathrm{gr}_{F_A}(D)$ は $\mathrm{gr}_{F_A}(A)$ 上の k 微分である．$\mathrm{gr}_{F_A}(D)$ が Γ 斉次であることは定め方より明らかである．

次に $f \in A^D$ とする．$D(f) = 0$ なので，$B_{\deg(f)+\gamma_0}$ における $D(f)$ の像も零である．よって $\mathrm{gr}_{F_A}(D)(\mathrm{in}_{\preceq}(f)) = 0$ が従う．ゆえに，$\mathrm{in}_{\preceq}(A^D) \subset \mathrm{gr}_{F_A}(A)^{\mathrm{gr}_{F_A}(D)}$ が成り立つ．□

これと類似の次のような構成が [16, Section 2] にある ([17] も見よ)．$\preceq$ は全順序と仮定し，$A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ は Γ 次数付き k 代数とする．D は A から A への k 線形写像なので，k 線形写像 $D_\gamma : A \to A$ の和 $D = \sum_{\gamma\in\Gamma} D_\gamma$ の形に書ける．ここで，各 D_γ は任意の $\gamma' \in \Gamma$ に対して $D(A_{\gamma'}) \subset A_{\gamma+\gamma'}$ を満たすとする．さらに，集合 $\{\gamma \in \Gamma \mid D_\gamma \neq 0\}$ は最大元 γ_0 を持つと仮定する．このとき，$\mathrm{gr}(D) = D_{\gamma_0}$ とおく．すると，$\mathrm{gr}(D)$ は A 上の k 微分となる．

我々の方法では，これは次のように構成できる．まず，Γ フィルター付け $F_A = \{F_\gamma A\}_\gamma$ を，$F_\gamma A = \bigoplus_{\gamma'\preceq\gamma} A_{\gamma'}$ とおくことで定義する．この場合，Γ 次数付き k 代数 $\mathrm{gr}_{F_A}(A)$ はもとの A と等しい．さらに $\gamma_0 = \max\{\deg(D(f)) - \deg(f) \mid f \in A \setminus A^D\}$ が成り立つ．この γ_0 に関して定めた $\mathrm{gr}_{F_A,\gamma_0}(D)$ は再び A 上の k 微分となるが，この k 微分は $\mathrm{gr}(D)$ と同じものである．

もっと別なフィルター付けを考えることもできる．$\mathbf{R}^n$ における整凸多面体全体の集合 Σ は，ミンコフスキー和を加法として半群の構造を持つ．そこで，$\Gamma = (\Sigma \times \Sigma)/\sim$ とおく．ただし，$(P_1, P_2), (Q_1, Q_2) \in \Sigma \times \Sigma$ に対して，$P_1 + Q_2 = P_2 + Q_1$ のときに $(P_1, P_2) \sim (Q_1, Q_2)$ と定める．半群 Σ では簡約法則が成り立つことから，$\sim$ は $\Sigma \times \Sigma$ 上の同値関係となる．このとき Γ は，代表元の成分ごとの加算から定まる加法により，群の構造を持つ．実際，Γ における $(\{0\}, \{0\})$ の像が単位元である．また，(P_1, P_2) の像の逆元は (P_2, P_1) の像である．さて，$\gamma, \mu \in \Gamma$ と，それぞれの代表元 $(P_1, P_2), (Q_1, Q_2) \in \Sigma \times \Sigma$ をとる．そして，$P_1 + Q_2$ が $P_2 + Q_1$ の内部に含まれるときに $\gamma \prec \mu$ と定義する．この定義が代表元の選び方によらず，さらに $\preceq$ が Γ 上に半順序を定義すれることが，Σ の簡約法則を使って確かめられる．この半順序は Γ の加法と両立する．

$f \in k(\mathbf{x})\setminus\{0\}$ を任意とする．$f = g/h$ となるように $g, h \in k[\mathbf{x}]$ を選び，$\mathrm{supp}(g), \mathrm{supp}(h)$

の凸包をそれぞれ P, Q とおく．そして，Γ における (P, Q) の像を $\deg(f)$ と定める．この定義は g, h の取り方によらない．便宜的に $\deg(0)$ は Γ のどの元よりも小さいとする．このとき，各 $\gamma \in \Gamma$ に対して，

$$F_\gamma k(\mathbf{x}) = \{f \in k(\mathbf{x}) \mid \deg(f) \preceq \gamma\} \tag{3.7}$$

と定める．すると，$\{F_\gamma k(\mathbf{x})\}_{\gamma\in\Gamma}$ は $k(\mathbf{x})$ の Γ フィルター付けとなる．

このフィルター付けを $k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ に制限して考える．すなわち $\gamma \in \Gamma$ に対して，

$$F_\gamma k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] = F_\gamma k(\mathbf{x}) \cap k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \tag{3.8}$$

と定める．すると，$\{F_\gamma k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]\}_{\gamma\in\Gamma}$ は $k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ の Γ フィルター付けとなる．この場合，$F_\gamma k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \neq \{0\}$ ならばある $P \in \Sigma$ が存在して，γ は $(P, \{0\})$ の像 γ_P と等しい．このとき，k ベクトル空間 $F_{\gamma_P} k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]/F^\circ_{\gamma_P} k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ は

$$\{\mathbf{x}^a \mid a \text{ は次元が } n \text{ 未満の } P \text{ の面に含まれる}\} \tag{3.9}$$

が生成する k ベクトル空間と自然に同一視できる．ここで，凸多面体 $Q \subset \mathbf{R}^n$ と $\omega \in \mathbf{R}^n$ に対して，

$$\mathrm{face}_\omega(Q) = \{a \in Q \mid \text{全ての } b \in Q \text{ に対して } \omega \cdot b \leq \omega \cdot a \text{ が成り立つ}\} \tag{3.10}$$

を ω を法ベクトルとする Q の面という．$F \subset Q$ は，ある $\omega \in \mathbf{R}^n$ を法ベクトルとする面であるとき，Q の面であるという．F が Q の面のとき，

$$C_F(Q) = \{\omega \in \mathbf{R}^n \mid \mathrm{face}_\omega(Q) = F\} \tag{3.11}$$

とおく．

D を $k[\mathbf{x}]$ 上の k 微分とする．$\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ の凸包を P_D とし，Γ における $(P_D, \{0\})$ の像を γ_D とおく．すると任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して，$D(F_\gamma k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]) \in F_{\gamma+\gamma_D} k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ が成り立つ．P_D の面 $F \neq P_D$ に対して，

$$D_F = \sum_{i\in I_F} D_i \tag{3.12}$$

と定める．ただし，$I_F = \{i \mid \delta_i \in F\}$ とする．このとき，次が成り立つ．

命題 3.2 $f = \sum_a \alpha_a \mathbf{x}^a \in k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \setminus \{0\}$ に対して，$\mathbf{R}^n$ における $\mathrm{supp}(f)$ の凸包を N とおく．このとき $\mathrm{gr}_{F_{k[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]},\gamma_D}(D)(\mathrm{in}_{\preceq}(f)) = 0$ となるための必要十分条件は，次元が $n-1$ 以下の P_D の任意の面 F と $\omega \in C_F(P_D)$ に対して，$D_F(\sum_a \beta_a \mathbf{x}^a) = 0$ が成り立つことである．ただし，$a \in \mathrm{face}_\omega(N)$ ならば $\beta_a = \alpha_a$，そうでなければ $\beta_a = 0$ とする．

証明 $f = \sum_a \mathbf{x}^a \in k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ に対して，$\mathbf{R}^n$ における $\mathrm{supp}(f)$ の凸包を N とおく．このとき，$\mathrm{gr}_{F_{k[\mathbf{x},\mathbf{x}^{-1}]},\gamma_D}(D)(\mathrm{in}_{\preceq}(f)) = 0$ となるための必要十分条件は，次元が $n-1$ 以下の $N + P_D$ の任意の面と $\mathrm{supp}(D(f))$ が交わらないことである．$F' \subset N + P_D$ を次元が $n-1$ 以下の面，$\omega \in \mathbf{R}^n$ をその法ベクトルとする．すると，次元が $n-1$ 以下の P_D のある面 F に対して，$\omega \in C_F(P_D)$ となる．このとき，$F' \cap \mathrm{supp}(D(f)) = \mathrm{supp}(D_F(\sum_a \beta_a \mathbf{x}^a))$ となる．ただし，$a \in \mathrm{face}_\omega(P)$ ならば $\beta_a = \alpha_a$，そうでなければ $\beta_a = 0$ とする．よって $F' \cap \mathrm{supp}(D(f)) = \emptyset$ となるための必要十分条件は，$D_F(\sum_a \beta_a \mathbf{x}^a) = 0$ となることである．ゆえに主張が従う． □

3.2 微分の核の構成

多項式環 $k[\mathbf{x}]$ 上の k 微分 D の核 $k[\mathbf{x}]^D$ を記述する方法について考える．$\preceq \in \Omega$ とし，$\Gamma = \mathbf{Z}^n$ 上にはこの順序が定義されているとする．添え字を付けかえることで，全ての $1 < i \leq n$ に対して $\delta_i \prec \delta_1$ が成り立つと仮定する．

$$k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle = \left\{ f \in \prod_{a \in \mathbf{Z}^n} k\mathbf{x}^a \mid \mathrm{supp}(f) \text{ は } \preceq \text{ に関して逆整列集合} \right\} \tag{3.13}$$

とおく．すると，$k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle$ は体となる．例えば $\preceq$ が逆辞書式順序の逆，すなわち $(b_1, \ldots, b_n) \prec (a_1, \ldots, a_n)$ の成立は，$a_i \neq b_i$ となる最小の i に対して $a_i < b_i$ が成り立つときであるとする．このとき，$k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle$ は形式的ローラン級数体 $k((x_1))((x_2))\cdots((x_n))$ と等しい (c.f. [34])．$k[\mathbf{x}] \subset k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle$ だから，商体 $k(\mathbf{x})$ も $k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle$ に含まれる．

$f = \sum_a \alpha_a \mathbf{x}^a \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle$ に対して $D(f) = \sum_a D(\alpha_a \mathbf{x}^a)$ と定めることで，k 微分 D は $k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle$ 上に拡張できる．定義より，全ての $f \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle$ に対して $\mathrm{supp}(f)$ は最大元 $\deg(f)$ を持つ．便宜的に $\deg(0)$ は Γ のどの元よりも小さいと定める．各 $a \in \Gamma$ に

$$F_a k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle = \{f \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle \mid \deg(f) \preceq a\} \tag{3.14}$$

とおく．すると，$F_{k\langle\langle \mathbf{x},\preceq\rangle\rangle} = \{F_a k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle\}_{a\in\Gamma}$ は $k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle$ の Γ フィルター付けとなる．この場合，k ベクトル空間 $F_a k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle / F_a^\circ k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle$ は自然に $k\mathbf{x}^a$ と同一視できる．それによって，$\mathrm{gr}_{F_{k\langle\langle \mathbf{x},\preceq\rangle\rangle}}(k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle) = \bigoplus_{a\in\Gamma} k\mathbf{x}^a = k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ とみなせる．$f \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle$ が $k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ に含まれるとき，$\mathrm{in}_\preceq(f) \in \mathrm{gr}_{F_{k\langle\langle \mathbf{x},\preceq\rangle\rangle}}(k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle)$ を $k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ の元と思うと，これは第 1 節で定義した f のイニシャル項 $\mathrm{in}_\preceq(f)$ と同じものである．任意の $a \in \Gamma$ に対して $D(F_a k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle) \subset F_{a+\delta_1} k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle$ が成り立つ．このとき $k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ 上の k 微分 $\mathrm{gr}_{F_{k\langle\langle \mathbf{x},\preceq\rangle\rangle}}(D) = \mathrm{gr}_{F_{k\langle\langle \mathbf{x},\preceq\rangle\rangle},\delta_1}(D)$ は，D_1 と等しい．

$1 \le i \le m$ に対して，準同型 $\lambda_i : \mathbf{Z}^n \to k$ を

$$\lambda_i((a_1, \ldots, a_n)) = \kappa_{i,1}a_1 + \cdots + \kappa_{i,n}a_n \tag{3.15}$$

と定める．すると，任意の $a \in \mathbf{Z}^n$ と $1 \le i \le m$ に対して

$$D_i(\mathbf{x}^a) = \lambda_i(a)\mathbf{x}^{a+\delta_i} \tag{3.16}$$

が成り立つ．補題 3.1 の系として次の補題が得られる．

補題 3.3 任意の $f \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle^D \setminus \{0\}$ に対して $\lambda_1(\deg(f)) = 0$ である．

証明 補題 3.1 より $\mathrm{gr}_{F_{k\langle\langle \mathbf{x},\preceq\rangle\rangle}}(D)(\mathrm{in}_\preceq(f)) = 0$ となる．定義より，$\mathrm{in}_\preceq(f)$ はある $\alpha \in k\setminus\{0\}$ によって $\alpha\mathbf{x}^{\deg(f)}$ と表せる．$\mathrm{gr}_{F_{k\langle\langle \mathbf{x},\preceq\rangle\rangle}}(D) = D_1$ だから，(3.16) より $\lambda_1(\deg(f)) = 0$ が成り立つ． □

さて，

$$A' = \{f \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle \mid \mathrm{supp}(f) \subset \ker \lambda_1\} \tag{3.17}$$

とおく．これは $k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle$ の k 部分代数である．k 線形写像 $\Phi : k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq\rangle\rangle^D \to A'$ を，$\Phi(\sum_a \alpha_a \mathbf{x}^a) = \sum_a \beta_a \mathbf{x}^a$ と定義する．ただし，

$$\beta_a = \begin{cases} \alpha_a & \lambda_1(a) = 0 \text{ のとき} \\ 0 & \lambda_1(a) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

補題 3.4 Φ は単射である．また $f \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle^D$ に対して，$\mathrm{in}_{\preceq}(f) = \mathrm{in}_{\preceq}(\Phi(f))$ が成り立つ．特に，k 部分ベクトル空間 $V \subset k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]^D$ に対して $\mathrm{in}_{\preceq}(V) = \mathrm{in}_{\preceq}(\Phi(V))$ である．

証明 $\Phi(f) = 0$ となる $f \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle^D \setminus \{0\}$ が存在したとする．すると，全ての $a \in \mathrm{supp}(f)$ に対して $\lambda_1(a) \neq 0$ となる．これは補題 3.3 に矛盾する．よって Φ は単射である．後半も補題 3.3 と Φ の定め方から従う． □

次に，$k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle^D \ni f \mapsto \Phi(f) \in \Phi(k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle)$ の逆写像を具体的に構成する．$\epsilon_i = \delta_i - \delta_1$, $H = \sum_{i>1} \mathbf{Z}_{\geq 0}\epsilon_i$ とおく．$\epsilon_i \preceq 0$ だから H は逆整列集合である．各 $1 < i \leq m$ に対して線形作用素 $E_i \in \mathrm{End}_k(k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle)$ を次のように定める．モノミアル $\mathbf{x}^a$ に対して，$\lambda_1(a + \epsilon_i) \neq 0$ ならば

$$E_i(\mathbf{x}^a) = \frac{\lambda_i(a)}{\lambda_1(a + \epsilon_i)} \mathbf{x}^{a+\epsilon_i}, \tag{3.18}$$

そうでないときは $E_i(\mathbf{x}^a) = 0$ とする．$k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle$ の一般の元に対しては，項ごとに作用させることで定める．すると，E_i は $k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle$ 上の線形作用素となる．次に，$E = E_2 + \cdots + E_m$ とおき

$$\Psi = \sum_{j=0}^{\infty} (-E)^j \tag{3.19}$$

と定める．すると $\Psi \in \mathrm{End}_k(k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle)$ となる．定め方より，任意の $g \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle$ に対して

$$\mathrm{supp}(\Psi(g)) \subset \mathrm{supp}(g) + H \tag{3.20}$$

が成り立つ．

定理 3.5 $f \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle^D$ に対して，$\Psi(\Phi(f)) = f$ が成り立つ．

次の補題を準備する．$g \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle$ と $a \in \mathbf{Z}^n \setminus \mathrm{supp}(g)$ を任意とする．$1 \leq i \leq m$ に対して $a_i = a - \epsilon_i$ とおき，$\mathbf{x}^{a_i}$ を含む $\Psi(g)$ の単項式を t_i とおく．$a_1 = a$ なので，t_1 は $\mathbf{x}^a$ を含む $\Psi(g)$ の単項式である．

補題 3.6 上の記号の下で，

$$t_i = -\sum_{i=2}^{m} E_i(t_i) \tag{3.21}$$

が成り立つ．また，$b \in \ker \lambda_1$ のとき $\mathbf{x}^b$ の $\Psi(g)$ における係数は，g における係数と等しい．

証明 $a_i, b \in \mathrm{supp}(E^j(g))$ となる j は有限個しか存在しないことに注意する．したがって十分大きな $N > 0$ をとれば，$\mathbf{x}^{a_i}$ や $\mathbf{x}^b$ の係数は $\Psi(g)$ の中でも $\sum_{j=0}^{N}(-E)^j(g)$ の中でも同じである．さらに，$a_i, b \in \mathrm{supp}(\sum_{j=0}^{N}(-E)^j(\mathbf{x}^c))$ を満たす $c \in \mathrm{supp}(g)$ は有限個しか存在しないので，$g \in k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ としてよい．作用素 $\sum_{j=0}^{N}(-E)^j$ は線形なので，g は $\mathbf{x}^a$ と異なるモノミアル $\mathbf{x}^c$ と仮定しても一般性を失わない．

自然数列 $(i_l)_{l=1}^r$ であって

$$r \in \mathbf{Z}_{\geq 0},\ 2 \leq i_l \leq m,\ c + \sum_{l=1}^{r} \epsilon_{i_l} = a \tag{3.22}$$

を満たすもの全体の集合を S とおく．また各 $2 \leq i \leq m$ に対して，$i_r = i$ を満たす $(i_l)_{l=1}^r \in S$ 全体の集合を S_i とおく．すると

$$t_1 = \sum_{(i_l)_{l=1}^r \in S} (-E_{i_r}) \circ \cdots \circ (-E_{i_1})(\mathbf{x}^c) \tag{3.23}$$

が，また $2 \leq i \leq m$ に対しては

$$t_i = \sum_{(i_l)_{l=1}^r \in S_i} (-E_{i_{r-1}}) \circ \cdots \circ (-E_{i_1})(\mathbf{x}^c) \tag{3.24}$$

が成り立つ．$S = \coprod_{i=2}^{m} S_i$ だから

$$\begin{aligned} t_1 &= \sum_{(i_l)_{l=1}^r \in S} (-E_{i_r}) \circ \cdots \circ (-E_{i_1})(\mathbf{x}^c) \\ &= \sum_{i=2}^{m} -E_i \left(\sum_{(i_l)_{l=1}^r \in S_j} (-E_{i_{r-1}}) \circ \cdots \circ (-E_{i_1})(\mathbf{x}^c) \right) \\ &= -\sum_{i=2}^{m} E_i(t_i) \end{aligned}$$

を得る．これで前半部分が示された．

$b \in \ker \lambda_1$ とする．定義より，$1 < i \leq m$ に対して $E_i(\mathbf{x}^{b-\epsilon_i}) = 0$ が成り立つ．$b \neq c$ のときは (3.21) から $\Psi(\mathbf{x}^c)$ における $\mathbf{x}^b$ の係数は零となる．よってこの場合は主張は正しい．$b = c$ のとき，$\Psi(\mathbf{x}^c)$ における $\mathbf{x}^c$ の係数が 1 でなかったとすると，$r > 0$ と $1 < i_1, \ldots, i_r \leq m$ が存在して $c = c + \sum_{i=1}^{r} \epsilon_{i_l}$ が成り立つ．しかし，$\epsilon_{i_l} \prec 0$ だからこれは矛盾である．よって $\Psi(\mathbf{x}^c)$ における $\mathbf{x}^b$ の係数は 1 である．以上で補題は示された．□

定理 3.5 の証明．　$f \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle^D$ に対して $h = \Psi(\Phi(f)) - f$ とおく．$h \neq 0$ と仮定して矛盾を導く．$a = \deg(h)$, $a_i = a - \epsilon_i$ とおき，f, $\Psi(\Phi(f))$ における $\mathbf{x}^{a_i}$ の係数をそれぞれ α_i, α'_i とする．$a_1 = a$ なので，これは $\mathrm{supp}(h)$ に含まれる．よって $\alpha_1 \neq \alpha'_1$ である．$1 < i \leq m$ とする．$\epsilon_i \prec 0$ なので $a \prec a_i$ である．$a = \max_{\preceq} \mathrm{supp}(h)$ だから，$a_i \notin \mathrm{supp}(h)$，すなわち $\alpha_i = \alpha'_i$ が成り立つ．また，$\lambda_1(a_1) \neq 0$ である．実際，もし $\lambda_1(a_1) = 0$ なら補題 3.6 より $\mathbf{x}^{a_1}$ の $\Psi(\Phi(f))$ における係数は，$\Phi(f)$ における係数と等しい．Φ の定め方より，これは f における $\mathbf{x}^{a_1}$ の係数と同じだから，$\alpha_1 \neq \alpha'_1$ に矛盾する．よって $\lambda_1(a_1) \neq 0$ である．特に，$a_1 \notin \mathrm{supp}(\Phi(f))$ である．

$D(f)$ における $\mathbf{x}^{a_1+\delta_1}$ の係数は $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i(a_i)$ と書ける．$D(f) = 0$ だからこれは 0 である．よって

$$\alpha_1 = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \frac{\lambda_i(a_i)}{\lambda_1(a_1)} \tag{3.25}$$

が成り立つ．一方，補題 3.6 より

$$\alpha'_1 \mathbf{x}^{a_1} = -\sum_{i=2}^{m} E_i(\alpha'_i \mathbf{x}^{a_i}) = -\sum_{i=2}^{m} \alpha'_i \frac{\lambda_i(a_i)}{\lambda_1(a_1)} \mathbf{x}^{a_1} \tag{3.26}$$

が成り立つ．$1 < i \leq m$ に対して $\alpha_i = \alpha'_i$ だから，(3.25) と (3.26) から $\alpha_1 = \alpha'_1$ が従う．これは矛盾である．よって $h = 0$，すなわち $\Psi(\Phi(f)) = f$ が成り立つ．これで定理 3.5 が示された．□

補題 3.7 $g \in A'$ とする．任意の $1 < i \leq m$ と $a \in \mathrm{supp}(\Phi(g)) \setminus \ker \lambda_i$ に対して $\lambda_1(a + \epsilon_i) \neq 0$ が成り立つならば，$\Psi(g) \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle^D$ である．

証明 $D(\Psi(g)) \neq 0$ と仮定する．$b = \deg(D(\Psi(g)))$, $a_i = b - \delta_i$ とおき，$\Psi(g)$ における $\mathbf{x}^{a_i}$ の係数を α_i とする．すると，$D(\Psi(g))$ における $\mathbf{x}^b$ の係数は，$\beta = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i(a_i)$ となる．初めに $\lambda_1(a_1) \neq 0$ の場合を考える．条件より $\mathrm{supp}(g) \subset \ker \lambda_1$ だから $a_1 \notin \mathrm{supp}(g)$ である．$a_i = b - \delta_i - (b - \delta_1 - a_1) = a_1 - \epsilon_i$ だから，補題 3.6 より

$$\alpha_1 \mathbf{x}^{a_1} = -\sum_{i=2}^{m} E_i(\alpha_i \mathbf{x}^{a_i}) = -\sum_{i=2}^{m} \alpha_i \frac{\lambda_i(a_i)}{\lambda_1(a_1)} \mathbf{x}^{a_1} \tag{3.27}$$

が成り立つ．これは $\beta \neq 0$ に矛盾する．次に $\lambda_1(a_1) = 0$ と仮定する．$a_1 = a_i + \epsilon_i$ だから，補題の条件より $1 < i \leq m$ に対して $a_i \notin \mathrm{supp}(\Psi(g)) \setminus \ker \lambda_1$ となる．すなわち，$\alpha_i \lambda_i(a_i) = 0$ が $1 < i \leq m$ に対して成り立つ．この場合も $\beta = 0$ となって矛盾が生じる．ゆえに $D(\Psi(g)) = 0$ である． □

$\bar{H} = \sum_{j=2}^{m} \mathbf{R}_{\geq 0}(\delta_j - \delta_1)$, $F = (\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \ker \lambda_1) \cap \bar{H}$ とおく．

命題 3.8 F が凸多面錐 $\bar{H}$ の面であると仮定する．$\epsilon_i \in F$ を満たす全ての $1 < i \leq m$ に対して $\ker \lambda_1 \subset \ker \lambda_i$ が成り立つとき，線形写像 $\Phi : k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle \to A'$ は k 代数としての同型写像である．

証明 補題 3.4 より Φ は単射である．全射性を示すには，任意の $g \in A'$ に対して $\Psi(g) \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle^D$ をいえばよい．$1 < i \leq m$ と $a \in \mathrm{supp}(\Psi(g))$ を任意とし，$\lambda_1(a + \epsilon_i) = 0$ と仮定する．(3.20) より，ある $a' \in \mathrm{supp}(g)$ と $b \in H$ を用いて $a = a' + b$ と書ける．$\lambda_1(a') = 0$ だから，$0 = \lambda_1(a + \epsilon_i) = \lambda_1(a' + b + \epsilon_i) = \lambda_1(b + \epsilon_i)$ となる．よって $b + \epsilon_i \in F$ である．F は $\bar{H}$ の面だから，$\epsilon_i \in F$ である．仮定より，$\ker \lambda_1 \subset \ker \lambda_i$ だから $a = (a + \epsilon_i) - \epsilon_i \in \ker \lambda_i$ となる．ゆえに補題 3.7 より $\Psi(g) \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle^D$ が従う．よって Φ は全射である．

Φ が k 代数の準同型であることを示すには，Ψ が積を保つことを確かめればよい．$g_1, g_2 \in A'$ に対して $f = \Psi(g_1 g_2) - \Psi(g_1)\Psi(g_2)$ とおき，$f \neq 0$ と仮定して矛盾を導く．$f \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle^D$ なので補題 3.3 より $\lambda_1(\deg(f)) = 0$ である．f は

$$(\Psi(g_1 g_2) - g_1 g_2) - (\Psi(g_1) - g_1) g_2 - g_1 (\Psi(g_2) - g_2) - (\Psi(g_1) - g_1)(\Psi(g_2) - g_2) \tag{3.28}$$

と表せる．よって $\mathrm{supp}(f)$ の元である $\deg(f)$ は，

$$\mathrm{supp}(\Psi(g_1g_2)-g_1g_2),\ S_1+\mathrm{supp}(g_2),\ \mathrm{supp}(g_1)+S_2,\ S_1+S_2 \tag{3.29}$$

のどれかに属す．ここで，$\mathrm{supp}(\Psi(g_i)-g_i)=S_i$ とする．補題 3.6 より，$\mathrm{supp}(\Psi(g_1g_2)-g_1g_2)\cap\ker\lambda_1=\emptyset$, $S_i\cap\ker\lambda_1=\emptyset$ が従う．$\mathrm{supp}(g_i)\subset\ker\lambda_1$ だから，$\mathrm{supp}(\Psi(g_1g_2)-g_1g_2)$, $S_1+\mathrm{supp}(g_2)$, $\mathrm{supp}(g_1)+S_2$ に $\deg(f)$ は含まれない．(3.20) より，S_i の任意の元は a_i+b_i と書ける．ここで $a_i\in\mathrm{supp}(g_i)$, $b_i\in H\setminus\ker\lambda_1$ とする．$a_i\in\ker\lambda_1$ だから $\lambda_1(a_1+a_2+b_1+b_2)=\lambda(b_1+b_2)$ である．これが零だと仮定すると，$b_1+b_2\in F$ となる．F は $\bar{H}$ の面だから，$b_1,b_2\in F$ となって $b_i\not\in\ker\lambda_1$ に矛盾する．よって，$(S_1+S_2)\cap\ker\lambda_1=\emptyset$ であり，ここにも $\deg(f)$ は属さない．これは矛盾だから，$\Psi(g_1g_2)=\Psi(g_1)\Psi(g_2)$ が成り立つ．以上で，$\Phi:k\langle\langle\mathbf{x},\preceq\rangle\rangle^D\to A'$ が k 代数としての同型であることが示された．□

3.3 局所冪零微分の場合

D が多項式環 $k[\mathbf{x}]$ 上の局所冪零微分の場合を考える．δ_1 が P_D の頂点であることと，ある $\preceq\in\Omega$ について $\delta_j\prec\delta_1$ が全ての $1<j\leq m$ に対して成り立つことは同じである．

補題 3.9 D は局所冪零とする．δ_1 が P_D の頂点ならば，ある $1\leq i\leq n$ に対して δ_1 の第 i 成分は -1 となる．このとき，

(1) $\ker\lambda_1=\{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbf{Z}^n\mid a_i=0\}$ である．

(2) $F=(\mathbf{R}\otimes_{\mathbf{Z}}\ker\lambda_1)\cap\sum_{j=2}^m\mathbf{R}_{\geq0}(\delta_j-\delta_1)$ は凸多面錐 $\sum_{j=2}^m\mathbf{R}_{\geq0}(\delta_j-\delta_1)$ の面である．

(3) $\delta_j-\delta_1\in F$ ならば $\ker\lambda_j=\ker\lambda_1$ が成り立つ．

証明 前半を仮定して，先に (1), (2), (3) を示す．δ_1 の第 i 成分が -1 なので，全ての $j\neq i$ に対して $\kappa_{1,j}=0$ となる．実際，$j\neq i$ に対して $\kappa_{1,j}\neq0$ ならば，$D(x_j)$ は負冪項を持ち $k[\mathbf{x}]$ に含まれない．よって (1) が従う．

全ての δ_j の第 i 成分は -1 以上である．よって，F は $-e_i$ を法ベクトルとする $\sum_{j=2}^m\mathbf{R}_{\geq0}(\delta_j-\delta_1)$ の面である．よって (2) が得られた．

$\delta_j - \delta_1 \in F$ ならばδ_j の第 i 成分は -1 である．すると，(1) の場合のように $\ker \lambda_1 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n \mid a_i = 0\}$ となる．よって $\ker \lambda_j = \ker \lambda_1$ となり，(3) が示せた．

次に前半を示す．δ_1 の各成分は -1 以上だから，$\delta_1 \in \mathbf{Z}_{\geq 0}{}^n$ と仮定して矛盾を導けばよい．$a \in \mathbf{Z}_{\geq 0}{}^n$ を，任意の $p \geq 0$ に対して $(a + p\delta_1) \cap \ker \lambda_1 = \emptyset$ を満たすようにとれる．実際，$\delta_1 \in \ker \lambda_1$ のときは $\mathbf{Z}_{\geq 0}{}^n \setminus \ker \lambda_1$ からとればよい．また，$\delta_1 \notin \ker \lambda_1$ のときは $a = \delta_1$ とすればよい．このとき任意の $p \geq 0$ に対して，モノミアル $\mathbf{x}^{a+p\delta_1}$ が $D^p(\mathbf{x}^a)$ に零でない係数で現れることを示す．(3.16) を繰り返し使うことで，

$$D^p(\mathbf{x}^a) = \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_p=1}^{m} \lambda_{i_1}(a)\lambda_{i_2}(a + \delta_{i_1}) \cdots \lambda_{i_p}(a + \delta_{i_1} + \cdots + \delta_{i_{p-1}})\mathbf{x}^{a+\delta_{i_1}+\cdots+\delta_{i_p}} \tag{3.30}$$

が得られる．δ_1 は P_D の頂点だから，$a+\delta_{i_1}+\cdots+\delta_{i_p} = a+p\delta_1$ ならば $i_1 = \cdots = i_p = 1$ である．一方，a の選び方から $\prod_{j=0}^{p-1} \lambda_1(a + j\delta_1) \neq 0$ である．よって，$D^p(\mathbf{x}^a)$ はモノミアル $\mathbf{x}^{a+p\delta_1}$ を持つ．したがって，全ての $p \geq 0$ に対して $D^p(\mathbf{x}^a) \neq 0$ である．これは D が局所冪零であることに矛盾する．ゆえに，δ_1 のある成分は -1 である． □

この補題より，D が局所冪零なら補題 3.7 や命題 3.8 の条件がつねに満たされることが分かる．よって $\Phi : k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle \to A'$ は同型である．δ_1 において -1 を持つ成分が i 番目ならば，(1) より $A' \cap k[\mathbf{x}] = k[\{x_j \mid j \neq i\}]$ となる．したがって，全ての $g \in k[\{x_j \mid j \neq i\}]$ に対して $\Psi(g) \in k\langle\langle \mathbf{x}, \preceq \rangle\rangle^D$ となる．またこのとき，Φ は x_i に0を代入する写像である．

多項式 f に対して，$\mathrm{supp}(f)$ の凸包を f のニュートンポリトープという．

系 3.10 (Hadas, Makar-Limanov [16]) $f \in k[\mathbf{x}]^D$ のニュートンポリトープの頂点は，必ず $\mathbf{R}^n$ の座標超平面に含まれる．

証明 a を f のニュートンポリトープの頂点とする．すると，ある $\preceq \in \Omega$ に対して $\mathrm{in}_{\preceq}(f) = \alpha\mathbf{x}^a$ となる．ここで，α は f における $\mathbf{x}^a$ の係数とする．添え字を付けかえることで，全ての $1 < j \leq m$ に対して $\delta_j \prec \delta_1$ が成り立つとしてよい．このとき，補題 3.3 より $\lambda_1(a) = 0$ である．補題 3.9 (1) より $\ker \lambda_1$ は $\mathbf{R}^n$ のある座標超平面に含まれる．ゆえに主張が従う． □

正標数の場合の類似の結果が [17] にある．

ここで補題 2.13 を証明する．δ_1 は $\mathrm{conv}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ の頂点であり，δ_1 の第 $n-2$ 成分は -1 である．よって，Φ は x_{n-2} に 0 を代入する写像である．また定義に従って計算すると，逆写像 Ψ は代入 $x_{n-1} \mapsto x_{n-1}\tilde{F}_1$, $x_n \mapsto x_n\tilde{F}_2$ によって与えられる準同型となることが分かる．これは補題 2.13 の直前で定義した Ψ と同じである．

補題 2.13 の証明．　$f \in k[\mathbf{x}]^D$ を任意にとり，$g = \Phi(f)$ とおく．g は次の性質を満たす $g_i \in k[\{x_j \mid j \neq n-2\}]$ たちの和 $g = \sum_i g_i$ の形に表せる．

(1) $a, b \in \mathrm{supp}(g_i)$ に対して $a - b \in \mathbf{Z}\epsilon_2 + \mathbf{Z}\epsilon_3$.

(2) $i \neq j$ ならば，$a \in \mathrm{supp}(g_i), b \in \mathrm{supp}(g_j)$ に対して $a - b \notin \mathbf{Z}\epsilon_2 + \mathbf{Z}\epsilon_3$.

(3.20) より，$\mathrm{supp}(\Psi(g_i)) \subset \mathrm{supp}(g_i) + \mathbf{Z}_{\geq 0}\epsilon_2 + \mathbf{Z}_{\geq 0}\epsilon_3$ が成り立つ．よって (2) より，$i \neq j$ に対して $\mathrm{supp}(\Psi(g_i)) \cap \mathrm{supp}(\Psi(g_j)) = \emptyset$ となる．条件 (1) より，$a \in \mathrm{supp}(g_i)$ に対して $\mathrm{supp}(g_i) \subset a + \mathbf{Z}\epsilon_2 + \mathbf{Z}\epsilon_3$ が成り立つ．第 $n-2$ 成分が零である $\mathbf{Z}\epsilon_2 + \mathbf{Z}\epsilon_3$ の元全体の集合は，$\mathbf{Z}\eta$ と等しい．$\mathrm{supp}(g_i)$ の各元の第 $n-2$ 成分は零だから，$\mathrm{supp}(g_i) \subset a + \mathbf{Z}\eta$ となる．a を適当に選べば $\mathrm{supp}(g_i) \subset a + \mathbf{Z}_{\geq 0}\eta$ とできる．よって，ある $p \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ と $\alpha_j \in k$ に対して，$g_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_i \mathbf{x}^{i\eta}$ となる．これで補題 2.13 が示された．　□

局所冪零微分の核の構成には，スライスを用いた次の方法がよく知られている (cf. [7, 1.3])．一般に A を k 代数，D を A 上の局所冪零微分とする．$s \in A$ は $D(s) = 1$ を満たすとき D のスライスという．D がスライスを持つと仮定する．$f \in A$ に対して

$$\Psi_s(f) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-s)^p}{p!} D^p(f) \tag{3.31}$$

と定める．D は局所冪零だから，ある番号から先の全ての p に対して $D^p(f) = 0$ となるので，(3.31) の右辺の和は意味を持つ．定義より $\Psi_s(s) = 0$ である．また，任意の $f, f' \in A$ と $g \in A^D$ に対して $\Psi_s(f) \in A^D$, $\Psi_s(ff') = \Psi_s(f)\Psi_s(f')$, $\Psi_s(g) = g$ が成り立つことも確かめられる．よって $A \ni f \mapsto \Psi_s(f) \in A$ は k 代数の全射な準同型である．

D を $k[\mathbf{x}]$ 上の自明でない局所冪零 k 微分とすると，$h \in k[\mathbf{x}] \setminus k[\mathbf{x}]^D$ が存在する．$D^l(h) \neq 0$, $D^{l+1}(h) = 0$ を満たすように $l \geq 1$ を定める．すると，$s = D^{l-1}(h)/D^l(h)$ は

D のスライスである．よって $k[\mathbf{x}][1/D^l(h)]^D = k[\Psi_s(x_1), \ldots, \Psi_s(x_n), 1/D^l(h)]$ となる．$k[\mathbf{x}]^D = k[\mathbf{x}][1/D^l(h)]^D \cap k[\mathbf{x}]$ だから，

$$k[\mathbf{x}]^D = k[\Psi_s(x_1), \ldots, \Psi_s(x_n), 1/D^l(h)] \cap k[\mathbf{x}] \tag{3.32}$$

が成り立つ．

補題 3.4 を応用して，第 1 節で使った事実を証明する．

例 3.11 斉次式で生成された k 部分代数 $A \subset k[x_2 - x_1, x_3 - x_1]$ は，異なるイニシャル代数を高々6個しか持たない．

証明 $k[x_1, x_2, x_3]$ 上の k 微分

$$D = x_1^{-1}\frac{x_1\partial}{\partial x_1} + x_2^{-1}\frac{x_2\partial}{\partial x_2} + x_3^{-1}\frac{x_3\partial}{\partial x_3} \tag{3.33}$$

を考える．x_1 は D のスライスである．$\Psi_{x_1}(x_i) = x_i - x_1$ だから，$k[x_1, x_2, x_3]^D = k[x_1 - x_2, x_1 - x_3]$ となる．$\preceq \in \Omega$ が $x_2^{-1}, x_3^{-1} \prec x_1^{-1}$ すなわち $x_1 \prec x_2, x_3$ を満たすとき，補題 3.4 より $\mathrm{in}_\preceq(A) = \mathrm{in}_\preceq(A_1)$ が従う．ここで A_1 は，代入写像 $x_1 \mapsto 0$ による A の像とする．A は斉次式で生成されているので，A_1 は $k[x_2, x_3]$ の斉次元で生成される．したがって，A_1 のイニシャル代数はそれぞれ $x_2 \prec x_3$ を満たす $\preceq \in \Omega$ に対するものと，$x_3 \prec x_2$ を満たす $\preceq \in \Omega$ に対するものの 2 つしか存在しない．同様に，$x_2 \prec x_3, x_1$ のときと $x_3 \prec x_1, x_2$ のときも高々2 つしか存在しないので，主張が従う． □

ある $1 \leq i \leq n$ が，$D(x_i) \in k[\mathbf{x}]^D \setminus \{0\}$ を満たす場合を考える．すると $s = x_i/D(x_i)$ は D のスライスである．このとき x_i は $D(x_i)$ を割り切らない (一般に，D が整域 A 上の局所冪零微分のとき，$f, g \in A$ が $fg \in A^D$ を満たすならば $f, g \in A^D$ となるから (cf. [7, Proposition 1.3.32]))．よって，$x_i^{-1}D(x_i)$ のあるモノミアルの x_i の冪は -1 である．したがって，ある δ_j の第 i 成分は -1 である．δ_j は P_D の頂点としてよい．添え字を付けかえることで，$j = 1$ とする．

命題 3.12 D は局所冪零で，$D(x_i) \in k[\mathbf{x}]^D \setminus \{0\}$ を満たすとする．このとき $s = x_i/D(x_i)$ とおくと，任意の $g \in k[\{x_j \mid j \neq i\}]$ に対して $\Psi_s(g) = \Psi(g)$ が成り立つ．

証明 補題3.9の後に述べたように，Φ は x_i に 0 を代入する写像である．よって $\Phi(s)=0$, $\Phi(g)=g$ となる．ゆえに $\Phi(\Psi_s(g))=g$ を得る．$\Psi_s(g)\in k\langle\langle \mathbf{x},\preceq\rangle\rangle^D$ だから，定理 3.5 より $\Psi_s(g)=\Psi(\Phi(\Psi_s(g)))=\Psi(g)$ 成り立つ． □

第 2 節で考えた (2.9) は三角微分なので，$D(x_{n-2})\in k[\mathbf{x}]^D$ となる．よって，$s=x_{n-2}/D(x_{n-2})=(\kappa_1\delta_1)^{-1}$ とおけば，$g\in k[\{x_i\mid i\neq n-2\}]$ に対して $\Psi(g)=\Psi_s(g)$ が成り立つ．

参考文献

[1] W. Adams, S. Hoşten, P. Loustaunau, L. Miller: *SAGBI and SAGBI-Gröbner bases over principal ideal domains*, J. Symb. Comput., 27 (1999), 31–47.

[2] W. Bruns, A. Conca: *Algebras of minors*, J. Algebra 246 (2001), 311–330.

[3] Casapenko Louisa: *Subalgebra bases and recognizable properties*, Acta Math. Acad., 18 (2002), 1–6.

[4] A. Conca, J. Herzog, G. Valla: *Sagbi bases with applications to blow-up algebras*, J. Reine Angew. Math., 474 (1996), 113–138.

[5] H. Derksen: *The kernel of a derivation*, J. Pure Appl. Algebra 84 (1993), 13–16.

[6] D. Daigle, G. Freudenburg: *A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension* 5, J. Algebra, 221 (1999), 528–535.

[7] A. van den Essen: "Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture", Birkhäuser, Progress in mathematics, Vol. 190, 2000.

[8] M. Göbel: *A Constructiv Description of SAGBI Bases for Polynomial Invariants of Permutation Groups*, J. Symb. Comput., 26 (1998), 261–272.

[9] M. Göbel: *Three remarks on SAGBI bases for polynomial invariants of permutation groups*, Combinatorics, Computation & Logic '99 (Auckland), Aust. Comput. Sci. Commun., Vol. 21, Springer, Singapore (1999), 190–201.

[10] M. Göbel: *The optimal lower bound for generators of invariant rings without finite SAGBI bases with respect to any admissible order*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci., 3 (1999), 65–70.

[11] M. Göbel: *The "smallest" ring of polynomial invariants of a permutation group which has no finite SAGBI bases w.r.t. any admissible order*, Theoret. Comput. Sci., 225 (1999), 177–184.

[12] M. Göbel: *Rings of polynomial invariants of the alternating group have no finite SAGBI bases with respect to any admissible order*, Inform. Process. Lett., 74 (2000), 15–18.

[13] M. Göbel, *Visualizing properties of comprehensive SAGBI bases—two examples*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput., 12 (2001), 429–435.

[14] M. Göbel, *Finite SAGBI bases for polynomial invariants of conjugates of alternating groups*, Math. Comp., 71 (2002), 761–765.

[15] M. Göbel, P. Maier: *Three remarks on comprehensive Gröbner and SAGBI bases*, Computer algebra in scientific computing (Samarkand 2000), 191–202, Springer, Berlin, 2000.

[16] O. Hadas, L. Makar-Limanov: *Newton potytopes of constants of locally nilotent derivations*, Comm. Algebra, 28 (2000), 3667–3678.

[17] H. Derksen, O. Hadas, L. Makar-Limanov: *Newton potytopes of invariants of additive group actions*, J. Pure Appl. Algebra, 156 (2001), 187–197.

[18] D. Kapur, K. Madlener: *A completion procedure for computing a canonical basis for a k-subalgebra*, Computers and Mathematics, Springer, New York, 1–11.

[19] H. Kojima, M. Miyanishi: *On Robert's counterexample to the fourteenth problem of Hilbert*, J. Pure Appl. Algebra, 122 (1997), 277–292.

[20] S. Kuroda: *The infiniteness of the SAGBI bases for certain invariant rings*, Osaka J. Math., Vol. 39, no. 3 (2002).

[21] S. Kuroda: *The infiniteness of the SAGBI bases for certain invariant rings*, 数理解析研究所講究録 1175, 51–62.

[22] S. Kuroda: *A condition for finite generation of the kernel of a derivation*, submitted to J. Algebra.

[23] S. Maubach: *Triangular monomial derivations on $k[X_1, X_2, X_3, X_4]$ have kernel generated by at most four elements*, J. Pure Appl. Algebra, 153 (2000), 165–170.

[24] D. Maclagan: *Antichains of monomial ideals are finite*, Proc. Amer. Math. Soc., 129 (2001), 1609–1615.

[25] L. Miller: *Analogs of Gröbner bases in polynomial rings over a ring*, J. Symb. Comput., 21 (1996), 139–153.

[26] L. Miller: *Effective algorithms for intrinsically computing SAGBI-Gröbner bases in a polynomial ring over a field*, Gröbner bases and applications (Linz 1998), 421–433, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 251.

[27] S. Mukai: *Counterexample to Hilbert's fourteenth problem for the 3-dimensional additive group*, preprint.

[28] M. Nagata: "Lectures on the fourteenth problem of Hilbert", Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.

[29] P. Nordbeck: *SAGBI bases under composition*, J. Symb. Comput., Vol. 33 (2002), 67 – 76.

[30] P. Nordbeck: *Canonical Bases for Subalgebras of Factor Algebras*: Comput. Sci. J. Mold., Vol. 7(1999), 63–77.

[31] P. Nordbeck: *Canonical subalgebra bases in non-commutative polynomial rings*, Proceedings of the 1998 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Rostock), 140–146.

[32] A. Nowicki: *Rings and field sof constants for derivations in characteristic zero*, J. Pure Appl. Algebra, 96 (1994), 47–55.

[33] F. Ollivier: *Canonical bases: relations with standard bases, finiteness conditions and application to tame automorphisms*, Effective methods in algebraic geometry (Castiglioncello 1990), 379–400.

[34] A. Sathaye, *Generalized Newton-Puiseux expansion and Abhyankar-Moh semigroup theorem*, Invent. Math., 74 (1983), 149–157.

[35] Z. Reichstein: *SAGBI bases in rings of multiplicative invariants*, preprint.

[36] L. Robbiano: *On the Theory of Graded Structures*, J. Symb. Comput., 2 (1986), 139–170.

[37] L. Robbiano, M. Sweedler: *Subalgebra bases*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1430 (1988), 61–87.

[38] L. Robbiano, M. Sweedler, *Ideal and subalgebra coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), 2213–2219.

[39] R. Shank: *S.A.G.B.I. bases for rings of formal modular seminvariants*, Comment. Math. Helv. 73 (1998), 548–565.

[40] N. Schwartz, *Stability of Gröbner Bases*, J. Pure. Appl. Algebra 53 (1988), 171–186.

[41] F. Sottile, B. Sturmfels: *A sagbi basis for the quantum Grassmannian*, J. Pure Appl. Algebra 158 (2001), 347–366.

[42] M. Stillman, H. Tsai, *Using SAGBI bases to compute invariants*, J. Pure. Appl. Algebra 139 (1999), 285–302.

[43] B. Sturmfels, "Algorithms in invariant theory", Springer-Verlag, Vienna New York, 1993.

[44] B. Sturmfels, "Gröbner Bases and Convex Polytopes", AMS University Lecture Series, Vol. 8, 1995.

[45] B. Taylor: *A straightening algorithm for row-convex tableaux*, J. Algebra 236 (2001), 155–191.

[46] N. Thiéry: *Computing minimal generating sets of invariant rings of permutation groups with SAGBI-Gröbner basis*, Discrete models: combinatorics, computation, and geometry (Paris 2001), 315–328.

[47] W. Vasconcelos, "Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry", Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1998.

[48] J. Verschelde: *Numerical evidence for a conjecture in real algebraic geometry*, Experiment. Math., 9 (2000), 183–196.

[49] H. Weyl: "The classical groups", Princeton Univ. Press, 1946.

〒980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉

東北大学大学院理学研究科数学専攻

e-mail: s98m12@math.tohoku.ac.jp