数理解析研究所講究録 1290 巻 2002 年 54-69

Signature of lantern relations

東工大理工　遠藤久顕（Hisaaki Endo）

Department of Math., Tokyo Institute of Technology

§1　序

Lefschetz fibration などへの応用もふまえて、（境界も許す）曲面上の曲面束の符号数の振舞いについて述べる。手がかりは曲面束のモノドロミーが持つ写像類群の情報である。先に、Matsumoto [7] や [3] において fibration の特異ファイバーが符号数を持っているという現象が研究された。ここでは、写像類群の各関係子がそれぞれに固有の符号数を持つことを述べてみたい。特に、非超楕円的な関係子である lantern 関係子についていくつかの観察を行いたい。文章中に記号の混用が多いことをあらかじめおわびしておく。

§2　群の関係子と Hopf の定理

群の（コ）ホモロジーについてのいくつかの事実を、Brown [1] に従って復習しておく。

定義 2.1　Gを群とする。$[g_1|g_2|\cdots|g_n]$（$g_i \in G$）の全体を基底とする自由アーベル群を $C_n(G)$ と書く（$n=0,1,2,\cdots$）。
準同型 $\partial_n : C_n(G) \to C_{n-1}(G)$ を

$$\partial_n [g_1|g_2|\cdots|g_n] := [g_2|\cdots|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i [g_1|\cdots|g_i g_{i+1}|\cdots|g_n] + (-1)^n [g_1|\cdots|g_{n-1}] \quad (g_i \in G)$$

の線型拡張として定義すれば $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ をみたす。鎖複体 $(C_*(G), \partial_*)$ のホモロジー $H_*(G)$ を G の<u>ホモロジー</u>という。

写像 $f : G^n = \overbrace{G \times \cdots \times G}^{n} \to \mathbb{Z}$ の全体のなすアーベル群を $C^n(G)$ と書く（$n=0,1,2,\cdots$）。準同型 $\delta^{n-1} : C^{n-1}(G) \to C^n(G)$ を

$$\delta^{n-1} f(g_1, g_2, \cdots, g_n) := f(g_2, \cdots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i f(g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_n) + (-1)^n f(g_1, \cdots, g_{n-1}) \quad (g_i \in G)$$

と定義すると $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$ をみたす。双対鎖複体 $(C^*(G), \delta^*)$ のコホモロジー $H^*(G)$ を G の<u>コホモロジー</u>という。　//

例 2.2　$H_1(G) \cong G/[G,G]$

（準同型 $C_1(G) \to G/[G,G]$ によって誘導される。

$$\sum_g a_g [g] \mapsto \prod_g g^{a_g} \bmod [G,G]$$
）　//

4次元多様体の符号数は2次元に関係している。次の定理は符号数と写像類群の表示を結びつける際に中心的な役割を果たす。

<u>定理 2.3</u> (Hopf [10])　Gを群とする。集合 S を生成系とする自由群を $F = F(S)$ とし、$\pi : F \to G$ を上への準同型とする。$R := \mathrm{Ker}\,\pi$ とするとき、次の同型が成り立つ：

$$H_2(G) \cong R \cap [F, F] / [R, F]$$ //

証明は $\pi_1(X) \cong F$ となる S^1 のブーケ X の R に対応する正則被覆 $\tilde{X} \to X$ を用いる。$H_2(G) \cong \mathrm{Ker}[H_1(\tilde{X})_G \to H_1(X)]$ が容易にわかり、Fox の自由微分が $R/[R, F] \cong H_1(\tilde{X})_G$ を誘導することから定理が従う。

さて、この正則被覆 $\tilde{X}$ の鎖複体 $C_*(\tilde{X})$ から bar resolution への鎖写像を構成すると、resolution の一意性から定理 2.3 の同型における元の対応をみることができる。

<u>命題 2.4</u>　定理 2.3 の同型（の逆向き）は、準同型

$$R \longrightarrow C_2(G) \;:\; r \longmapsto \sum_{s \in S} [\, \overline{\tfrac{\partial r}{\partial s}} \,|\, \bar{s} \,]$$

によって誘導される。但し記号は以下の通り：

$\frac{\partial}{\partial s} : \mathbb{Z}F \longrightarrow \mathbb{Z}F$　：　s に関する自由微分，

$\bar{f}$ ： $F \xrightarrow{\pi} G$ による $f \in F$ の像 $\pi(f)$，

$[\cdot|\cdot]$ ： 従来の記号 $[\cdot|\cdot]$ を $\mathbb{Z}G$ 上に拡張したもの　//

次の (*) をみたす 2-cocycle $z \in Z^2(G)$ が与えられていると

(＊)　$z(g,1) = z(1,g) = z(g,g^{-1}) = 0 \quad (\forall g \in G)$

Evaluation　$C^n(G) \times C_n(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$　から定まるKronecker積

$$(f, [g_1|\cdots|g_n]) \mapsto f(g_1,\cdots,g_n)$$

の adjoint　$H^n(G) \to \mathrm{Hom}(H_n(G), \mathbb{Z})$ により、z から準同型　$\kappa : H_2(G) \to \mathbb{Z}$　が決まる。

命題2.4に条件(＊)を合わせれば自由微分の計算から次が従う：

<u>命題2.5</u>　定理2.3の同型の下、準同型 $\kappa : H_2(G) \to \mathbb{Z}$ は準同型

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ r &\longmapsto \sum_{j=1}^{m} z(\overline{s_1\cdots s_{j-1}}, \overline{s_j}) \end{aligned}$$

（但し、$r = s_1 \cdots s_m \quad (s_j \in S \cup S^{-1})$）

によって誘導される。特にこれは $[R,F]$ 上 0 であり、$\kappa : H_2(G) \to \mathbb{Z}$ の自然な拡張 $\tilde{\kappa} : R/[R,F] \to \mathbb{Z}$ が誘導される。　//

<u>注意2.6</u>　命題2.4，2.5の写像はいずれも F 上で定義できるが、その場合必ずしも準同型とは限らない。

§3 曲面束の符号数の記述

曲面の写像類群に前節の一般論を適用し、曲面束の符号数を写像類群の言葉で記述する。

Σ_g を種数 g の有向閉曲面とする。Σ_g の向きを保存する自己微分同相の isotopy 類全体のなす群

$$\mathcal{M}_g := \mathrm{Diff}_+\Sigma_g \,/\, \mathrm{Diff}_0\Sigma_g$$

を Σ_g の写像類群という。

さて、B を（境界も許す）コンパクト有向曲面とし、

$$\Sigma_g \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$$

を B 上の Σ_g をファイバーとする C^∞ ファイバー束で向きを保つものとする。この分類写像 $B \to B\mathrm{Diff}_+\Sigma_g$ から基本群の間に準同型（ホロノミー準同型）：

$$\chi : \pi_1(B) \to \pi_1(B\mathrm{Diff}_+\Sigma_g) \cong \pi_0(\mathrm{Diff}_+\Sigma_g) = \mathcal{M}_g$$

が誘導される。逆に、Earle-Eells の結果から E の束同型類は χ の共役類によって決まる。全空間 E は（境界も許す）4次元コンパクト有向多様体であるから、交叉形式

$$Q_E : H^2(E, \partial E; \mathbb{Z}) \times H^2(E, \partial E; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x \cup y, [E] \rangle$$

は対称であり、符号数 $\mathrm{Sign}(E) := \mathrm{sign}\, Q_E$ が定義される。

次の定理は、曲面上の曲面束の符号数を求めるうえで非常に有用である。

<u>定理3.1</u>（Meyer [8]）　$\partial B = \emptyset$ のとき

$$\mathrm{Sign}(E) = -\langle [\tau_g], \chi_*[B] \rangle$$

が成り立つ。但し、記号は以下の通り：

$\langle\ ,\ \rangle : H^2(\mathcal{M}_g) \times H_2(\mathcal{M}_g) \to \mathbb{Z}$ ： Kronecker 積

$\chi_* : H_2(\pi_1(B)) \to H_2(\mathcal{M}_g)$ ： χ による誘導準同型

$[B] \in H_2(\pi_1(B)) = H_2(B)$ ： B の基本類

$\tau_g \in Z^2(\mathcal{M}_g)$ ： Meyer の符号数 cocycle（後述）　//

この定理は、Serre スペクトル系列によって $H^2(E, \partial E ; \mathbb{Z})$ 上の積構造を局所係数コホモロジー $H^1(B, \partial B ; \underline{H_1(\Sigma_g ; \mathbb{R})})$ 上の積構造に翻訳し、さらに B を局所係数つきで三角形分割することにより証明される。いささか不格好な次の符号数 cocycle の定義に三角形分割のなごりをみることができる。

<u>定義3.2</u>　A, B を Siegel モジュラー群 $Sp(2g, \mathbb{Z})$ の元とする。ベクトル空間

$$V_{A,B} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g} \mid (A^{-1} - I)x + (B - I)y = 0\}$$

の上の対称双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle_{A,B} : V_{A,B} \times V_{A,B} \to \mathbb{R}$ を

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{A,B} := {}^t(x_1 + y_1) J (I - B) y_2 ,$$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V_{A,B})$$

と定義する。$\tau_g(A, B) := \mathrm{sign}(V_{A,B}, \langle\ ,\ \rangle_{A,B})$ とおくと

$$\tau_g : Sp(2g, \mathbb{Z}) \times Sp(2g, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

は局所係数Novikov加法性から $Z^2(Sp(2g,\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ に属する。

τ_g を符号数cocycleという。 //

$\mathcal{M}_g$ の $H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ への作用が交叉形式を保つことから、全射 $\mathcal{M}_g \to Sp(2g,\mathbb{Z})$ が存在する。これによる τ_g の引き戻しを再び τ_g と書く。

さて、定理3.1より、基本類 $[B] \in H_2(\pi_1(B))$ の

$$H_2(\pi_1(B)) \xrightarrow{\chi_*} H_2(\mathcal{M}_g) \xrightarrow{-\langle\ ,[\tau_g]\rangle} \mathbb{Z}$$

による像が $Sign(E)$ であった。χ_* は個々の曲面束によって変わるが、$-\langle\ ,[\tau_g]\rangle$ は曲面束に依らない写像である。この写像を $t_g : H_2(\mathcal{M}_g) \to \mathbb{Z}$ と書く。前節の議論を t_g に当てはめると次のようになる。

Σ_g 上の単純閉曲線のホモトピー類の生成する自由群を $\mathfrak{F}$ とし、単純閉曲線に対しその周りでのDehn twistを対応させることにより得られる準同型を $\pi : \mathfrak{F} \to \mathcal{M}_g$ とする。Dehn [2] により π は全射であり、$\mathfrak{R} := \mathrm{Ker}\,\pi$ とおけば、$\mathcal{M}_g \cong \mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ である。$\mathfrak{R}$ の元を $\mathcal{M}_g$ の関係子という。

命題2.5より t_g を

$$t_g : \mathfrak{R} \cap [\mathfrak{F},\mathfrak{F}]/[\mathfrak{R},\mathfrak{F}] \cong H_2(\mathcal{M}_g) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

とみるとき、その拡張 $\widetilde{t_g} : \mathfrak{R}/[\mathfrak{R},\mathfrak{F}] \to \mathbb{Z}$ が

$$\widetilde{\tau_g}(\rho[\mathcal{R},\mathcal{F}]) := -\sum_{j=1}^{m} \tau_g(\overline{\sigma_1\cdots\sigma_{j-1}}, \overline{\sigma_j})$$

（但し、$\rho = \sigma_1 \cdots \sigma_m \in \mathcal{R}$　（$\sigma_j \in \mathcal{S}^{\cup}\mathcal{S}^{-1}$））

と自然に定義できる。これは、写像類群の関係子 ρ の共役類に対して、"符号数" $\widetilde{\tau_g}(\rho[\mathcal{R},\mathcal{F}])$ が定まることを意味する。また、この式の右辺の τ_g は定義3.2に述べたように、具体的に与えられており計算が可能である。次節でそれを実行する。

§4　写像類群の関係子の符号数

ここでは $\mathcal{M}_g$ の基本的な関係子に対し、その符号数を決定する。$\Sigma_{g,r} := \Sigma_g \setminus r\mathring{D}^2$ とおく。

<u>Braid 関係子</u>　　Σ_g 上の互いに1点で横断的に交わる2つの単純閉曲線 a, b に対し、α, β をそれぞれ a, b に沿う右向きの Dehn twist とする。このとき、

$$\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta \qquad (\text{i.e.}\ \ \alpha\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1)$$

が成り立つ。従って、

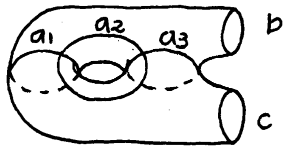
$$B_I := aba b^{-1}a^{-1}b^{-1} \in \mathcal{R}$$

である。別の a', b' に対し、曲面の分類定理からそれらを a, b にうつす Σ_g の自己微分同相が存在するから、対応する関係子は B_I と共役になる。このことを、braid 関係子の $\mathcal{F}$ での共役類は1つであると言い表わす。

命題 4.1　　$\tilde{t}_g(B_I[\mathcal{R},\mathcal{F}]) = 0$　　//

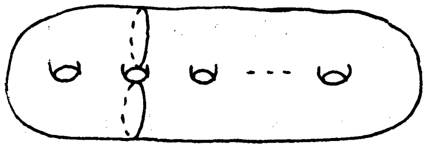
従って、braid 関係子は符号数を持っていない。

Chain 関係子　Σ_g の部分曲面 $\Sigma_{1,2}$ 上に次のように単純閉曲線をとる：

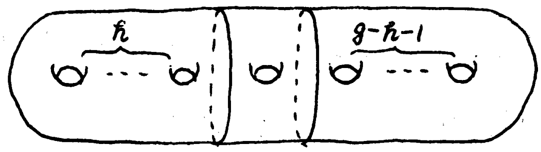


$\Sigma_{1,2}$

このとき、$(a_1 a_2 a_3)^4 b^{-1} c^{-1} \in \mathcal{R}$ である。これを C とかく。C の共役類は $\Sigma_{1,2} \hookrightarrow \Sigma_g$ の違いから次の2つのタイプに分けられる：



C_I



C_{II}

（C_{II} には $[\frac{g}{2}]-1$ 個の相異なる共役類が含まれている。）

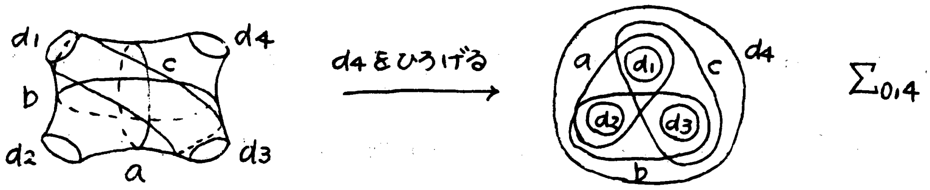
命題 4.2　　$\tilde{t}_g(C_I[\mathcal{R},\mathcal{F}]) = -6$

$\tilde{t}_g(C_{II}[\mathcal{R},\mathcal{F}]) = -8$　　//

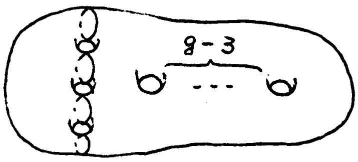
注意 4.3　　上の C は正確には、長さ 3 の chain 関係子である。一般の chain 関係子については、例えば Wajnryb [9]

Lemma 21 をみよ。 //

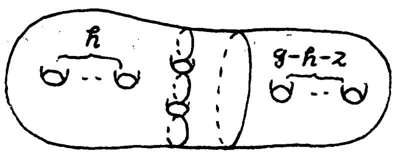
<u>Lantern 関係子</u>　Σ_g の部分曲面 $\Sigma_{0,4}$ 上に次のように単純閉曲線をとる：



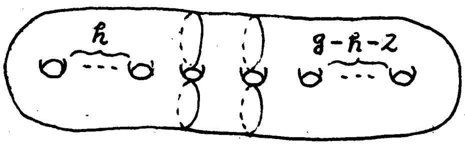
このとき、$L := abc(d_1d_2d_3d_4)^{-1} \in \mathcal{R}$ である。L の共役類は埋め込み $\Sigma_{0,4} \hookrightarrow \Sigma_g$ の違いから次の5つのタイプに分かれる：



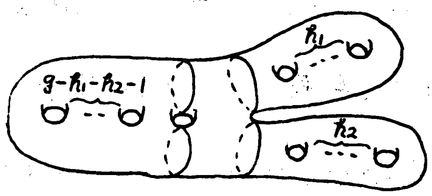
L_{I}



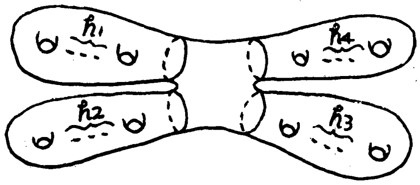
L_{II}



L_{III}



L_{IV}



$(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = g)$

L_{V}

<u>命題 4.4</u>　$\widetilde{t_g}(L_{\mathrm{I}}[\mathcal{R}, \mathcal{F}]) = 1$,

$\widetilde{t_g}(L_{\mathrm{II}}[\mathcal{R}, \mathcal{F}]) = 0$,　$\widetilde{t_g}(L_{\mathrm{III}}[\mathcal{R}, \mathcal{F}]) = 2$,

$\widetilde{t_g}(L_{\mathrm{IV}}[\mathcal{R}, \mathcal{F}]) = 0$,　$\widetilde{t_g}(L_{\mathrm{V}}[\mathcal{R}, \mathcal{F}]) = 0$ //

注意4.5　$\rho \in \mathcal{R}$ に対し、$\widetilde{\tau_g}(\rho^{-1}[\mathcal{R},\mathcal{F}]) = -\widetilde{\tau_g}(\rho[\mathcal{R},\mathcal{F}])$ であるから、命題4.4，4.5 の $\widetilde{\tau_g}$ の値は ρ と ρ^{-1} をとりかえると符号が逆になる。 //

$\mathcal{M}_g$ の他の関係子、例えば Gervais [4] の star 関係子や Matsumoto [6] の Artin 群に由来する関係子などの符号数も同様に計算することができる。しかし、これらの関係子は上記の B, C, L を用いて書けるはずなので、符号数も上記の命題から導くことができる（はず）である。

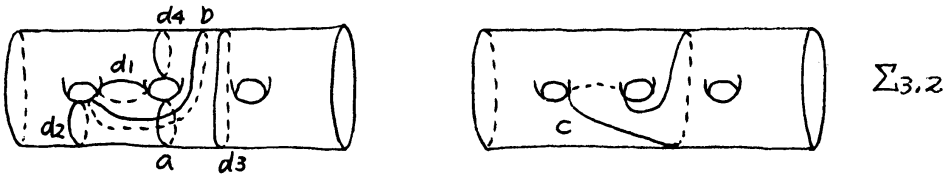
§5　応用例 — Lefschetz fibration の符号数

前節の結果の一つの応用として、lantern 関係子を用いて構成される Lefschetz fibration の符号数について例を用いて考察する。この場合、lantern 関係子により超楕円性が崩れるため、[3] にあるような符号数の局所化は起こらない。

以下で必要となる Lefschetz fibration の基本的な定義・性質については Matsumoto [7] をみよ。

例5.1（Korkmaz-Ozbagci [5]：分離型）

Σ_g $(g \geqq 3)$ の部分曲面 $\Sigma_{3,2}$ 上に次のように単純閉曲線を



このとき、 $d_1 d_2 d_3 d_4 (abc)^{-1} = L_{II}^{-1} \in \mathcal{R}$ である。曲面の分類定理から、$\bar{\Phi}_1(d_2) = b$，$\bar{\Phi}_1(a) = d_1$ となる $\bar{\Phi}_1 \in \mathcal{M}_g$ ，$\bar{\Phi}_2(d_4) = c$ となる $\bar{\Phi}_2 \in \mathcal{M}_g$ が存在する。$\mathcal{F} \to \mathcal{M}_g$ による $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2$ のリフト Φ_1, Φ_2 は $b = \Phi_1 d_2 \Phi_1^{-1}$ ，$d_1 = \Phi_1 a \Phi_1^{-1}$ ，$c = \Phi_2 d_4 \Phi_2^{-1}$ をみたす。すると、

$$
\begin{aligned}
L_{II}^{-1} &= d_1 d_2 d_3 d_4 c^{-1} b^{-1} a^{-1} = d_4 c^{-1} d_1 b^{-1} d_2 a^{-1} d_3 \\
&= d_4 \cdot \Phi_2 d_4^{-1} \Phi_2^{-1} \cdot \Phi_1 a \Phi_1^{-1} \cdot \Phi_1 d_2^{-1} \Phi_1^{-1} d_2 a^{-1} d_3 \\
&= [d_4, \Phi_2][\Phi_1, a d_2^{-1}] d_3
\end{aligned}
$$

と書き直すことができる。これは準同型 $\pi_1(\Sigma_{2,1}) \to \mathcal{F}$ を与えており、$\mathcal{F} \to \mathcal{M}_g$ と合わせて Σ_2 上の分離型ファイバーを1本だけ持つ種数 g の Lefschetz fibration が構成される。その符号数は

$$
\begin{aligned}
&\hat{\tau}_g(L_{II}^{-1}[\mathcal{R}, \mathcal{F}]) + \mathrm{Sign}(\text{fibered nbd of } II) \\
&= 0 - 1 = -1
\end{aligned}
$$

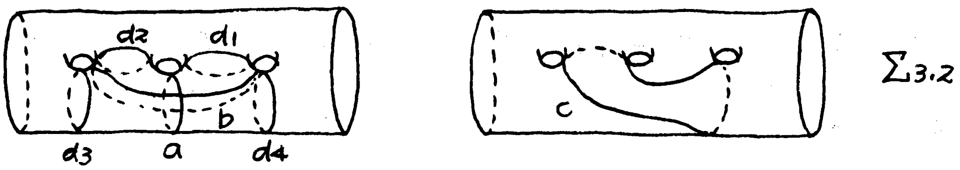
となる。 //

<u>注意 5.2</u>　上の L_{II}^{-1} の変形は（厳密には）L_{II}^{-1} に他の関係子（可換関係子など）を掛ている。しかしそれらの符号数は0であることが容易にわかるので、LF の符号数には

寄与しない。 //

例 5.3 （Korkmaz－Ozbagci [5]：非分離型）

Σ_g ($g \geqq 3$) の部分曲面 $\Sigma_{3,2}$ 上に次のように単純閉曲線をとる：



例 5.1 と同様に Lefschetz fibration が構成される。今の場合関係子は LI^{-1} であり、Σ_2 上の非分離型ファイバーを1本だけ持つような種数 g の Lefschetz fibration できる。符号数は

$$\widehat{\tau_g}(LI^{-1}[R, \bar{R}]) + \mathrm{Sign}(\text{fibered nbd of } I)$$

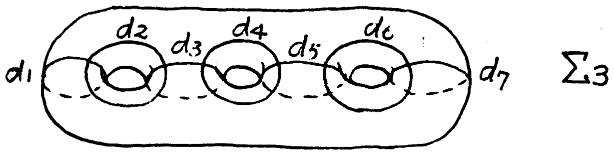
$$= -1 + 0 \quad = -1$$

となる。 //

注意 5.4 例 5.1，5.3 の関係子は Dehn twist の commutator length が 2 であることの証明に用いられた（[ ]）。ちなみに、超楕円的な Lefschetz fibration において特異ファイバーが 1本だけということはあり得ない。 //

例 5.5 長さ $2g+1$ の chain 関係子は Σ_g 上において positive な関係子となる（cf. [9]）。例えば $g=3$ のとき、

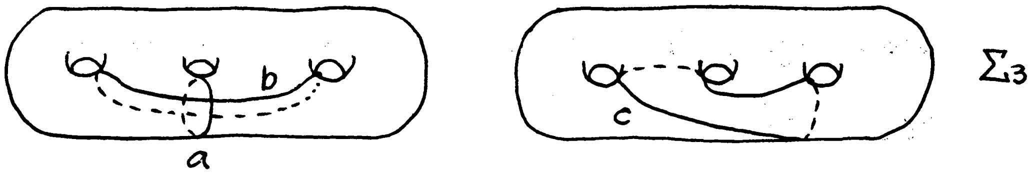
Σ_3 上に単純閉曲線を次のようにとる：



このとき、$(d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7)^8 =: C \in \mathcal{R}$ である。さて、このCの$(d_1 \cdots d_7)^4$の部分をbraid関係子で次のように変形する：

$$
\begin{aligned}
&(d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7)^4 \\
&= d_1d_2d_3d_4d_5d_6 \cdot d_1d_2d_3d_4d_5 \cdot d_7d_6d_7 \cdot d_1d_2d_1 \cdot d_3d_4d_5d_6d_7 \\
&\qquad \cdot d_2d_3d_4d_5d_6d_7 \\
&= d_1d_2d_3d_4d_5 \cdot d_1d_2d_3d_4 \cdot d_5d_6d_5 \cdot d_7d_6 \cdot d_2d_1 \cdot d_3d_2d_3 \\
&\qquad \cdot d_4d_5d_6d_7 \cdot d_3d_4d_5d_6d_7 \\
&= d_4 \cdot d_1d_2d_3d_4d_5 \cdot d_1d_2d_3d_4d_5d_6 \cdot \underline{d_1d_3d_5d_7} \\
&\qquad \cdot d_2d_3d_4d_5d_6d_7 \cdot d_3d_4d_5d_6d_7 \cdot d_4
\end{aligned}
$$

ここで、次のような単純閉曲線をとる：



すると、$L_I = abc(d_1d_3d_5d_7)^{-1}$ の共役を、Cを上のように変形したものに掛け、$\underline{d_1d_3d_5d_7}$ を $\underline{abc}$ にできる。これはS^2上の種数3のLefschetz fibrationを与える。特異ファイバーはすべて非分離型で54本、Euler標数は42、符号数は[3]の公式と$\tilde{t}_g$の値から

$$
\begin{aligned}
&\sigma_3(I) \times 56 + 2\,\widetilde{t_g}(L_I[\mathfrak{R},\mathfrak{F}]) \\
= &-\frac{4}{7} \times 56 + 2 \times 1 \\
= &-30
\end{aligned}
$$

となる。従って明らかに超楕円的ではない。また、非自明な fiber sum にも分かれなさそうである。 //

参考文献

[1] K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Math. 87, Springer-Verlag, 1982

[2] M. Dehn, *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Acta Math. 69 (1938), 135 - 206.

[3] H. Endo, *Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations*, Math. Ann. 316 (2000), 237 - 257.

[4] S. Gervais, *A finite presentation of the mapping class group of a punctured surface*, Topology 40 (2001), 703 - 725.

[5] M. Korkmaz and B. Ozbagci, *Minimal number of singular fibers in a Lefschetz fibration*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), 1545 - 1549.

[6] M. Matsumoto, *A presentation of mapping class groups in terms of Artin groups and geometric monodromy of*

singularities, Math. Ann. 31 (2000), 401 - 418.

[7] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two — a topological approach —*, Proc. of the 37th Taniguchi Symp. (ed. S. Kojima et al.), World Scientific Publ., 1996, pp. 123 - 148.

[8] W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Math. Ann. 201 (1973), 239 - 264.

[9] B. Wajnryb, *An elementary approach to the mapping class group of a surface*, Geometry and Topology 3 (1999), 405 - 466.

[10] H. Hopf, *Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe*, Comment. Math. Helv. 14 (1942), 257 - 309.