数理解析研究所講究録 1292 巻 2002 年 12-19

回転対称性を持つ極小曲面のモデュライ空間

筑波大学数学系　守屋　克洋 (Katsuhiro Moriya)
Institute of Mathematics, University of Tsukuba

1 序

二つの向きづけられた完備な極小曲面 $X\colon M \to \mathbb{R}^3$, $X'\colon M \to \mathbb{R}^3$ は, 平行移動, 回転, 相似変形かまたはそれらの合成 ψ で, $\psi \circ X = X'$, すなわち,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[d, equal] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\psi"] \\ M \arrow[r, "X'"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

が可換になるようなものが存在するとき同値であると言うことにする. この同値関係による極小曲面の空間の商空間を, 極小曲面のモデュライ空間と呼ぶことにする.

筆者は, 向きづけられた完備な極小曲面で, 種数が 1, エンドが一個であり, 全曲率が固定されていて 3 節で定義される回転対称性をもち, 拡張されたガウス写像のエンドにおける分岐数が最大である極小曲面のモデュライ空間をワイエルシュトラス表現公式 (補題 3.1) を用いて構成した ([2]). この稿ではその一部を紹介する.

L を $\mathbb{C}$ の格子, $\beta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$ を射影とする. $\{a_1, a_2\}$ を $\mathbb{C}/L$ のシンプレクティック基底とし, $R_{n,k} = \int_{a_k} \wp^n \wp'^2\, dz$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $B_k = \int_{a_k} dz$ $(k = 1, 2)$ とする. ここで, $\wp(z)$ はワイエルシュトラスのペー関数である. $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ に対して, $F_{n,k}(c) = \sum_{j=0}^n R_{2j,k} c_j^2 + 2\sum_{j<k} R_{2j+2k,l} c_j c_k$ とおく $(l = 0, 2)$. $\mathcal{S}_n$ で,

$$B_k - F_{n,k}(c) = 0 \; (k = 1, 2). \tag{1.1}$$

によって定義される $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素代数多様体をあらわす. このとき次がなりたつ.

定理 1.1. 種数が 1 でエンドが一個, 全曲率が $-4\pi(2n+3)$ の, 向きづけられた完備な極小曲面で, 角度 π の回転対称性をもち, 拡張されたガウス写像のエンドにおける分岐数が $2n+3$ であるもののモデュライ空間は $\mathcal{S}_n \setminus \{c_n = 0\}$ と同一視できる $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

2 楕円関数

楕円関数の復習からはじめる．詳しくは [1] などを参照する．

L を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の格子で，その $\mathbb{Z}$ 上の基底を $\{\omega_1, \omega_2\}$ とする．関数

$$\wp = \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right],$$

を，格子 L に付随するワイエルシュトラスのペー関数という．この級数は格子点を含まないコンパクト集合上で一様に収束する．次の事はよく知られている．

- 関数 $\wp(z)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型で，各格子点で位数 2 の極をもち，他には極を持たない．さらに，L に付随する二重周期性をもつ．すなわち，任意の $z \in \mathbb{C}$ と任意の $\omega \in L$ について $\wp(z+\omega) = \wp(z)$ となる．

- 次の関係式がなりたつ．

$$\wp(-z) = \wp(z), \quad \wp'(-z) = -\wp'(z), \tag{2.1}$$

- $\mathbb{C}$ 上で L に付随する二重周期性をもつ任意の有理型関数 $m(z)$ は，

$$m(z) = Q_0(\wp) + Q_1(\wp)\wp', \tag{2.2}$$

  と唯一に書ける．ここで，$Q_0(z)$ と $Q_1(z)$ は z の有理関数である．逆に (2.2) と書ける関数は，$\mathbb{C}$ 上 L に付随する二重周期有理型関数である．

$\wp$ と $\wp'$ を $\mathbb{C}/L$ 上の有理型関数とみなし，同じ記号で書く．$\beta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$ を射影とする．

補題 2.1. $m(z)$ を $\mathbb{C}/L$ 上の有理型関数とする．$m(z)$ が $\beta(0)$ でのみ極をもつならば，$m(z)$ は

$$m(z) = P_0(\wp) + P_1(\wp)\wp',$$

という形に唯一に書ける．ここで，$P_0(z)$ と $P_1(z)$ は z の多項式である．

証明．関数 $m(z)$ は $m(z) = Q_0(\wp) + Q_1(\wp)\wp'$, という形に唯一に書ける．ここで，$Q_0(z)$ と $Q_1(z)$ は z の有理関数である．

$Q_0(z)$ が多項式でないとする．このとき $\beta(0)$ 以外の $Q_0(\wp(z))$ の極 z_0 が存在する．一方, (2.1) より

$$Q_0(\wp(z)) = \frac{m(z) + m(-z)}{2}$$

なので, $Q_0(\wp(z))$ には $\beta(0)$ 以外の極は存在しない．よって $Q_0(z)$ は多項式である．

$Q_1(z)$ が多項式ではないとする．このとき, $\beta(0)$ 以外の $Q_1(\wp(z))$ の極 z_1 が存在する．z_1 は $Q_1(\wp(z))\wp'(z)$ の極でもある．実際, z_1 が $Q_1(\wp(z))\wp'(z)$ の極でないとすると z_1 は $\wp'(z)$ の単純零点であり, z_1 は $1/Q_1(\wp(z))$ の単純零点である．$\wp(z_1)$ は $(1/Q_1(z))'$ の極ではないので,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{Q_1(\wp(z))}\right)\bigg|_{z=z_1} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{Q(z)}\right)\bigg|_{z=\wp(z_1)} \wp'(z_1) = 0.$$

を得る．よって z_1 は $1/Q_1(\wp(z))$ の零点であり, その重複度は少なくとも 2 である．よって z_1 は $Q_1(\wp(z))\wp'(z)$ の零点である．

一方, (2.1) より

$$Q_1(\wp(z))\wp'(z) = \frac{m(z) - m(-z)}{2}$$

なので, $Q_1(\wp(z))\wp'(z)$ は $\beta(0)$ 以外に極をもたない．よって $Q_1(z)$ は多項式である． □

補題 2.2. $m(z)$ を $\mathbb{C}/L$ 上の有理型関数で, $\beta(0)$ でのみ極を持つとする．$m(-z) = -m(z)$ であるならば, ある複素多項式 P を用いて, $m(z) = P(\wp(z))\wp'(z)$ と書ける．

証明. 補題 2.1 より, ある多項式 $P_0(z)$ と $P_1(z)$ を用いて, $m(z) = P_0(\wp(z)) + P_1(\wp(z))\wp'(z)$ と書ける．(2.1) より,

$$m(-z) = P_0(\wp(z)) - P_1(\wp(z))\wp'(z)$$

であるので補題が成り立つ． □

3 全曲率が有限な極小曲面

この節では種数が 1 でエンドが 1 個の極小曲面について復習する．

T をトーラスとし, $\{p_0, p_1\} \subset T$, $M = T \setminus \{p_1\}$ とおく. $\mathrm{ord}_p(\eta)$ を T 上の有理型関数または有理型一次微分形式 η の p における位数とする. このとき, p が η の零点ならば $\mathrm{ord}_p(\eta) > 0$ であり, 極ならば $\mathrm{ord}_p(\eta) < 0$ である. 次の補題は, ワイエルシュトラス表現公式である:

補題 3.1. T 上の有理型関数 g と有理型一次微分形式 ϕ の組 (g, ϕ) が

$$\mathrm{Re}\int_\gamma \left((1-g^2)\phi, i(1+g^2)\phi, 2g\phi\right) = (0,0,0) \quad (\gamma = a_1, a_2), \tag{3.1}$$

$$2\min\{0, \mathrm{ord}_p(g)\} + \mathrm{ord}_p(\phi) \leq -2 \ \ (p = p_1), \tag{3.2}$$

$$2\min\{0, \mathrm{ord}_p(g)\} + \mathrm{ord}_p(\phi) = 0 \ \ (p \neq p_1). \tag{3.3}$$

をみたし, g の度数が m であれば,

$$X(p) = \mathrm{Re}\int_{p_0}^{p} \left((1-g^2)\phi, i(1+g^2)\phi, 2g\phi\right) \tag{3.4}$$

は $\mathbb{R}^3$ 内の全曲率が $-4\pi m$ である向き付けられた完備な極小曲面となる.

逆に, 任意の $\mathbb{R}^3$ 内の全曲率が $-4\pi m$ である向き付けられた完備な極小曲面にたいして, T 上の有理型関数 g と有理型一次微分形式 ϕ の組 (g, ϕ) で, (3.1), (3.2), (3.3) をみたすものが,

$$g = dX_3/(dX_1 - i\,dX_2),\ \phi = dX_1 - i\,dX_2.$$

と置くことによって得られる.

定義 3.2. (3.1), (3.2), (3.3) をみたす組 (g, ϕ) を, X のワイエルシュトラスデータと呼ぶ.

注意 3.3. $X\colon M \to \mathbb{R}^3$ と $\tilde{X}\colon M \to \mathbb{R}^3$ を向きづけられた完備で全曲率が有限な極小曲面, (g, ϕ) と $(\tilde{g}, \tilde{\phi})$ をそれぞれ X と $\tilde{X}$ のワイエルシュトラスデータとする, このとき, X と $\tilde{X}$ が平行移動で移り合うことと, $(g, \phi) = (\tilde{g}, \tilde{\phi})$ であることは同値である.

注意 3.4. 補題 3.1 における有理型関数 g は, X の拡張されたガウス写像の, 北極からの直行射影となる, このことから, ワイエルシュトラスデータ (g, ϕ) が (3.4) によって曲面 X が対応するとき, 組 $(e^{ti}g, e^{-ti}\phi)$ $(t \in \mathbb{R})$ は, (3.4) によって, X を x_3 軸を中心として角度 t 回転させた曲面と対応する.

注意 3.5. ワイエルシュトラスデータ (g, ϕ) が (3.4) によって曲面 X に対応しているとする. このとき, $(g, r\phi)$ $(r > 0)$ は, (3.4) によって, X を, 原点中心で相似比が r の相似変換で変換した曲面と対応する.

4 回転対称性

この節で極小曲面の回転対称性を導入する.

$X\colon M \to \mathbb{R}^3$ を全曲率が有限な向きづけられた完備な極小曲面とし, $\mathbb{R}^3$ 内の直線 l にたいし, $R(l,t)$ を l を軸とする角度 t の回転とする.

定義 4.1. $t/2\pi$ が有理数で $0 < t/2\pi < 1$ となるような t に対して, $\mathbb{R}^3$ 内の直線 l と, p_1 を固定する T の正則変換 τ で, $R(l,t) \circ X = X \circ \tau$, すなわち,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & \mathbb{R}^3 \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R(l,t)} \\ M & \xrightarrow{X} & \mathbb{R}^3. \end{array}$$

を満たすものが存在するとき, X は l を中心とする角度 t の回転対称性をもつという.

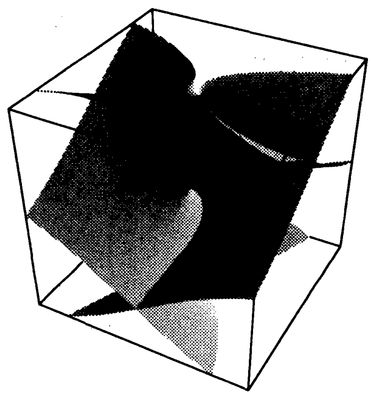

図 1: 角度 π の対称性をもつ極小曲面.

定義 4.2. X が回転対称性をもつとし, τ をその対称性に付随する正則変換とする. このとき, τ が固定する M 上の点 q を X の中心という.

補題 4.3. $T = \mathbb{C}/L$ とするとき, $\beta(\omega_1 + \omega_2)$ は中心となる.

証明. $\{\beta(\omega_1), \beta(\omega_2)\} = \{\tau(\beta(\omega_1)), \tau(\beta(\omega_2))\}$ であるので, $\beta(\omega_1 + \omega_2) = \beta(\tau(\omega_1) + \tau(\omega_2)) = \tau(\beta(\omega_1 + \omega_2))$ である. □

5 ワイエルシュトラスデータと回転対称性

この節では角度 π の回転対称性を持つ極小曲面のワイエルシュトラスデータについて議論する.

$X\colon T\setminus\{p_1\}\to\mathbb{R}^3$ を, 角度 π の回転対称性を持つ, 向きづけられた, 完備で全曲率が有限な極小曲面で, 全曲率が $-4\pi m$ $(m=1,2,3,\ldots)$, エンドにおける拡張されたガウス写像の分岐数が m, 回転対称性の軸となる直線が x_3 軸であるとし, (g,ϕ) を X のワイエルシュトラスデータとする. さらに p_1 が g の極であると仮定する. 最後の仮定は, 次の補題から妥当である.

補題 5.1. p_1 は g の極か零点になる.

証明. $\tau\colon T\to T$ を回転対称性に付随する正則変換とする. このとき, $X\circ\tau=R(l,\pi)\circ X$, より, $g\circ\tau=-g$ となる. よって, $g(p_1)={}^{g}(p_1)$ であるから, p_1 は g の極か零点である. □

T を格子 L を用いて $\mathbb{C}/L$ とあらわし, z を $\mathbb{C}$ の標準的な正則座標とする.

補題 5.2. $\phi=b\,dz$ $(b\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$ となる.

証明. $\deg g=-\mathrm{ord}_{p_1}(g)$ なので, 点 p_1 は g の唯一の極である. よって, 条件 (3.3) より, 任意の $p\in M$ で $\mathrm{ord}_p(\phi)=0$ となる. $\sum_{p\in T}\mathrm{ord}_p\,\phi=0$ なので, $\mathrm{ord}_{p_1}(\phi)=0$ である. したがって ϕ は正則一次微分形式となるので, 補題が成立する. □

次に, $p_1=\beta(0)$ とする.

補題 5.3. 回転対称性に付随する正則変換 $\tau\colon\bar{M}\to\bar{M}$ は, $\tau(\beta(z))=\beta(-z)$ となる.

証明. $X_3(\tau(z))=X_3(z)$, より,

$$\mathrm{Re}\int_q^{\tau(z)} gb\,dz=\mathrm{Re}\int_q^{z} gb\,dz$$

である. 一方, $g\circ\tau=-g$ であるので,

$$\mathrm{Re}\int_q^{\tau(z)} gb\,dz=\mathrm{Re}\int_q^{z} -gb\,\tau^{*}dz$$

である. したがって, $dz=-d\tau$ である. $\tau(L)=L$ なので, $\tau(\beta(z))=\beta(-z)$

$\{a_1, a_2\}$ を T のシンプレクティック基底, $\wp$ をワイエルシュトラスのペー関数　とし, $R_{j,k} = \int_{a_k} \wp^j \wp'^2 dz$, $B_k = \int_{a_k} dz$, $F_{n,k}(c) = \sum_{j=0}^n R_{2j,k} c_j^2 + 2\sum_{j<l} R_{j+l,k} c_j c_l$ とおく.

命題 5.4. 組 (g, ϕ) が X のワイエルシュトラスデータであることと, $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と, $2n+3 = m$ なる n 次のある複素多項式 $P_n = \sum_{j=0}^n c_n z_n$ に対し, $(g, \phi) = (P_n(\wp)\wp', b\,dz)$ であり, $c = (c_0, \ldots, c_n)$ と b が

$$\bar{b}B_k - bF_{n,k}(c) = 0 \quad (k = 1, 2) \tag{5.1}$$

をみたすことは同値である.

証明. (g, ϕ) が X のワイエルシュトラスデータであるとする. このとき補題 5.2 より, ある $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し, $\phi = b\,dz$ となる. g は $\beta(0)$ が唯一の極であり, $g(-z) = -g(z)$ なので, 補題 2.2 より, ある n 次複素多項式 P_n によって $g = P_n(\wp)\wp'$ とかける. g の度数が m なので, $m = 2n+3$ でなければならない. 条件 (3.1) を直接計算すると (5.1) を得る.

逆に, $(g, \phi) = (P_n(\wp)\wp', b\,dz)$ が条件 (5.1) を満たしているとする. $\wp$ は $\beta(0)$ が唯一の極で, その位数が -2 であるから,

$$2\min\{0, \mathrm{ord}_p(P_n(c, \wp)\wp')\} + \mathrm{ord}_p(b\,dz) \le -6 \quad (p = \beta(0)),$$
$$2\min\{0, \mathrm{ord}_p(P_n(c, \wp)\wp')\} + \mathrm{ord}_p(b\,dz) = 0 \quad (p \ne \beta(0))$$

となる. よって $(P_n(c, \wp)\wp', b\,dz)$ は, 条件 (3.2) と条件 (3.3) を満たす.

$$X(z) = \mathrm{Re}\int_{\omega_1+\omega_2}^{z} ((1-g^2)\phi, i(1+g^2)\phi, 2g\phi), \tag{5.2}$$

によって決まる写像 $X\colon (\mathbb{C}/L) \setminus \{\beta(0)\} \to \mathbb{R}^3$ は全曲率が $-4\pi m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ で $(R(x_3, \pi) \circ X)(z) = X(-z)$ の向き付けられた極小曲面で, 拡張されたガウス写像のエンドにおける分岐数が m のものとなる. □

注意 5.5. X が角度 π の回転対称性をもつとき, その全曲率は -4π の奇数倍である. したがって, 正則二重被覆 $\delta\colon (\mathbb{C}/L) \setminus \{\beta(0)\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で, ある向きづけられた極小曲面 $\tilde{X}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ が $X = \tilde{X} \circ \delta$ となるようなものは存在しない.

6　定理の証明

定理 *1.1* の証明. 回転対称性の軸が x_3 軸で, p_1 における拡張されたガウス写像 g の向きが x_3 軸の正の方向で $X(\omega_1 + \omega_2)$ が $\mathbb{R}^3$ の原点になるようなもののモデュライを構成すればよい.

命題 5.4 より, ワイエルシュトラスデータの集合は,

$$\mathcal{N}_n := \{(P_n(c,\wp)\wp', b\,dz) \mid b \neq 0, \bar{b}B_k - bF_{n,k}(c) = 0 \ \ (k = 1, 2)\}$$

となる. $\mathcal{N}_n$ を $\{(c_0, \ldots, c_n, b) \mid c_n \neq 0, b \neq 0, \bar{b}B_k - bF_{n,k}(c) = 0\}$ と同一視する.

注意 3.3, 注意 3.4, 注意 3.5 より, 群 $P \times S^1$ が $\mathcal{N}_n$ に次のように作用する:

$$(r, e^{si}) \cdot (c, b) = (e^{si}c, rbe^{-si}). \tag{6.1}$$

ここで, $(r, e^{si}) \in P \times S^1$, $e^{si}c = (e^{si}c_0, e^{si}c_1, \ldots, e^{si}c_n)$, $(c, b) \in \mathcal{N}_n$ である. このとき, モデュライ空間は $\mathcal{N}_n/(P \times S^1) = \mathcal{S}_n \setminus \{c_n = 0\}$ となる. □

参考文献

[1] K. Chandrasekharan, *Elliptic functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[2] K. Moriya, *Minimal surfaces with rotational symmetry and their moduli spaces*, in preparation.

Institute of Mathematics
University of Tsukuba
Ibaraki 305-8571
Japan
moriya@math.tsukuba.ac.jp