数理解析研究所講究録 1293 巻 2002 年 78-83

有限葉非有界被覆面の倉持極小境界点

京都産業大学理学部 正岡弘照 (Hiroaki MASAOKA)
滋賀大学教育学部 神 直人 (Naondo JIN)

1 はじめに

W はリーマン面とし，W の m-葉 $(1 < m < \infty)$ 非有界な被覆面を $\tilde{W}$ であらわす．$W, \tilde{W}$ の倉持コンパクト化を $W^*, \tilde{W}^*$，倉持理想境界を $\Delta = \Delta^W, \tilde{\Delta} = \Delta^{\tilde{W}}$，さらに，極小境界点の全体を $\Delta_1 = \Delta_1^W, \tilde{\Delta}_1 = \Delta_1^{\tilde{W}}$) とする．

われわれの研究の大きな目標は被覆面 $\tilde{W}$ の倉持理想境界 $\tilde{\Delta}$ の形状を決定することである．その際次の事実が出発点となる ([JMS, Prop.2.1])：
「$\tilde{W}$ から W への射影 π は $\tilde{W}^*$ から W への連続な写像 π^* に拡張される．さらに，$\pi^*(\tilde{\Delta}) = \Delta$ が成り立つ.」

そこで，$\zeta \in \Delta$ に対して $(\pi^*)^{-1}(\zeta)$ を考えると，一般には非可算無限個の点からなる．しかし，極小境界点に限ると次の結果が得られている．ここで $\nu(\zeta)$ は $(\pi^*)^{-1}(\zeta) \cap \tilde{\Delta}_1$ の個数，つまり，$(\pi^*)^{-1}(\zeta)$ に含まれる極小境界点の個数を表す．

THEOREM A [JMS, Thm.1]: 1) ζ が極小境界点でないならば，$\nu(\zeta) = 0$.
2) ζ が極小境界点ならば，$1 \leq \nu(\zeta) \leq m$.

これによって，W の極小境界点とその被覆面である $\tilde{W}$ の極小境界点の関係が少しわかってきた．では，その個数 $\nu(\zeta)$ は何によって決定されるのか？これに対するひとつの答えが次の結果であった．

THEOREM B [JMS, Main Thm.]: $\zeta \in \Delta_1$ に対して W 上の部分領域 M で $W \setminus M$ が ζ で thin となるもの全体を $\mathcal{M}_\zeta$ で表し，$n(M)$ を $\pi^{-1}(M)$ の連結成分の個数とすれば，

$$\nu(\zeta) = \max_{M \in \mathcal{M}_\zeta} n(M).$$

しかし，極小境界点 ζ に対して $(\pi^*)^{-1}(\zeta)$ に含まれる非極小境界点 $\tilde{\zeta}$ に関しては，特別な場合，正岡の詳しい結果があるが，一般には次のことがわかっているに過ぎない ([JMS, Cor.2.2])：
「$\tilde{\zeta}$ は倉持核函数の意味で，$(\pi^*)^{-1}(\zeta)$ に含まれる有限個の極小境界点の線形結合で表される.」

一方 ζ が非極小境界点のときは $(\pi^*)^{-1}(\zeta)$ は非極小境界点のみからなるが，それ以外はわかっていない．

2　結果

Theorem B によって $\nu(\zeta)$ を求めることができるはずであるが，実際にはなかなか難しい．そこで，リーマン面上の他のものを用いて $\nu(\zeta)$ を評価することを考えたい．ここでは，二つのものを考える．ひとつはリーマン面上の Dirichlet 積分有限な調和関数の族である．元来，Dirichlet 積分有限な関数の族は倉持のコンパクト化と大変相性が良く，これを考えるのは自然なことである．もう１つは，被覆の具合をあらわすものとして，分岐点の射影の分布の仕方に注目する．一般には分岐点は必ずしも存在しないのでここでは最も簡単な場合，つまり W が単位円板である場合を扱う．

$W, \tilde{W}$ 上の Dirichlet 積分有限な調和関数の族を $HD(W), HD(\tilde{W})$ で表す．$\tilde{W}$ は W の有限葉の被覆面であるから $HD(W)\circ\pi \subset HD(\tilde{W})$ が成り立っている．ここで，

$$HD(W)\circ\pi = \{h\circ\pi; h \in HD(W)\}.$$

これに関するわれわれの結果は

Theorem 1.[JM]　$HD(W)$ は定数関数以外の元を含むとする．次の *(i),(ii),(iii)* は同値である．

(i)　$HD(\tilde{W}) = HD(W)\circ\pi$;

(ii)　高々 Δ_1 の *full-polar subset* を除いたすべての $\zeta \in \Delta_1$ に対して $\nu(\zeta) = 1$;

(iii)　高々 Δ_1 上の調和測度 $\mu_z^W (z \in W)$ の零集合を除いたすべての $\zeta \in \Delta_1$ に対して $\nu(\zeta) = 1$.

W が単位円板 $\{z; |z| < 1\}$ のときは次の条件も同値になる:

(iv)　全ての $e^{i\theta} \in \partial W$ に対して　$\nu(e^{i\theta}) = 1$.

注意　: 1) Theorem 1 (ii) で倉持容量が 0 の集合を full-polar と呼ぶ．

2) Theorem 1 (iii) で，W の倉持コンパクト化は可解になり，境界 Δ 上の連続関数を境界値とする Dirichlet 問題の解は存在し，その表現測度を調和測度 μ_z^W と表す．

3) Theorem 1 (iv) で，W が単位円板のときは倉持コンパクト化 W^* と Euclid の意味の閉包 $\bar{W}$ は同相になりその境界 Δ と ∂W も同相になる．

次に，W が単位円板のときは射影 π に関して $\tilde{W}$ 上に分岐点が存在する．π による分岐点の像を $\{z_n\}$ とし次の条件を考える ([J]).

$$(\sharp) \qquad \sum_{z_n \neq 0} \frac{1}{\log \dfrac{1}{1-|z_n|}} < \infty.$$

このとき次の定理が証明される．

Theorem 2. [JM] $\{z_n\}$ が条件 ($\sharp$) をみたすならば，高々単位円周 ∂W 上の 1 次元測度 0 の集合を除いて全ての $e^{i\theta} \in \partial W$ に対して $\nu(e^{i\theta}) = m.$ が成り立つ.

注意 ：条件 ($\sharp$) は [J1] において $\tilde{W}$ が極大なリーマン面にならないための十分条件として与えられている ([J1, Thm.2]). 一方 [J2] において Theorem 1 (iii) がみたされれば $\tilde{W}$ は極大なリーマン面になることが示されている ([J2, Thm.5]). これらをあわせると，

「($\sharp$) ならば $\nu(e^{i\theta}) > 1$ となる $e^{i\theta}$ は単位円周上測度正の集合をなす」

というところまではすぐにわかる.

3 Theorem 1 の証明の概略

(i) $\Longrightarrow$ (ii) はあとで述べる.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) は調和測度と容量の関係からすぐにわかる.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) は次のように証明する：

$\tilde{h} \in HD(\tilde{W})$ とすれば，$\tilde{\Delta}$ 上の適当な Borel 関数 $\tilde{h}^*$ と $\tilde{\Delta}$ 上の調和測度 $\mu_{\tilde{z}}^{\tilde{W}}$ を用いて

$$\tilde{h}(\tilde{z}) = \int \tilde{h}^* d\mu_{\tilde{z}}^{\tilde{W}}$$

と積分表示される ([CC, Hilfssatz 16.1]). 仮定より，

$$N = \{\zeta \in \Delta : \zeta \in \Delta \setminus \Delta_1 \text{ or } \nu(\zeta) \geq 2\}$$

は W 上の調和測度 μ_z^W に関して零集合となる. すると，Δ 上の G_δ 集合 N_δ として

$$N_\delta \supset N \text{ かつ } \mu_z^W(N_\delta) = 0$$

をみたすものが取れる. $\zeta \in \Delta \setminus N_\delta$ に対しては $\nu(\zeta) = 1$ である. つまり，$(\pi^*)^{-1}(\zeta)$ は極小境界点ただ 1 つからなる. そこで，

$$h^*(\zeta) = \begin{cases} \tilde{h}^*((\pi^*)^{-1}(\zeta)) & \text{for } \zeta \in \Delta \setminus N_\delta \\ 0 & \text{for } \zeta \in N_\delta \end{cases}$$

と定めれば h^* は Δ 上の Borel 関数になることがわかる. よって，

$$h(z) = \int h^* d\mu_z^W$$

は W 上の調和関数で，

$$\tilde{h}(\tilde{z}) = \int_{\tilde{\Delta}} \tilde{h}^* d\mu_{\tilde{z}}^{\tilde{W}} = \int_{\tilde{\Delta} \setminus (\pi^*)^{-1}(N)} (h^* \circ \pi^*) d\mu_{\tilde{z}}^{\tilde{W}} = \int_{\Delta \setminus N} h^* d\mu_{\pi^*(\tilde{z})}^W = (h \circ \pi^*)(\tilde{z}).$$

が成り立ち，この等式より $h \in HD(W)$ もわかる. すなわち，$\tilde{h} \in HD(W) \circ \pi$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) を示すにはいくらか準備を必要とする．K を W 上の閉円板とし，$W_0 = W \backslash K$, $\tilde{W}_0 = \tilde{W} \backslash (\pi^*)^{-1}(K)$ と定める．そして，$W_0, \tilde{W}_0$ 上の関数族 $\mathcal{HD}(W_0)$, $\mathcal{HD}(\tilde{W}_0)$ を次のように定める： $\mathcal{HD}(W_0) = \{h \in HD(W_0); h = 0 \text{ on } \partial K\}$, $\mathcal{HD}(\tilde{W}_0) = \{\tilde{h} \in HD(\tilde{W}_0); \tilde{h} = 0 \text{ on } \partial\pi^{-1}(K)\}$
そして，まず $HD(\tilde{W}) = HD(W) \circ \pi$ であることと $\mathcal{HD}(\tilde{W}_0) = \mathcal{HD}(W_0) \circ \pi$ が同値であることが示される．

つぎに，W 上の Dirichlet 問題に関する Δ の正則点の集合を Δ_r で表し，$\Delta_{r,1} = \Delta_r \cap \Delta_1$ とする．同様に，$\tilde{\Delta}_r, \tilde{\Delta}_{r,1}$ が定義される．このとき重要なのは $\Delta_1 \setminus \Delta_{r,1}$ が full-polar であること，そして

$$(\pi^*)^{-1}(\Delta_{r,1}) \cap \tilde{\Delta}_1 = \tilde{\Delta}_{r,1}.$$

が成り立つことである．そこで，$\zeta \in \Delta_{r,1}$ に対して $\nu(\zeta) = 1$ を示せば良いことになる．

$\tilde{\xi} \in \tilde{W}_0$ に対して $\tilde{W}_0$ 上の倉持関数を $\tilde{N}_{\tilde{\xi}}$, $\tilde{W}_0$ 上の Green 関数を $\tilde{g}_{\tilde{\xi}}$ で表すと

$$\tilde{N}_{\tilde{\xi}} - \tilde{g}_{\tilde{\xi}} \in \mathcal{HD}(\tilde{W}_0)$$

が成り立つ．すると，$\tilde{W}_0$ 上で $\tilde{N}_{\tilde{\xi}} - \tilde{g}_{\tilde{\xi}} = g \circ \pi$ をみたす $g \in \mathcal{HD}(W_0)$ が存在する．実は，この g は $\frac{1}{m}(N_\xi - g_\xi)$ に等しい，ここで，$\xi = \pi(\tilde{\xi})$ であり，N_ξ, g_ξ はそれぞれ W_0 上の倉持関数，Green 関数を表す．つまり，$\pi(\tilde{\xi}) = \pi(\tilde{\xi}')$ ならばすべての $\tilde{z} \in \tilde{W}_0$ に対して

$$\tilde{N}_{\tilde{\xi}}(\tilde{z}) - \tilde{g}_{\tilde{\xi}}(\tilde{z}) = \tilde{N}_{\tilde{\xi}'}(\tilde{z}) - \tilde{g}_{\tilde{\xi}'}(\tilde{z})$$

が成り立つことになる．

いま，$\zeta \in \Delta_{r,1}$ と $\tilde{z} \in \tilde{W}_0$ を固定する．$\tilde{\zeta} \in \tilde{\Delta}_1(\zeta)$ は Dirichlet 問題に関する正則点であるから Green 関数の性質より

$$\lim_{\tilde{\xi} \to \tilde{\zeta}} \tilde{g}_{\tilde{\xi}}(\tilde{z}) = 0.$$

が成り立つ．$\tilde{\Delta}_1(\zeta)$ が別の点 $\tilde{\zeta}'$ を含んでいれば次のような点列を作ることができる： $\{\tilde{\xi}_n\}$ と $\{\tilde{\xi}'_n\}$ は $\pi(\tilde{\xi}_n) = \pi(\tilde{\xi}'_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ をみたしかつ $\lim_{n\to\infty} \tilde{\xi}_n = \tilde{\zeta}$, $\lim_{n\to\infty} \tilde{\xi}'_n = \tilde{\zeta}'$ となる．
すると

$$\lim_{n\to\infty} \left(\tilde{N}_{\tilde{\xi}_n}(\tilde{z}) - \tilde{g}_{\tilde{\xi}_n}(\tilde{z}) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\tilde{N}_{\tilde{\xi}'_n}(\tilde{z}) - \tilde{g}_{\tilde{\xi}'_n}(\tilde{z}) \right)$$

よって，$\tilde{N}_{\tilde{\zeta}}(\tilde{z}) = \tilde{N}_{\tilde{\zeta}'}(\tilde{z})$．$\tilde{z}$ は任意だから $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}'$ となり $\nu(\zeta) = 1$ が示された．

(iv) が同値になることは，W が単位円板のときには $\partial W = \Delta_{r,1}$ となることか

4 Theorem 2 の証明のアイデア

単位円板 W 上で各 z_n を始点とし単位円周にいたる半径方向の線分 l_n を考える．正確には

$$l_n = \{z; \arg z = \arg z_n, 1 > |z| \geq |z_n|\}.$$

その際， $z_n \neq 0$ としておいても一般性を失わない．すると，

$$M = W \setminus L, \quad L = \bigcup_n l_n$$

は W の単連結な部分領域となり，分岐点をすべて除いていることから $\pi^{-1}(M)$ はちょうど m 個の連結成分からなる．あとは， ∂W 上ほとんどすべての点 $e^{i\theta}$ に対して M が thin になることを見れば Theorem B より $\nu(e^{i\theta}) = 1$ が従う．

M が $e^{i\theta}$ で thin であるための必要十分条件は $e^{i\theta}$ に極を持つ倉持関数 N_θ を $W \setminus M = L$ に関して balayage したとき $N_\theta > (N_\theta)^L$ が成り立つことである．

倉持関数 N_θ は $N_\theta(e^{i\theta}) = \infty$ をみたすから，

$$\int_0^{2\pi} (N_\theta)^L(e^{i\theta})d\theta < \infty$$

を示せば ∂W 上ほとんどすべての点 $e^{i\theta}$ に対して M が thin になることがわかる．実は，上の積分の収束のための十分条件が条件 $(\sharp)$ である．これが証明のアイデアで後は計算をすればよいことになる．

5 補足

Theorem 1 は前提として $HD(W)$ が定数関数以外の元を含むことを要求したが $HD(W)$ が定数関数のみからなるときはどうであろうか？つまり， $W \in O_{HD}$ とする．Green 関数が存在しないリーマン面の族を O_G で表すと $O_{HD} \supset O_G$ が成り立つ．次のことは知られている：

$W \in O_G$ であるための必要十分条件は Δ が full-polar であること．

$W \in O_{HD} \setminus O_G$ であるための必要十分条件は Δ が 1 点の調和測度が正になる極小境界点 ζ をただ 1 つ持ち，それ以外つまり $\Delta \setminus \{\zeta\}$ の調和測度は 0 になることである．

このとき，次の定理がわかる．

Theorem 3.[JM] *(1) 次の (i),(ii), (iii),(iv) は同値である．*

(i) $W \in O_G$;

(ii) $\tilde{W} \in O_G$;

(iii) Δ は *full-polar;*

(iv) $\tilde{\Delta}$ は *full-polar;*

(2) $W \in O_{HD} \setminus O_G$ のとき次の *(i),(ii), (iii)* は同値である.

(i) $HD(\tilde{W})$ は定数関数のみからなる;

(ii) $\tilde{W} \in O_{HD} \setminus O_G$;

(iii) 正の調和測度を持つただ1つの極小境界点 ζ に対して $\nu(\zeta) = 1$;

6 References

[CC] *C. Constantinescu and A. Cornea: Ideale Ränder Riemannscher Flächen, Springer, 1969.*

[J1] *N. Jin: On continuable Riemann surfaces , Kodai Math. J. 21(1998), 318–329.*

[J2] *N. Jin: On maximality of two-sheeted unlimited covering surfaces of the unit disc , J. Math. Kyoto Univ. 39(1999), 155–183.*

[JMS] *N. Jin, H. Masaoka and S. Segawa: Kuramochi boundary of unlimited covering surfaces, Analysis 20(2000), 163–190.*

[JM] *N. Jin and H. Masaoka: Kuramochi boundary and harmonic functions with finite Dirichlet integrals on unlimited covering surfaces, preprint.*