数理解析研究所講究録 1293 巻 2002 年 183-184

調和関数の Fourier-Ehrenpreis 積分表示

関西学院大学物理学科 山根英司
Hideshi YAMANE, Kwansei Gakuin University
yamane@ksc.kwansei.ac.jp

定数係数線形斉次常微分方程式 $u'' - (a+b)u' + ab = 0\,(a \neq b)$ の解は $C_1 e^{at} + C_2 e^{bt}$ であり，$a = b$ の場合は指数多項式が必要で解は $C_1 e^{at} + C_2 t e^{at}$ となる．3 階以上でも同様である．この事実の多変数バージョンが Ehrenpreis の基本原理である．

$D_j = i\partial/\partial t_j (j = 1, \ldots, n)$ とおくとき $P(z) = 0, z = (z_1, \ldots, z_n)$, ならば $e^{-i\langle z,t\rangle}$ は定数係数線形斉次偏微分方程式 $P(D)u(t) = 0$ の解である．多項式 $P(z)$ が重複因子を含むときは指数多項式解がある．基本原理によれば任意の解が指数関数解 (と指数多項式解) の重ね合わせとなっている．重ね合わせというのは $\mathbf{C}_z^n$ の部分集合 $\{P(z) = 0\}$ 上のある測度に関する積分である．そのような測度の存在が Hahn-Banach の定理によって示されるのである．そういう証明であるから，測度を具体的な式で書くことは当初は出来なかった．

ところが多変数関数論の積分公式を使って基本原理の具体的バージョンを得ようという動きが起きた．その場合，測度の代わりに $\{P(z) = 0\}$ に台のあるカレント (residue current など) を用いて定式化することになる．

これらの結果と Poisson 積分の公式には直接の関係はない．[2] の式を球におけるラプラシアンの場合に当てはめてみると，指数関数解を重ね合わせるときの重みは，調和関数の Dirichlet 境界値，Neumann 境界値および内点における値で記述される．もちろん Dirichlet 境界値だけで記述されるのが望ましい．彼らの結果は一般性に価値があるのであって，ラプラシアンという具体的な場合については改善の余地があるわけである．そこで筆者は Poisson 積分を Ehrenpreis 型にフーリエ展開するという問題に自分なりの解答を与えようと考えた．

3 変数の場合を扱った [3] では, [2] に引きずられて $\bar{\partial}\partial|y|$ を用いた定式化をしていたが，後に異なった定式化で n 変数の公式を与えることが出来たので報告する．

$B_n = \{t \in \mathbf{R}^n; |t| = (\sum_{j=1}^n t_j^2)^{1/2} = 1\}$ は $\mathbf{R}_t^n$ の開単位球で，$u(t) \in C^0(\bar{B}_n)$ は B_n で調和とする．その Dirichlet 境界値を $f \in C^0(S^{n-1})$ と表す．

$V = \{z \in \mathbf{C}^n; z^2 = \sum_{j=1}^n z_j^2 = 0\}$ とおき，$\int_V$ は $V \setminus \{0\}$ に沿う積分の $(1,1)$-カレントとする．$V \setminus \{0\}$ は V の smooth locus であって複素多様体としての自然な向きを持つ．$\mathbf{C}^n$ 上の $(n-1, n-1)$-形式 ω について $\int_V \omega = \int_{V\setminus\{0\}} \Phi^*(\omega)$ である．ただし $\Phi : V \setminus \{0\} \to \mathbf{C}^n$ は自然な埋め込みである．$x_j = \mathrm{Re}\, z_j, y_j = \mathrm{Im} z_j\, (j = 1, \ldots, n)$ とし，$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ とおく．$dx \wedge dy = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$ と定義する．

このとき $B_n\, (n \geq 3)$ において

$$u(t) = \int_V \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} \Big(1 - \frac{n-2}{2|y|}\Big) f(y/|y|) e^{-i\langle z, t - y/|y|\rangle} \Big(\frac{dx \wedge dy}{|y|}\Big)^{n-1}$$

が成り立つ．よって $u(t)$ は $z^2 = \sum_{j=1}^n z_j^2 = 0$ と $y/|y| \in \mathrm{supp}\, f$ を満たす z に関する $\exp(-i\langle z, t\rangle)$ の重ね合わせである．

$n = 2$ のときは少し違う式で

$$u(t) = \frac{1}{8\pi} \int_V f(y/|y|) e^{-|y|} (2e^{-i\langle z, t\rangle} - 1) \frac{dx \wedge dy}{|y|}$$

である．

参考文献

[1] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras and A. Yger, "Residue currents and Bezout identities", Birkhäuser, Basel, 1993.

[2] B. Berndtsson and M. Passare, *Integral formulas and an explicit version of the fundamental principle*, J. Funct. Anal., **84** (1989), 358-372.

[3] H. Yamane, *Fourier integral representation of harmonic functions in terms of a current*, to appear in J. Math. Soc. Japan.