数理解析研究所講究録 1295 巻 2002 年 9-16

非同次常微分方程式の可解条件について II

新潟大学工学部 田島慎一 (Shinichi Tajima) *
Dept. of Information Engineering, Faculty of Engineering,
Niigata University

本稿では, 複素領域上での非同次線形常微分方程式 $Pu=f$ を扱い, この方程式の形式巾級数の空間における可解条件を考察する.
論文 [3] で述べたように, 非同次微分方程式の可解条件は留数を用いて explicit に表現することができる. 本稿では, これらの結果を用いることで, 可解条件がアルゴリズミックに計算可能となることを示す. また, 数式処理に実装可能なアルゴリズムを得たので, その概略を述べる.

1 代数的局所コホモロジーと留数

この節では, アルゴリズム導出の基礎をなす 2 つの結果を述べる. 局所可解性の問題を扱っているので, この節と次の節では, 常微分作用素 P は, 原点 $\{0\}$ の近傍 $X\subset\mathbb{C}$ で定義されており, 正則函数を係数に持つとする.

原点 $\{0\}$ における形式巾級数全体のなす空間を $\hat{\mathcal{O}}_{\{0\}}$ で表す. また, 原点 $\{0\}$ に台を持つ代数的局所コホモロジー群のなす層を $\mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X)$ で表す. 微分作用素 P の形式随伴を P^* で表すことにする.

定理 A ([3])
形式巾級数 $f\in\hat{\mathcal{O}}_{\{0\}}$ が与えられたとする. 非同次常微分方程式 $Pu=f$ が形式巾級数解を持つ必要十分条件は次で与えられる.

$$\mathrm{Res}_{z=0}(f(z)\sigma(z)dz)=0,\ \forall\sigma\in\mathrm{Ker}(P^*,\mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X)).$$

但し, $\mathrm{Ker}(P^*,\mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X))=\{\sigma\in\mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X)\mid P^*\sigma=0\}$ である.

同次解の空間 $\mathrm{Ker}(P^*,\mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X))$ は有限次元ベクトル空間となるので, 非負の整数 $\kappa\in\{0,1,\ldots\}$ であり

$$z^\kappa\sigma=0,\ \forall\sigma\in\mathrm{Ker}(P^*,\mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X))$$

*tajima@geb.ge.niigata-u.ac.jp

となるものが取れる. ($\kappa=0$ ならば, $\mathrm{Ker}(P^*, \mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X)) = \{0\}$ となる.)

このような κ を用いて, 常微分作用素環 $\mathcal{D}_X$ における左イデアル I を次で定める.

$$I = \mathcal{D}_X P^* + \mathcal{D}_X z^\kappa.$$

非負の整数 κ が上記の条件を満たす限り, イデアル I は κ の選び方に依らず一意的に決まることが容易に分かる. 次が成り立つ.

定理 B ([3])

上に定めた左イデアル I は, 次の性質を持つ.

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/I, \mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X)) = \mathrm{Ker}(P^*, \mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X))$

(2) 左 $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{D}_X/I$ は原点 $\{0\}$ に台を持つ確定特異点型常微分方程式である.

定理 B の主張 (1) は, イデアル I の定める微分方程式系の代数的局所コホモロジー解の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/I, \mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X))$ は, 形式随伴方程式の代数的局所コホモロジー解全体 $\mathrm{Ker}(P^*, \mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X))$ と等しくなることを意味する.

この結果を見ると, 随伴作用素 P^* の同次解を求めるのに, イデアル I をわざわざ導入することは無駄なことをしているように思えるかもしれないが, ここで, 主張 (2) の方に注目して欲しい. 主張 (2) では, 微分作用素 P が, 確定特異点型とは限らない一般の場合であっても, イデアル I の定める微分方程式系は常に確定特異点型となることを述べている. 本稿で述べるアルゴリズムは, この事実に立脚している. イデアル I のスタンダード基底を求めることで, 微分方程式系としての構造を記述できる.

例 1 微分作用素

$$P = (28+10z+10z^3)z^2\frac{d^2}{dz^2} + (14+35z+95z^3)z\frac{d}{dz} + 84 + 60z + 240z^3$$

に対し, $I = \mathcal{D}_X P^* + \mathcal{D}_X z^3$ と置く. イデアル I のスタンダード基底は,

$$\left\{4z\frac{d}{dx} + 12 - 2z + z^2,\ z^3\right\}$$

で与えられる.

例 2 微分作用素

$$P = (z+2z^2)z^2\frac{d^2}{dz^2} - (1+6z+2z^2)z\frac{d}{dz} + 2 + 6z$$

に対し, $I = \mathcal{D}_X P^* + \mathcal{D}_X z^3$ と置く. イデアル I のスタンダード基底は,

$$\left\{z\frac{d}{dx} + 3,\ z^3\right\}$$

常微分作用素環でのスタンダード基底に関しては, Briançon et Maisonobe ([1]) により詳しい研究がなされている. 本稿でも次節で, 彼らの結果を用いることになる.

2 スタンダード基底の利用

前の節で導入したイデアル $I = \mathcal{D}_X P^* + \mathcal{D}_X x^\kappa$ は原点のみに台を持つような確定特異点型常微分方程式系を定める (定理 B). 従って, イデアル I の代数的構造を計算することで, その代数的局所コホモロジー解を決定することが出来る. この節では, 常微分作用素環でのスタンダード基底を用いる. イデアル I のスタンダード基底の形から, その代数的局所コホモロジー解の次元や極の位数等が読み取れ, 代数的局所コホモロジー解の計算が容易となることを示す.

議論をはじめる前に具体例を 2 つ与えておく. 以下, 有理型関数 $m(z)$ の剰余類 $m(z) \bmod \mathcal{O}_X$ が定める代数的局所コホモロジー類を $[m(z)]$ と表すことにする.

例 3 原点 $\{0\}$ に台を持つ代数的局所コホモロジー類として,

$$\left[\frac{1}{z^2}\right] = \frac{1}{z^2} \mod \mathcal{O}_X,\ \left[\frac{1}{z^3} - \frac{5}{z^6}\right] = \frac{1}{z^3} - \frac{5}{z^6} \mod \mathcal{O}_X \in H^1_{[0]}(\mathcal{O}_X)$$

の 2 つをとる. これら 2 つの代数的局所コホモロジー類を共に同次解として持つような微分方程式系

$$I = \{R \in \mathcal{D}_X \mid R\left[\frac{1}{z^2}\right] = R\left[\frac{1}{z^3} - \frac{5}{z^6}\right] = 0\}$$

を考える. この左イデアル I のスタンダード基底は $\{R_0, R_1, R_2\}$ で与えられる. 但し,

$$\begin{aligned}
R_0 &= z^6, \\
R_1 &= z^2(5z\frac{d}{dz} + 30 + 3z^3), \\
R_2 &= 5z^2\frac{d^2}{dz^2} + 45z\frac{d}{dz} + 60 - 3z^3
\end{aligned}$$

である. R_2 の決定方程式 $5(\lambda^2 + 8\lambda + 12) = 0$ を解くことで, 代数的局所コホモロジー解の極の位数 $-2, -6$ を直ちに得ることが出来ることに注意しよう.

例 4 代数的局所コホモロジー類 $\left[\frac{1}{z}\right], \left[\frac{1}{z^2}\right], \left[\frac{1}{z^3}\right], \left[\frac{1}{z^5} - \frac{5}{z^7}\right]$ を解として持つような微分作用素 R 全体のなすイデアルを I と置く. I のスタンダード基底を求めると, $\{R_0, R_1\}$ を得る. 但し,

$$\begin{aligned}
R_0 &= z^7, \\
R_1 &= z^3(5z\frac{d}{dz} + 2z^2 + 35)
\end{aligned}$$

である. R_1 の決定方程式は $(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+7)=0$ であり, 代数的局所コホモロジー解の極の位数 $-1,-2,-3,-7$ を直ちに得ることが出来る.

一般に, n 階の微分作用素 $R=\sum_{k=0}^{n} a_k(z)\dfrac{d^k}{dz^k}$ に対し, その最高次の係数 $a_m(z)$ の $z=0$ の零点の位数を $z=0$ における微分作用素 R の位数と呼び, $v_{\{0\}}(R)$ で表すことにする. 次の結果は Briançon et Maisonobe による.

定理 (Briançon-Maisonobe [1])

$I\subset\mathcal{D}_X$ は常微分作用素環 $\mathcal{D}_X$ における左イデアルをなし, 原点のみに台を持つ確定特異点型常微分方程式系を定めるとする. 左イデアル I のスタンダード基底は $m+1$ 個の微分作用素から成るとし, それらを $R_0,R_1,R_2,\ldots,R_m$ と置く. 但し, これらは微分作用素としての階数の小さい方から $0=\mathrm{ord}(R_0)<\mathrm{ord}(R_1)<\cdots<\mathrm{ord}(R_m)$ となるように並べてあるとする. このとき, 次が成り立つ.

(i) $v_{\{0\}}(R_0)>v_{\{0\}}(R_1)>\cdots>v_{\{0\}}(R_m)$.

(ii) $I=\mathcal{D}_X R_0+\mathcal{D}_X R_m$.

(iii) $\dim_{\mathbb{C}} Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/I,\mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X))=v_{\{0\}}(R_m)$.

代数的局所コホモロジー解のなす空間の次元が作用素 R_m の階数ではなく原点での位数 $v_{\{0\}}(R_m)$ で与えられることに注意されたい. 今, $d=v_{\{0\}}(R_m)$ と置き直すと, 次が成り立つことが直ちに分かる.

定理 前の定理と同じ仮定の下で次が成り立つ.

(i) $Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/I,\mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X))$ に属する代数的局所コホモロジー類 σ の極の位数の最大値は $v_{\{0\}}(R_0)$ に等しい.

(ii) R_m の決定方程式の解を $s_1,s_2,\ldots,s_d$ とおく. このとき $Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/I,\mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_X))$ の d 個の一次独立な代数的局所コホモロジー類 $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_d$ で, それらの極の位数が $-s_1,-s_2,\ldots,-s_d$ となるものが存在する.

3 アルゴリズムの概要

この節では, 多項式係数の常微分作用素が定める非同次方程式に対し, その形式巾級数の空間での可解条件を求めるアルゴリズムを与える. アルゴリズムの入力として

- 有理数係数多項式 $a_k(z)\in\mathbb{Q}[z]$ を係数に持つ線形常微分作用素 $P(z,\dfrac{d}{dz})=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(z)\dfrac{d^k}{dz^k}$

- P の最高次の微分の係数 $a_n(z) = b_1(z)^{n_1} \cdots b_q(z)^{n_q}$ の因子の一つ $b_i(z)$ (但し, $b_i(z)$ は既約多項式)

の2つを与える. アルゴリズムの出力は, 各点 $\beta \in B_i = \{z \in \mathbb{C} \mid b_i(z) = 0\}$ における形式巾級数の空間 $\hat{O}_\beta$ での非同次方程式 $Pu = f$ の可解条件である.

このアルゴリズムは, 原点 $\{0\}$ での可解条件ではなく, B_i の各点での可解条件を計算するので, 微分方程式系の構造を計算する際に, スタンダード基底ではなく, 微分作用素環における Gröbner 基底を用いる. また, 形式随伴作用素 P^* の代数的局所コホモロジー解を求める際に, ネター作用素表示の概念を利用している. 代数的局所コホモロジー類のネター作用素表示をあらかじめ求めておくことで, 可解条件を求める際に留数計算を行なう必要がなくなるように工夫してある. 以下にアルゴリズムの概略を与える.

入力 : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k(z) \dfrac{d^k}{dz^k}$.
$b_i(z) \in \mathbb{Q}[z]$: $a_n(z)$ の既約因子の一つ.

(i) P の B_i 上での決定方程式を解く.

case(a) 非負の整数解を持たない場合, 非同次常微分方程式 $Pu = f$ は B_i 上常に可解.

case(b) 非負の整数解の最大値 λ_i に対し, $\kappa_i = \lambda_i + 1$ と置く.

(ii) $I = D_X P^* + D_X b_i(z)^{\kappa_i}$ のグレブナ基底 GrI を計算 ; Gr$I = \{R_{i,0}, R_{i,1}, \ldots, R_{i,n_i}\}$. (但し, $0 = \mathrm{ord}(R_{i,0}) < \mathrm{ord}(R_{i,1}) < \cdots < \mathrm{ord}(R_{i,n_i})$ を満たすように並べてある.)

(iii) R_{i,n_i} の最高次の微分の係数多項式の点 $\beta \in B_i$ での零点の位数 $v_\beta(R_{i,n_i})$ を求め, $d_i = v_\beta(R_{i,n_i})$ と置く.

(iv) R_{i,n_i} の決定方程式を解き, B_i に台を持つ代数的局所コホモロジー解の極の位数の取り得る値 $t_{i,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, d_i)$ を決定する. (但し, $t_{i,1} < t_{i,2} < \cdots < t_{i,d_i}$ の順に並べておく.)

(v) 代数的局所コホモロジー類 $\tau_{i,j}$ を

$$\tau_{i,j} = \sum_{k=0}^{t_{i,j}-1} \left(-\frac{d}{dz}\right)^k \left[c_{i,j,k}(z) \frac{b_i'(z)}{b_i(z)}\right]$$

と置く. ここで, $c_{i,j,k}(z) \in \mathbb{Q}[z]$ は, $\deg c_{i,j,k}(z) < \deg b_i(z)$ なる多項式で, 次の条件をみたすとする.

$$\begin{cases} c_{i,j,t_{i,j}-1}(z) \equiv 1 \\ c_{i,j,k}(z) = 0, \qquad \text{for } k = t_{i,j'} - 1,\ j' < j. \end{cases}$$

(vi) $R_{i,n_i}\tau_{i,j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, d_i$ を解き, $c_{i,j,k}$ を全て決定する.

出力：代数的局所コホモロジー解 $\tau_{i,j} \in H^1_{[B_i]}(\mathcal{O}_X)$, $j = 1, 2, \ldots, d_i$ のネター作用素表示

$$\sum_{k=0}^{t_{i,j}-1} \left(-\frac{d}{dz}\right)^k \left[c_{i,j,k}(z)\frac{b_i'(z)}{b_i(z)}\right].$$

このとき, 非同次方程式 $Pu = f$ の $\hat{\mathcal{O}}_\beta, (\beta \in B_i)$ での可解条件は,

$$\sum_{k=0}^{t_{i,j}-1} c_{i,j,k}(\beta)\frac{d^k f}{dz^k}(\beta) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, d_i$$

で与えられる. 実際 §1 での議論により, 求める可解条件は

$$\mathrm{Res}_\beta(f(z)\tau_{i,j}(z)dz) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, d_i$$

となるが,

$$\tau_{i,j} = \sum_{k=0}^{t_{i,j}-1} \left(-\frac{d}{dz}\right)^k \left[c_{i,j,k}(z)\frac{b_i'(z)}{b_i(z)}\right]$$

であるから,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_\beta(f(z)\tau_{i,j}(z)dz) &= \mathrm{Res}_\beta(\sum_{k=0}^{t_{i,j}-1} \frac{d^k f}{dz^k}(z)c_{i,j,k}(z)\left[\frac{b_i'(z)}{b_i(z)}\right]) \\ &= \sum_{k=0}^{t_{i,j}-1} c_{i,j,k}(\beta)\frac{d^k f}{dz^k}(\beta)\end{aligned}$$

となり, 上記の可解条件を得る.

例 4 微分作用素

$$\begin{aligned}P = \;& (4z^{16} + 30z^{15} + 20z^{14} + 330z^{13} + 36z^{12} + 992z^{11} - 244z^{10} + 1980z^9 \\ & -1032z^8 + 5014z^7 + 1380z^6 + 6758z^5 + 2880z^4 + 3294z^3 + 1148z^2 + 50z)\frac{d^2}{dz^2} \\ + \;& (126z^{15} + 855z^{14} + 630z^{13} + 8385z^{12} + 1392z^{11} + 23568z^{10} - 294z^9 + 28800z^8 \\ & -16380z^7 + 51273z^6 + 18720z^5 + 47313z^4 + 24990z^3 + 9735z^2 + 4416z + 75)\frac{d}{dz} \\ + \;& (930z^{14} + 5655z^{13} + 4590z^{12} + 49125z^{11} + 10833z^{10} + 127680z^9 + 21546z^8 \\ & +84915z^7 - 57060z^6 + 88842z^5 + 53625z^4 + 45648z^3 + 42105z^2 - 4485z + 2319)\end{aligned}$$

を考える. この作用素の 2 階の係数は $b(z) = z^3 + 3z + 1$ を因子に持つ. 以下, $B = \{z \in X \mid b(z) = 0\}$ における非同次方程式の可解条件を求める. P の形式的随伴作用素 P^* と $(z^3 + 3z + 1)^3$ の生成するイデアル I のグレブナ基底は $\{R_0, R_1\}$ で与えられる. 但し,

$$\begin{aligned}R_0 = \;& b^3(z), \\ R_1 = \;& 75(z^3 + 3z + 1)\frac{d}{dz} \\ & -59z^8 + 72z^7 - 477z^6 + 359z^5 - 1035z^4 + 273z^3 + 256z^2 - 306z + 642\end{aligned}$$

である. B に台を持つ代数的局所コホモロジー解の基底として

$$\tau = \left[\left(-\frac{d}{dz}\right)^2 \frac{b'(z)}{b(z)} + (2z+5)\frac{b'(z)}{b(z)}\right],$$

$$\left[\left(-\frac{d}{dz}\right)^2 z\frac{b'(z)}{b(z)} + (2z^2+5z)\frac{b'(z)}{b(z)}\right], \left[\left(-\frac{d}{dz}\right)^2 z^2\frac{b'(z)}{b(z)} + (5z^2-6z-2)\frac{b'(z)}{b(z)}\right]$$

を得る. よって, 点 $\beta \in B$ における $Pu = f$ の可解条件は, これらのうちの一つを用いて,

$$\frac{d^2 f}{dz^2}(\beta) + (2\beta+5)f(\beta) = 0$$

で与えられる. ここで, 例えば τ は

$$\tau = \left[\frac{15z^8 - 12z^7 + 105z^6 - 42z^5 + 147z^4 - 42z^3 + 78z^2 + 24z + 69}{(z^3+3z+1)^3}\right]$$

と表すこともできるが, この表現を用いて可解条件を求めようとすると, 改めて留数を計算しなくてはならず, 計算が複雑になることが見て取れる. さて, ベクトル空間 $\mathbb{Q}[z]/\langle b^3(z)\rangle$ の R_1^* による像は, $\mathbb{Q}[z]/\langle b^3(z)\rangle$ の 6 次元部分空間を張る. よって, 非同次方程式 $Pu = f$ が B の全ての点で形式巾級数の範囲で解を持つ条件は, f を $b^3(z)$ で割った余りが, この 6 次元部分空間に属することである. $\mathbb{Q}[z]/\langle b^3(z)\rangle$ において R_1^*1, R_1^*z, $R_1^*z^2$, $R_1^*z^3$, $R_1^*z^4$, $R_1^*z^5$ は一次独立であるので, これらを整理し, 基底ベクトル

$$z^8 - \frac{4862}{185}z^2 - \frac{3489}{37}z - \frac{78}{5}, \quad z^7 + \frac{3264}{185}z^2 - \frac{448}{37}z - \frac{69}{5}, \quad z^6 + \frac{357}{185}z^2 + \frac{432}{37}z + \frac{13}{5},$$
$$z^5 - \frac{343}{185}z^2 - \frac{69}{37}z + \frac{3}{5}, \quad z^4 + \frac{231}{185}z^2 - \frac{23}{37}z - \frac{6}{5}, \quad z^3 + \frac{12}{37}z^2 + \frac{81}{37}z + 1$$

を得る.

参 考 文 献

[1] J.Briançon et Ph. Maisonobe, *Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable,* l'Enseignement Math. **30** (1984), 7–38.

[2] Y. Nakamura and S. Tajima, *Residue calculus with differential operators*, Kyushu J. Math. **54** (2000), 127–138.

[3] 田島慎一, 非同次常微分方程式の可解条件について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1168**「完全最急降下法」(2000), 66–79.

[4] 田島慎一, Holonomic な定数係数線形偏微分方程式系と Grothendieck duality, 京都大学数理解析研究所講究録「積分核の代数解析的研究」 掲載予定.

[5] S. Tajima, *An algorithm to compute the Laurent expansion of a rational function*, preprint.

[6] N. Takayama, *Kan: A system for computation in algebraic analysis* (1991–), (http://www.math.s.kobe-u.ac.jp).