

Generalized hypergeometric functions satisfying algebraic equations

琉球大学・教育学部 加藤満生 (Mitsuo Kato)

College of Education, University of the Ryukyus

一般型超幾何関数

$${}_nF_{n-1}(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}; b_1, b_2, \dots, b_{n-1}; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (a_j, k)}{\prod_{j=1}^{n-1} (b_j, k) k!} z^k,$$

$(a, k) = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$, は $z = 0, 1$ and ∞ に特異点をもつ、 n 階のフックス型微分方程式

$${}_nE_{n-1}(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}; b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$$

をみます。Beukers and Heckman [B-H] は有限既約モノドロミー群をもつ ${}_nE_{n-1}$ を決定している。その中で、次のことが述べられている (Theorem 5.8): 既約で imprimitive なモノドロミー群をもつ ${}_nE_{n-1}$ は本質的には、次のもので与えられる。

$$(1) \quad {}_nE_{n-1}\left(\frac{-\alpha}{p}, \frac{-\alpha+1}{p}, \dots, \frac{-\alpha+p-1}{p}, \frac{\alpha}{q}, \frac{\alpha+1}{q}, \dots, \frac{\alpha+q-1}{q}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right),$$

ここに、 p, q は互いに素な正整数で、 $n = p + q$ 。この微分方程式 (1) に関して、神戸大学野海教授と行った共同研究 (to appear in Tohoku Math. J.) の概要を以下に述べる。

$$c_k(\alpha, s) = \alpha(\alpha + ks + 1, k - 1)/k! \quad (k \geq 1),$$

$$\psi(\alpha, s, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\alpha, s) x^k$$

により定義された一般 2 項関数 $\psi(\alpha, s, x)$ は、 $s = -p/n$ のとき

$$z = (-p)^p q^q n^{-n} x^n$$

の関数として微分方程式 (1) をみだし、さらに $\alpha = -1/(mn)$ のときは、代数方程式

$$(2) \quad y^{mn} + xy^{mp} - 1 = 0$$

の解にもなる。これらのことは Lambert, Mellin 等により知られている。

特に、 $\alpha = -1/(mn)$, $m \geq 2$ のとき、(2) の 1 次独立な n 個の解は、(z の関数として) (1) の解の基本系を与えることがわかる。従って、(1) の射影モノドロミー群は imprimitive で有限既約、その位数は $m^{n-1}n!$ となる。また、これらの 1 次独立な n 個の解の比によって定義される $\mathbf{C} - \{0, 1, \infty\}$ から \mathbf{P}^{n-1} への多価写像 (Schwarz map) の像 (の閉包) は、(2) の根と係数の関係より、 \mathbf{P}^{n-1} 内の既約代数曲線

$$\{[y_0 : y_1 : \cdots : y_{n-1}] \in \mathbf{P}^{n-1} \mid \sigma_k(y_0^m, y_1^m, \cdots, y_{n-1}^m) = 0, 1 \leq k \leq n-1, k \neq n-p\},$$

に等しいことがわかる、ここに σ_k は k 次の elementary symmetric function をあらわす。これらの証明は、 $\psi(\alpha, s, x)$ のもつ性質を利用して、射影モノドロミー群の生成元を具体的に求めることによりなされる。

特別の場合: $n = 3, p = 1, m = 1$ のときは、(2) は 3 次方程式となり、 $\psi(-1/3, -1/3, x)$ はその根となるので、この一般 2 項関数を考察することにより、3 次方程式に対するカルダノの公式が、超幾何関数論の範囲内で求まることになる。