数理解析研究所講究録 1297 巻 2002 年 80-88

最小スパニングネットワークゲームの解

東京理科大学理工学部
大阪大学大学院工学研究科
鶴見 昌代 (Masayo Tsurumi)　谷野 哲三 (Tetsuzo Tanino)
Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science
Graduate School of Engineering, Osaka Univ.

1 はじめに

近年，複数の意思決定者が共同で最小のコストで情報ネットワークを構築する問題が重要になっている．最小のコストで実現できるネットワークが見つかれば，次にコストをどのように分配するべきかという問題が生じる．提案された受け入れがたいものであれば，共同でネットワークを構築することはないため，この問題の議論は重要である．このようなネットワーク構築に関連するコスト分配の問題に対して，初めてゲーム理論的にアプローチしたのはBird [1] である．

なかでも，情報源などを表すソースが一つで，プレイヤーが各頂点に一対一に対応づけられ，頂点間を結ぶコストが非負で表現できる状況は多い．Bird は，この状況でバード分配と呼ばれる分配法を提案した．バード分配は，実際に構築するネットワークに対応した分配方法であり，この状況で定式化される協力ゲームのコアの要素となるため，受け入れられやすく，合理的であると考えられる．しかしながら，この分配方法では，ソースに接続するプレイヤーの存在が他のプレイヤーのコスト最小化にとって重要であることが多いにもかかわらず，その発言力が反映されていない．この発言力を反映させるコスト分配として，Granot and Huberman [5] が弱要求演算を導入した．しかしながら，ゲームの構成のしかたによっては，この演算で得られるコスト分配がコアに含まれない場合がある．そこで，我々はこれまでの研究 [8] で，Granot and Huberman [5] の考え方を利用し，ゲームのコアにも含まれるコスト分配法としてプレイヤーに基づく要求演算と提携に基づく要求演算を提案した．提携に基づく要求演算は，プレイヤーに基づく要求演算を繰り返し適用することによって定義される．他方，このようなゲームを一般化した概念はこれまでもいくつか考えられている [3, 6, 7]. なかでも，いずれのプレイヤーにも対応づけられず，すべてのプレイヤーが自由に利用できる頂点が存在する場合については，コアが空になることがあり，コアが空にならないための条件が議論されている [3].

本研究では，プレイヤーに基づく要求演算を繰り返し適用するのではなく，同時に適用すると考えたときに得られるコスト分担である要求分担を定義する．この要求分担がコアの要素となるような十分条件を示す．さらに，この要求分担を用いて，公共点が存在する場合にコアが空にならないための新しい十分条件を導出する．

2 費用分担ゲームと最小スパニングネットワーク

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ をプレイヤーの集合とする．このとき，任意の $S \subseteq N$ に対して $c(S)$ を S が協力したときに必要な費用を表すものとみなせるとき，$c(\emptyset) = 0$ をみたす

$c : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ は，費用分担ゲーム，あるいは単にゲームとよばれる．x_i をプレイヤー i の分担額とみなせるとき，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ は費用分担ベクトルとよばれる．任意の $i \in N$ に対して $x_i \leq c(\{i\})$ と $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$ をみたす $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ は，費用分担とよばれる．このとき，ゲーム c のコアは次で定義される．

$$Core(c) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = c(N), \sum_{i \in S} x_i \leq c(S), \forall S \subseteq N \right\}.$$

(V, E) で頂点の集合 V と枝の集合 E をもつ完全無向グラフを表すものとする．枝 $e \in E$ の両端点が $u, v \in V$ のとき，(u, v) と表し，枝 (u, v)，(v, u) は同じ枝を表す．閉路をもたない連結部分グラフはツリーとよばれ，枝集合 $V' \subseteq V$ の任意の点の組に対してそれらを結ぶパスが存在するとき，V' のスパニングツリーとよぶ．また，各枝 $e = (u, v) \in E$ に対して $w(e) = w((u, v)) \geq 0$ が与えられているとき，すなわち $w : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ が与えられているとき，(V, E, w) をネットワークとよぶ．以下では，簡単のため $w((u, v))$ を $w(u, v)$ と表す．本論文では，を$w(e) = w(u, v)$　u と v を結ぶリンクを構築するための費用とみなし，$e = (u, v)$ の費用とよぶ．u と v を結ぶことが不可能なときには $w(u, v)$ を正の無限の値とするか十分に大きい値とすることによって，一般性を失うことなく，どのネットワークもその元となるグラフが完全であると仮定することができる．$w : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ の定義域を $E' \subset E$ に制限することによって，$w_{E'} : E' \longrightarrow \mathbb{R}_+$ を考えることができる．(V, E) の部分グラフ (V', E') に基づいて $(V', E', w_{E'})$ を考えたとき，これを (V, E, w) の部分ネットワークとよぶ．このとき任意の部分ネットワークに対して，その枝のコストの合計，すなわち $\sum_{e \in E'} w(e)$ をその部分ネットワークのコストとよぶ．

V' のスパニングツリーのうち，枝のコストの合計が最小のものを V' の最小スパニングツリーと呼び，$\Gamma[V']$ と表す．最小スパニングツリーは，一つのネットワークに対して一つに定まるとは限らないことに注意しておく．また，(V_Γ, E_Γ) で最小スパニングツリー Γ を表す．ソースを含む最小スパニングツリー Γ において，頂点 v_1 がソースから頂点 v_2 へのパス上にあるとき，$v_1 \preceq_\Gamma v_2$ と表す．ソースを含む最小スパニングツリー Γ において，$v_1 \preceq_\Gamma v_2$ で，v_1 と v_2 を結ぶ枝が存在するとき，v_1 は v_2 の隣接親とよばれ，v_2 は v_1 の隣接子とよばれる．Γ における v の隣接親を $p_\Gamma(v)$ と表し，Γ における v の隣接子の集合を $F_\Gamma(v)$ と表す．また，$F_\Gamma(V) = \cup_{v \in V} F_\Gamma(v) \backslash V$ とし，$P_\Gamma(V) = \cup_{v \in V} \{p_\Gamma(v)\} \backslash V$ とする．混乱の恐れのないときには，Γ を省略する場合もある．

$a : N \longrightarrow E$ をプレイヤーの集合 N を頂点集合に関連づける単射とし，$*$ でソースを表すとき，本論文では $(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ をスパニングネットワーク問題，あるいは SN 問題とよぶ．$A(S) = \cup_{i \in S} \{a(i)\}$，$A_*(S) = A(S) \cup \{*\}$ とする．$a : N \longrightarrow E$ が単射であるため，$i \in N$ と $v = a(i)$ を同一視できる．このことから，混乱の恐れのないときには，プレイヤーとそのプレイヤーに対応づけられる頂点を同一視して扱う．$A_*(N)$ を含む枝集合をもつようなスパニングツリーのなかで，コストが最小のものを SN 問題 $(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ に関する最小スパニングツリーとよぶ．$P = V \backslash A_*(N)$ とし，その要素を公共点とよぶ．すべてのプレイヤーが公共点を自由に利用可能であるとするとき，最小スパニングツリーゲームの定義を拡張して，次の定義を与えることができる (cf. [2, 4]):

定義 1 次式を満たす関数 $\hat{c}: 2^N \to \mathbb{R}_+$ を SN 問題 $(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ に関する最小スパニングネットワークゲーム，あるいは MSN ゲームとよぶ.

$$\hat{c}(S) = \min_{A_*(S) \subseteq T \subseteq A_*(S) \cup P} \sum_{e \in E_{\Gamma[T]}} w(e), \qquad \forall S \subseteq N,$$

ただし，$\hat{c}(\emptyset) = 0$ とする.

単調包ゲームは次のように定義できる.

定義 2 [2, 4] $\hat{c}$ を SN 問題 $(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ に対する最小スパニングツリーゲームとする．次が成り立つとき，関数 $c : 2^N \to \mathbb{R}_+$ はゲーム $\hat{c}$ の単調包，あるいは SN 問題 $(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ に対する単調包ゲーム，あるいは MC ゲームとよばれる.

$$c(S) = \min_{S \subseteq T \subseteq N} \hat{c}(T), \qquad \forall S \subseteq N.$$

単調包の定義から，任意の $S \subseteq N$ に対して $c(S) \leq \hat{c}(S)$ が成り立つ．したがって，明らかに $Core(c) \subseteq Core(\hat{c})$ が成り立つ.

3 最小スパニングネットワークゲームに関連する既往の研究

ここでは，SN 問題に対するいくつかのコスト分配法について振り返っておく．SN 問題に対するコスト分配法の一つであるバード分担は次のように定義される.

定義 3 [1, 2, 4] SN 問題 $(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ が $P = V \backslash A_*(N) = \emptyset$, すなわち公共点を持たないものとし，$\Gamma$ をこの SN 問題に関する最小スパニングツリーとする．次が成り立つとき，最小スパニングツリー Γ に対するバード分担，または SN 問題に対するバード分担と呼ばれる.

$$l_i = w(i, p_\Gamma(i)), \qquad \forall i \in N.$$

一つの SN 問題に対して複数の最小スパニングツリーが存在する場合があるので，バード分担も複数存在することがある.

定理 1 [2, 4] $(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ において公共点が存在しないとき，すなわち $P = V \backslash A_*(N) = \emptyset$ のとき，その最小スパニングツリー Γ に対するバード分担 $\boldsymbol{l}$ について，次が成り立つ.

$$\boldsymbol{l} \in Core(c).$$

次に，プレイヤー $i \in N$ の弱要求演算を定義するための準備をする．$(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ を公共点を持たない SN 問題とし，$\boldsymbol{l}$ をソースを含む最小スパニングツリー Γ に対するバード分担とする．任意の $j \in F(i)$ に対して，$V_j^i = \{j' \in N \mid j' \succeq_\Gamma j\}$，$E_j^i = \{(v_1, v_2) \in E_\Gamma \mid v_1, v_2 \in V_j\}$ とし，$V_{-i} = V_\Gamma \backslash (\{i\} \cup (\cup_{k \in F(i)} V_k))$, $E_{-i} = \{(v_1, v_2) \in E_\Gamma \mid$

$v_1, v_2 \in V_{-i}\}$ とする．このとき，$k \in F(i)$ に対して，(V_k^i, E_k^i) は V_k^i における最小スパニングツリーであり，同様に，(V_{-i}, E_{-i}) は V_{-i} における最小スパニングツリーである．$(\cup_{k\in F(i)}(V_k^i, E_k^i)) \cup (V_{-i}, E_{-i})$ を i を端点としない枝を用いて最小のコストで結ぶと，$A_*(N)\backslash\{i\}$ に対する最小スパニングツリーとなる．これを Γ^{-i} と表す．$k \in F(i)$ に対して，$q \in V_k^i$，$q \preceq_{\Gamma^{-i}} j$，$\forall j \in V_k^i$ を満たす頂点 q は一意に定まる．この頂点を $q^{-i}(k)$ と表す．$q^{-i}(k) = k$ とは限らないことに注意しておく．ここで，弱要求演算を次のように定義する．

定義 4 [8] $(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ を $P = V\backslash A_*(N) = \emptyset$ を満たす SN 問題とし，Γ をこの問題の最小スパニングツリーとする．$\boldsymbol{l}$ を Γ に対するバード分担，$i \in N$ とし，$\boldsymbol{y}$ をコスト分担とする．このとき，Γ に対して，次を定義する．

$$d_r^i(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} w(q^{-i}(r), p_{\Gamma^{-i}}(q^{-i}(r))), & r \in F(i) \text{ のとき} \\ y_r - \displaystyle\sum_{k\in F(i)} (d_k^i(\boldsymbol{y}) - y_k), & r = i \text{ のとき} \\ y_r, & \text{それ以外} \end{cases}$$

このとき，$\boldsymbol{y}$ にコスト分担 $\boldsymbol{d}^i(\boldsymbol{y}) = (d_1^i(\boldsymbol{y}), d_2^i(\boldsymbol{y}), \ldots, d_n^i(\boldsymbol{y}))$ を対応づける演算を i の Γ における弱要求演算とよぶ．

なお，この定義は，Granot et al. [3] の弱要求演算とは少し異なっていることに注意しておく．Granot et al. の弱要求演算は，$r \in F(i)$ に関しては $d_r^i(\boldsymbol{y}) = w(p(r), p_{\Gamma^{-i}}(r)) - (\sum_{e\in E_r} w(e) - \sum_{j\in V_r\backslash\{r\}} y_j)$ で定義されていた．この違いに関しては [8] を参照されたい．

次に，i による要求演算の定義の準備として，$r \in F(i)$ に対して β_r を次で定義する．

$$\beta_r = \begin{cases} w(q^{-i}(r), p_{\Gamma^{-i}}(q^{-i}(r))), & \displaystyle\sum_{k\in F(i)} w(q^{-i}(k), p_{\Gamma^{-i}}(q^{-i}(k))) \le \sum_{k\in F(i)\cup\{i\}} l_k \text{ のとき} \\ \alpha_r l_i + l_r, & \text{それ以外} \end{cases}$$

ただし $0 \le \alpha_r \le (w(r, q^{-i}(r)) - l_r)/l_i$，$\sum_{r\in F(i)} \alpha_r = 1$ とする．β_r を用いて，我々は要求演算を次のように定義した．

定義 5 [8] $(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ を $P = V\backslash A_*(N) = \emptyset$ を満たす SN 問題とし，Γ をこの問題の最小スパニングツリーとする．$\boldsymbol{l}$ を Γ に対するバード分担，$i \in N$ とし，$\boldsymbol{y}$ をコスト分担とする．このとき，Γ に対して，次を定義する．

$$\delta_r^i(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \beta_r, & r \in F(i) \text{ のとき} \\ y_r - \displaystyle\sum_{k\in F(i)} (\delta_k^i(\boldsymbol{y}) - y_k), & r = i \text{ のとき} \\ y_r, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

コスト分配 $\boldsymbol{y}$ に対して $\boldsymbol{\delta}^i(\boldsymbol{y}) = (\delta_1^i(\boldsymbol{y}), \delta_2^i(\boldsymbol{y}), \ldots, \delta_n^i(\boldsymbol{y}))$ を対応づける演算を Γ における i の要求演算とよぶ．

要求演算は，$(N\backslash\{i\})\cup\{*\}$ に対する最小スパニングツリーのコストが $N\cup\{*\}$ に対する最小スパニングツリーのコストよりも大きい場合は，i のコスト分担分を $F(i)$ のメンバーで負担することで i に繋がる枝を利用できると考えることによって得られる．

次に，提携の要求演算の定義の準備として，いくつかの表記を定義する．Π を N の順列すべての集合とする．Π_Γ を次で定義する．

$$\Pi_\Gamma := \{\pi\in\Pi \mid \pi(j)<\pi(i),\ \ \forall i,j\in N,\ \text{s.t. } j\prec_\Gamma i\}.$$

提携による要求演算は次のように定義される．

定義 6 [8] $S\subseteq N$ とし，$\pi\in\Pi_\Gamma$ とする．$\boldsymbol{d}^i$ を Γ における i による要求演算とする．このとき，コスト分担 $\boldsymbol{y}$ に対して次で定義される $\boldsymbol{d}^S(\boldsymbol{y})$ を対応づける演算は Γ における提携 S の要求演算とよばれる．

Step 1: $Q=\emptyset$ とする．

Step 2: $\pi(i)\le\pi(j), \forall j\in S\backslash Q$ を満たすプレイヤーを i とし，$Q:=Q\cup\{i\}$ とする．

Step 3: $\boldsymbol{\delta}^Q(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\delta}^i(\boldsymbol{\delta}^{Q\backslash\{i\}}(\boldsymbol{y}))$ を計算する．ただし，$\boldsymbol{d}^\emptyset(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}$ とする．

Step 4: $Q=S$ ならば終了．そうでなければ Step 2 へ．

このように定義されたプレイヤーの要求演算と提携の要求演算について，次の定理が成り立つ．

定理 2 [8]$(V\cup\{*\},E,w,N,a)$ を $P=V\backslash A_*(N)=\emptyset$ を満たす SN 問題とし，$\boldsymbol{l}$ をこの問題の最小スパニングツリー Γ に対するバード分担とする．$\boldsymbol{\delta}^i$ と $\boldsymbol{\delta}^S$ を，それぞれ Γ におけるプレイヤー i の要求演算と提携 S の要求演算とする．このとき，次が成り立つ．

1. $\boldsymbol{\delta}^i(\boldsymbol{l})\in Core(c), \forall i\in N.$
2. $\boldsymbol{\delta}^S(\boldsymbol{l})\in Core(c), \forall S\subseteq N.$

また，公共点が存在する SN 問題については，Granot et al. [3] が次のようなコアが空にならないための条件を示している．

定理 3 [3] SN 問題 $(V\cup\{*\},E,w,N,a)$ に関する最小スパニングツリーのうち，すべての枝を張り，公共点が隣り合わないものが存在するとき，対応する単調包ゲームのコアは空でない．

また，コアの要素に関する性質について，[3] の定理 4.6 から次が成り立つことがわかる．

定理 4 (cf. [3]) $(V\cup\{*\},E,w,N,a)$ は公共点を含む SN 問題とする．この問題の公共点にプレイヤーを配置した SN 問題を $(V\cup\{*\},E,w,N\cup A^{-1}(P),a^P)$ で表す．$\boldsymbol{x}=(x_i)_{i\in N\cup a^{-1}(P)}$ を任意の $i\in a^{-1}(P)$ に対して $x_i=0$ を満たす $(V\cup\{*\},E,w,N\cup A^{-1}(P),a^P)$ のコアの要素とする．$\boldsymbol{x}$ の $\mathbb{R}^N$ への射影 $\boldsymbol{x}^N$ は，SN 問題 $(V\cup\{*\},E,w,N,a)$ のコアとなる．

4 最小スパニングネットワークゲームの解

新しい要求演算の概念を定義する．まず，公共点が存在しない場合，すなわち $P = \emptyset$ の場合について考える．任意の $k \in F(S)$ に対して，$V_k^S = V_k^{p(k)} \backslash (\cup_{l \in F(S); l \neq k} V_l^{p(l)} \cup S)$, $E_k^S = \{(v_1, v_2) \in E_\Gamma \mid v_1, v_2 \in V_k^S\}$ とし，$V_{-S} = V_\Gamma \backslash (S \cup (\cup_{k \in F(S)} V_k^S))$, $E_{-S} = \{(v_1, v_2) \in E_\Gamma \mid v_1, v_2 \in V_{-S}\}$ とする．$S = \{i\}$ のとき $k \in F(\{i\})$ に対して，$V_k^{\{i\}} = V_k^{p(k)} \backslash (\cup_{l \in F(\{i\}); l \neq k} V_l^{p(l)} \cup \{i\}) = V_k^i \backslash (\cup_{l \in F(\{i\}); l \neq k} V_l^i \cup \{i\}) = V_k^i$ であり，$E_k^{\{i\}} = E_k^i$ である．また，$V_{-\{i\}} = V_\Gamma \backslash (S \cup (\cup_{k \in F(\{i\})} V_k)) = V_{-i}$，$E_{-\{i\}} = E_{-i}$ である．

Γ を SN 問題に関する最小スパニングツリーとし，$\boldsymbol{l}$ を対応するバード分担とする．$k \in F(S)$ に対して，(V_k^S, E_k^S) は V_k^S における最小スパニングツリーである．同様に，(V_{-S}, E_{-S}) は V_{-S} における最小スパニングツリーである．$\cup_{k \in F(S)} (V_k^S, E_k^S) \cup (V_{-S}, E_{-S})$ を i を端点にもたない枝を用いて最小のコストで結ぶと，$(N \backslash S) \cup \{*\}$ に対する最小スパニングツリーとなる．これを Γ^{-S} と表す．$k \in F(S)$ に対して，$q \in V_k^S$，$q \preceq_{\Gamma^{-S}} j$, $\forall j \in V_k^S$ を満たす頂点 q は一意に定まる．この頂点を $q^{-S}(k)$ と表す．

i による弱要求演算の概念を拡張して，次の費用分担を定義する．

定義 7 $(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ を $P = V \backslash A_*(N) = \emptyset$ を満たす SN 問題とし，Γ をこの問題の最小スパニングツリーとし，$\boldsymbol{l}$ をそれに対応するバード分担とする．$\boldsymbol{d}^S = (d_i^S)_{i \in N}$ は，次を満たすとき SN 問題に関する最小スパニングツリー Γ に関する S による弱要求分担とよぶ．

$$d_r^S = \begin{cases} w(q^{-S}(r), p_{\Gamma_{-S}}(q^{-S}(r))), & r \in F(S) \text{ のとき} \\ l_r - \dfrac{l_r}{\sum_{j \in S} l_j} \sum_{k \in F(S)} (\delta_k^S - l_k), & r \in S \text{ のとき} \\ l_r, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

提携 S による新しい要求演算を定義するために，$i \in S$ に対して i を端点をもつ枝をすべて取り除く．残った枝を使って，新たに $E_\Gamma \backslash S$ の最小スパニングツリー Γ_{-S} を構築する．このとき，Γ に対する $\beta_r, r \in F(i)$ を次のように定義する．

$$\beta_r = \begin{cases} w(q^{-S}(r), p_{\Gamma_{-S}}(q^{-S}(r))), & \sum_{k \in F(S)} w(q^{-S}(k), p_{\Gamma_{-S}}(q^{-S}(k))) \leq \sum_{i \in S \cup F(S)} l_i \text{のとき} \\ \alpha_r \sum_{k \in S} l_k + l_r, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

ただし，$0 \leq \alpha_r \leq \{w(q^{-S}(k), p_{\Gamma_{-S}}(q^{-S}(k))) - l_r\} / \sum_{k \in S} l_k$，$\sum_{r : r \in F(S)} \alpha_r = 1$ とする．ここで，要求演算の概念を用いて，次のようなコスト分担を定義する．

定義 8 $(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ を $P = V \backslash A_*(N) = \emptyset$ を満たす SN 問題とし，Γ をこの問題の最小スパニングツリーとする．$\delta^S = (\delta_i^S)_{i \in N}$ は，次を満たすとき SN 問題に関する

最小スパニングツリー Γ に関する S による要求分担とよぶ.

$$\delta_r^S = \begin{cases} \beta_r, & r \in F(S) \text{ のとき} \\ l_r - \dfrac{l_r}{\displaystyle\sum_{j \in S} l_j} \displaystyle\sum_{k \in F(S)} (\delta_k^S - l_k), & r \in S \text{ のとき} \\ l_r, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

$r \in S$ に対して, 次が成り立つことに注意しておく.

$$\begin{aligned} \delta_r^S &= l_r - \frac{l_r}{\displaystyle\sum_{j \in S} l_j} \sum_{k \in F(S)} (\delta_k^S - l_k) \\ &= \frac{l_r}{\sum_{j \in S} l_j} \left\{ \sum_{j \in S} l_j - \sum_{k \in F(S)} (\delta_k^S - l_k) \right\} \\ &= \frac{l_r}{\displaystyle\sum_{j \in S} l_j} \left[\sum_{j \in S} l_j - \sum_{k \in F(S)} \left(\min \left\{ w(q^{-S}(k), p_{\Gamma_{-S}}(q^{-S}(k))), \alpha_k \sum_{m \in S} l_m + l_k \right\} - l_k \right) \right] \\ &= \frac{l_r}{\displaystyle\sum_{j \in S} l_j} \left[\sum_{j \in S} l_j - \min \left\{ \sum_{k \in F(S)} \{ w(q^{-S}(k), p_{\Gamma_{-S}}(q^{-S}(k))) - l_k \}, \sum_{m \in S} l_m \right\} \right] \\ &= \frac{l_r}{\displaystyle\sum_{j \in S} l_j} \left[\max \left\{ \sum_{j \in S \cup F(S)} l_j - \sum_{k \in F(S)} w(q^{-S}(k), p_{\Gamma_{-S}}(q^{-S}(k))), 0 \right\} \right] \end{aligned}$$

要求分担が, 対応する単調包ゲームのコアに含まれるための十分条件を次のように得ることができる.

定理 5 $(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ を $P = V \backslash A(N) = \emptyset$ を満たす SN 問題とし, $\boldsymbol{l}$ をそれに対応するバード分担とする. 与えられた SN 問題に関する最小スパニングツリー Γ に対する S による要求分担 $\boldsymbol{\delta}^S$ は, 次が成り立つとき対応する単調包ゲームのコアに含まれる.

$$\hat{c}(T) \geq \hat{c}(T \backslash S) + \max \left\{ \sum_{k \in S \cup F(S)} l_k - \sum_{j \in F(S)} w(q^{-S}(j), p_{\Gamma_{-S}}(q^{-S}(j))), 0 \right\} \frac{\displaystyle\sum_{m \in S \cap T} l_m}{\displaystyle\sum_{m' \in S} l_{m'}}, \quad \forall T \subseteq N.$$

証明. $T \subseteq N$ とする. $\sum_{i \in T} \delta_i^S > \hat{c}(T)$ と仮定して矛盾を導くことにより, $\boldsymbol{\delta}^S \in Core(\hat{c})$ を証明する. $A_*(N) \backslash S$ に対する最小スパニングツリーのコストは, $\sum_{i \in N \backslash S} d_i^S$ であり,

$S \cap F(S) = \emptyset$ に注意すると，次のように変形できる．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i \in N\setminus S} d_i^S \\
=\ & \sum_{i\in F(S)\setminus T} d_i^S + \sum_{i \in N\setminus(S\cup T\cup F(S))} d_i^S + \sum_{i\in T\setminus S} d_i^S \\
\geq\ & \sum_{i\in F(S)\setminus T} d_i^S + \sum_{i \in N\setminus(S\cup T\cup F(S))} d_i^S + \sum_{i\in T\setminus S} \delta_i^S \\
=\ & \sum_{i\in F(S)\setminus T} d_i^S + \sum_{i \in N\setminus(S\cup T\cup F(S))} d_i^S + \sum_{i\in T} \delta_i^S - \sum_{i\in T\cap S} \delta_i^S \\
>\ & \sum_{i\in F(S)\setminus T} d_i^S + \sum_{i \in N\setminus(S\cup T\cup F(S))} d_i^S + \hat{c}(T) - \sum_{i\in T\cap S} \delta_i^S \\
=\ & \sum_{i\in F(S)\setminus T} w(q^{-S}(j), p_{\Gamma_{-S}}(q^{-S}(j))) + \sum_{i \in N\setminus(S\cup T\cup F(S))} l_i + \hat{c}(T) - \sum_{i\in T\cap S} \delta_i^S \qquad (1)
\end{aligned}
$$

任意の $T \subseteq N$ に対して $\hat{c}(T) - \sum_{i\in T\cap S} \delta_i^S \geq \hat{c}(T\setminus S)$ が成り立つとき，次が成り立つ．

$$
(1) \geq \sum_{j\in F(S)\setminus T} w(q^{-S}(j), p_{\Gamma_{-S}}(q^{-S}(j))) + \sum_{i \in N\setminus(S\cup T\cup F(S))} l_i + \hat{c}(T\setminus S) \qquad (2)
$$

(2) の右辺が $N\setminus S$ のスパニングツリーのコストとなることに注意すると，矛盾が生じる．また，$\delta_r^S = l_r \left[\max\left\{\sum_{j\in S\cup F(S)} l_j - \sum_{k\in F(S)} w(q^{-S}(k), p_{\Gamma_{-S}}(q^{-S}(k))), 0\right\}\right] / \sum_{j\in S} l_j$ であることから，定理は成り立つ． □

定理 5 を用いると，$P = V\setminus A(N) \neq \emptyset$ を満たす SN 問題についても，コアが空にならないための十分条件を得ることができる．

定理 6 SN 問題 $(V \cup \{*\}, E, w, N, a)$ に対して，次の条件を満たす提携 $S \supseteq P$ が存在するものとする．

1. $\hat{c}(T) \geq \hat{c}(T\setminus S), \quad \forall T \subseteq N.$
2. $V \cup \{*\}$ を張る SN 問題に対する最小スパニングツリーが存在し，対応するバード分担と S について次が成り立つ．

$$
\sum_{i\in S\cup F(S)} l_i - \sum_{j\in F(S)} w(q^{-S}(j), p_{\Gamma_{-S}}(q^{-S}(j))) \leq 0
$$

このとき，対応する単調包ゲームのコアは空でなく，最小スパニングツリー Γ に対する S の要求分担は，対応する単調包ゲームのコアの要素となる．すなわち，$\boldsymbol{\delta}^S \in Core(c)$ が成り立つ．

証明. 定理 5 から，$\boldsymbol{\delta}^S$ は単調包ゲームのコアの要素である．また，$r \in S$ に対して $\delta_r^S = 0$ が成り立つ．このことから，定理 4 を用いることができ，導くことができる． □

5 おわりに

ネットワークなどを構築する際のコスト分担法について議論できる最小スパニングネットワークゲームの解に関する議論を行った．プレイヤーの集合が同時に要求を行うと考えたときに得られるコスト分担を，新しい要求演算の概念として定義した．新しく提案したコスト分担が，対応する単調包ゲームのコアの要素となるための十分条件を明らかにした．さらに，このことを用いて，公共点が存在するときのコアが空でないための十分条件を明らかにした．

参考文献

[1] Bird, C. G., *On cost allocation for a spanning tree: a game theoretic approach,* Networks, vol. 6, pp. 335-350 (1976).

[2] Curiel, I., Cooperative Game Theory and Applications: Cooperative Games Arising from Combinatorial Optimization Problems, Kluwer Academic Publishers, Netherlands (1997).

[3] Granot, D., M. Maschler, *Spanning network games,* International Journal of Game Theory, vol. 27, pp. 467–500 (1998).

[4] Granot, D., G. Huberman, *Minimum cost spanning tree games,* Mathematical Programming, vol. 21, pp. 1-18 (1981).

[5] Granot, D., G. Huberman, *On the core and nucleolus of minimum cost spanning tree games,* Mathematical Programming, vol. 29, pp. 323-347 (1984).

[6] Kuipers, J., *On the core of information graph games,* International Journal of Game Theory, vol. 21, pp.339–350 (1993).

[7] Kuipers, J., *Minimum cost forest games,* International Journal of Game Theory, vol. 26, pp.367–377 (1993).

[8] Tsurumi, M., T. Minamiura, T. Tanino, M. Inuiguchi, *Demand Operations in Minimum Spanning Tree Games,* Game Theory and Applications, vol. 5, pp. 142–155 (2000).