

システムの年齢を確率的にしか推定できないようなモデルにおける最適不完全修理取り替え問題のシミュレーション

瀬川良之 (Yoshiyuki SEGAWA :e-mail to segawa@kyotogakuen.ac.jp)

京都学園大学経営学部 (Faculty of Business Administration, Kyotogakuen Univ.)

1 理論的背景

瀬川・大西(2001)では, Brown and Proschan(1983)の不完全修理モデル(修理後の年齢が0もしくは故障直前の年齢に確率的に戻る:タイプA)に対して, 最適政策が閾値政策である t -政策であることを明らかにした. 更に, 瀬川(2001)ではワイブル分布下で閾値 t の値を数値的に確定した.

本報告では, Brown and Proschan(1983)の不完全修理モデルと異なる不完全修理(タイプB)も考察する. タイプBの不完全修理は修理後の年齢が一定割合 p だけ回復するものである. この修理によって年齢 x のユニットは修理直後, 年齢 $(1-p)x$ に成り稼働し始めるものとする. このフォーマットと t -政策下でのプロセスの振る舞いをワイブル分布下でシミュレートする.

また, タイプAとタイプBの修理を関連づける一方策として, 実プロセスはタイプAに従い制御はタイプBに従うようなプロセス, モデルCを考え, そのプロセスの振る舞いをシミュレートし, 最適制御の可能性について考察する.

以下, ユニットの故障率は非減少であり(IFRと呼ぶ), 保全に関わる時間は無視できるとする.

その1) ユニットの故障時の年齢が x であったときにタイプAの不完全修理を行うと, 再生確率 p でユニットの年齢は0となり稼働し始め, 確率 $1-p$ でユニットの年齢は x のまま稼働し始めるものである. このタイプの修理に対応する最適化問題(モデルA)は, 2つの不完全修理 R_1 と R_2 があり, それぞれが再生確率 p_1, p_2 と修理費用 c_1, c_2 を持つ時に, 期待時間平均費用規範の下で最適な政策を決定するものである.

その2) ユニットの故障時の年齢が x であったときタイプBの不完全修理を行うと, ユニットの年齢は $(1-p)x$ となり稼働し始める. このタイプの修理に対応する最適化問題(モデルB)は, 2つの不完全修理 R_1, R_2 があり, それぞれ年齢の割引率 p_1, p_2 と修理費用 c_1, c_2 を持つ時に, 期待時間平均費用規範の下で最適な政策を決定するものである.

その3) これら2つの問題を関連づける最適化問題(モデルC)を考える. このモデルは, モデルAのように, 2つの不完全修理 R_1 と R_2 があり, それぞれ再生確率 p_1, p_2 と修理費用 c_1, c_2 を持つが, 故障時の年齢は直接観測できず, タイプAの不完全修理を行った後の年齢の期待値としてしかその年齢を推定できないようなシステムに対して, その年齢の期待値に基づいて制御を行ったとき, 期待時間平均費用規範の下で最適な政策決定しようとするものである.

さて, モデルAでは最適政策が t -政策であることが分かっているが, モデルB及びCに対しても t -政策は最適なのだろうか.

現状で確定していることは, モデルBに対しては最適性方程式が得られるものの t -政策の最適性は示すことは出来なかった. また, モデルCに対してはいかなる政策が最適となるか証明する見通しは立つ

そこで、本報告では、モデル B に t -政策を埋め込んだプロセスの振る舞いをシミュレートした。しかし、もし、最適な t -政策が存在したとしてもその最適な切り替え年齢を特定することは出来ないため、パラメータを同じにした場合のモデル A の t の値を代用してサンプルパスとした時間平均費用の収束の様子をプロットすることとした。また、モデル C では、修理による年齢の期待値の変化はモデル B と同様の遷移をするという意味においてモデル B と類似し、真のプロセスはモデル A で完全に記述できることからモデル A に類似している。すなわち、システムの真の年齢は分からなくとも年齢の期待値が分かるような場合について、年齢の期待値によってコントロールすることの可能性を探る。そこで、修理の決定に当たっては年齢の期待値に対して t -政策を適用し、故障時の年齢の期待値が t 以下の時には修理 R_1 を、それを越える場合には修理 R_2 を施すものとする。 t の値は、パラメータを同じにしたモデル A の最適な切り替え年齢を用い、修理が終わったシステムの稼働時間の分布は、ユニットが修理直後の期待年齢から稼働し始めた時の分布に従うものとしてシミュレートすることによってサンプルパスと時間平均費用の収束の様子をプロットし考察を試みた。

以上の考察の結果、モデル A は時間平均費用の収束もよく扱いやすいモデルであることがうかがえた。しかしながら、モデル B、モデル C の順に時間平均費用の収束は不安定となり、最適な制御はより困難になることを予見させた。また、モデル B、C の時間平均費用は明らかにモデル A の最適費用より大きくなるものがうかがえた。

以下に、考察の詳細を記述する。

2 数値計算

Weibull 分布 (m : 形状パラメータ, η : 尺度パラメータ)

$$\text{信頼度関数: } Pr\{X > x\} = \bar{F}(x) = e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m};$$

$$\text{確率密度関数: } f(x) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m};$$

$$\text{平均値: } \eta\Gamma(1 + 1/m);$$

$$\text{分散: } \eta^2 \left\{ \Gamma(1 + 2/m) - \Gamma^2(1 + 1/m) \right\};$$

条件付き Weibull 分布 (ユニットが年齢 x で稼働していたという条件の下で x からの故障時間間隔の分布)

$$\text{信頼度関数: } Pr_x\{Y > y\} = \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} = e^{(x/\eta)^m - (y/\eta)^m};$$

$$\text{確率密度関数: } f(x) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{y}{\eta}\right) e^{(x/\eta)^m - (y/\eta)^m};$$

$$\text{平均値: } \frac{\eta \bar{G}(1 + 1/m, (x/\eta)^m)}{\bar{F}(x)} - x;$$

$$\text{分散: } \frac{\eta^2}{\bar{F}^2(x)} \left\{ \bar{F}(x) \bar{G}(1 + 2/m, (x/\eta)^m) - \bar{G}^2(1 + 1/m, (x/\eta)^m) \right\}.$$

(ここで $\bar{G}(a, x)$ は $\bar{G}(a, x) = \int_x^\infty e^{-t^a} t^{a-1} dt$ によって定義される不完全ガンマ関数とする)

モデル A:

最適性方程式が記述でき、以下の定理が成り立つ。

定理 1 (最適性方程式) モデル A において、もし、相対値関数と呼ばれるある有界な関数 $v(x)$ とある

定数 g が存在して

$$v(x) = \min_{i \in \{1,2\}} \left\{ c_i + p_i \left\{ \int_0^\infty v(y)f(y)dy - g \int_0^\infty \bar{F}(y)dy \right\} + \frac{1-p_i}{\bar{F}(x)} \left\{ \int_x^\infty v(y)f(y)dy - g \int_x^\infty \bar{F}(y)dy \right\} \right\}, \quad (2.1)$$

を満たすならば、故障したシステムの年齢が x であるときに、上式の右辺を最小化する決定によって構成される任意の政策 π^* は期待時間平均費用規範において最適である。□

定理 2 (最適閾値 t) モデル A における最適な切り替え年齢 t は、

$$\frac{(p_1c_2 - p_2c_1)\bar{F}^{p_2}(x) \int_0^x \bar{F}^{p_1}(y)dy}{p_2(p_2 - p_1) \int_x^\infty \bar{F}^{p_2}(y)dy} + \frac{p_1c_2 - p_2c_1}{p_1(p_2 - p_1)} \bar{F}^{p_1}(x) + \frac{c_1}{p_1} = 0 \quad (2.2)$$

の解である。□

モデル B :

次のように、最適性方程式が記述できる。

命題 1 (最適性方程式) モデル B において、もし、相対値関数と呼ばれるある有界な関数 $v(x)$ とある定数 g が存在して

$$v(x) = \min_{i \in \{1,2\}} \left\{ c_i + \frac{1}{\bar{F}((1-p_i)x)} \left\{ \int_{(1-p_i)x}^\infty v(y)f(y)dy - g \int_{(1-p_i)x}^\infty \bar{F}(y)dy \right\} \right\}, \quad (2.3)$$

を満たすならば、故障したシステムの年齢が x であるときに、上式の右辺を最小化する決定によって構成される任意の政策 π^* は期待時間平均費用規範において最適である。□

モデル C :

時刻 T_0 で年齢 0 から稼働し始めたシステムが、時刻 T_1, T_2, \dots, T_n にて故障し、タイプ A の不完全修理 $R_{a_1}, R_{a_2}, \dots, R_{a_n}$ を施したとすると、取りうるシステムの年齢の構成は $\mathbf{T}^{(n)} = (T_n, T_n - T_1, T_n - T_2, \dots, T_n - T_{n-1}, 0, 0, \dots)$ であり、それに対応する確率分布は $\boldsymbol{\rho}^{(n)} = (\rho_1^{(n)}, \rho_2^{(n)}, \dots, \rho_n^{(n)}, 0, 0, \dots)$ で表されるものとする。ここで $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ は修理 R_1 もしくは R_2 を表すインデックスとする。このとき、

$$(\rho_1^{(n)}, \rho_2^{(n)}, \dots, \rho_n^{(n)}, 0, 0, \dots) = ((1-p_{a_n})\rho_1^{(n-1)}, (1-p_{a_n})\rho_2^{(n-1)}, \dots, (1-p_{a_n})\rho_{n-1}^{(n-1)}, p_{a_n}, 0, 0, \dots) \quad (2.4)$$

が成り立つ。よって、 T_n における故障直前の年齢の期待値 $\bar{X}_n^{(-)}$ と故障による保全を行った直後の年齢の期待値 $\bar{X}_n^{(+)}$ の関係は

$$\begin{aligned} \bar{X}_n^{(+)} &= \rho_1^{(n)}T_n + \rho_2^{(n)}(T_n - T_1) + \dots + \rho_n^{(n)}(T_n - T_{n-1}) + \rho_n^{(n)}0 \\ &= (1-p_{a_n})\rho_1^{(n-1)}T_n + \dots + (1-p_{a_n})\rho_n^{(n-1)}(T_n - T_{n-2}) + (1-p_{a_n})\rho_{n-1}^{(n-1)}(T_n - T_{n-1}) \\ &= (1-p_{a_n})\{\rho_1^{(n-1)}T_n + \dots + \rho_{n-1}^{(n-1)}(T_n - T_{n-1})\} \\ &= (1-p_{a_n})\bar{X}_n^{(-)} \end{aligned}$$

であり、また、

$$\bar{X}_n^{(-)} = \bar{X}_{n-1}^{(+)} + (T_n - T_{n-1}) \quad (2.6)$$

の関係が成り立つ。

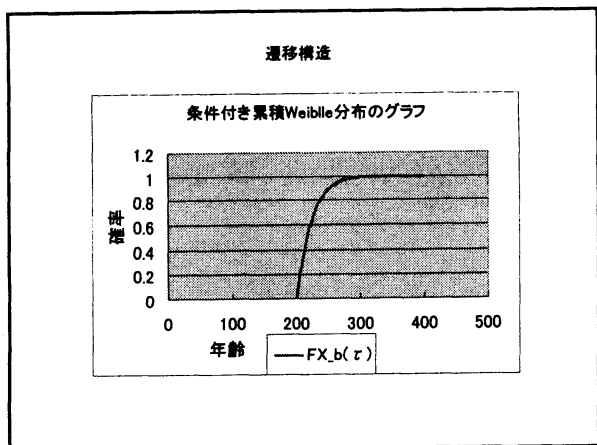
制御は $\bar{X}_n^{(-)}$ に基づいて行われ、シミュレーションに当たって T_1, \dots, T_{n-1} が与えられたとき、次の故障までの時間 $T_n - T_{n-1}$ の分布は、ユニットの年齢が $\bar{X}_{n-1}^{(+)}$ から稼働し始めた場合のモデル B のプロセスの時間分布を用いた。

参考文献

- [1] Brown, M. and Proschan, F., "Imperfect Repair", *Journal of Applied Probability*, Vol.20, pp.851-859, (1983).
- [2] Ohnishi, M., "Optimal Minimal-Repair and Replacement Problem under Average Cost Criterion: Optimality of (t, T) -Policy", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.40, pp.373-389, (1997).
- [3] Phelps, R. I., "Optimal Policy for Minimal Repair", *Journal of the Operations Research Society*, Vol.34, No.5, pp.425-427, (1983).
- [4] Ross, S. M., "Average Cost Semi-Markov Decision Processes", *Journal of Applied Probability*, Vol.7, pp.649-656, (1970).
- [5] Segawa, Y., Ohnishi, M. and Ibaraki, T., "Optimal Minimal-Repair and Replacement Problem with Age Dependent Cost Structure". *Computers Math. Applic.*, Vol.24, No.1/2, pp.91-101, (1992).
- [6] Segawa, Y. and Ohnishi, M., "The Average Optimality of a Repair-Limit Replacement Policy", *Mathematical and Computer Modeling* 31, pp.327-334, (2000).
- [7] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. "Multivariate Imperfect Repair", *Operations Research Society of America*, Vol.34, No. 3, pp.437-448, (1986).
- [8] 瀬川良之, 大西匡光, 「年齢不完全修理問題における t -政策の最適性-小修理を含まない場合について-」, 京都学園大学経営学部論集第 11 巻第 1 号, pp.95-116, (2001).
- [9] 瀬川良之, 「最適 t -政策の数値例 (ワイブル分布下での不完全修理問題について-小修理を含まない場合-)」, 数理解析研究所講究録 1241 「数理最適化の理論とアルゴリズム」, pp.196-204, (2001).

付録 シミュレーション結果

・パラメータの設定

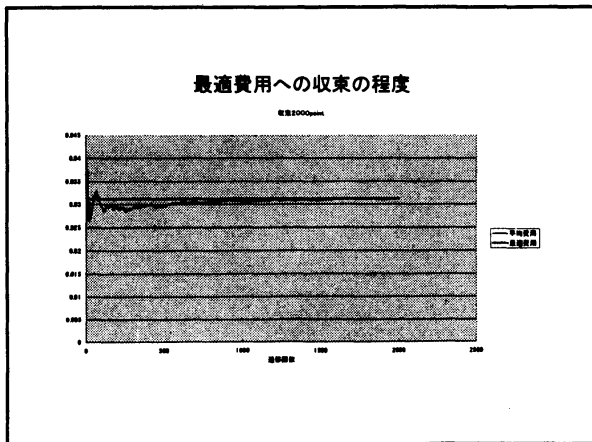
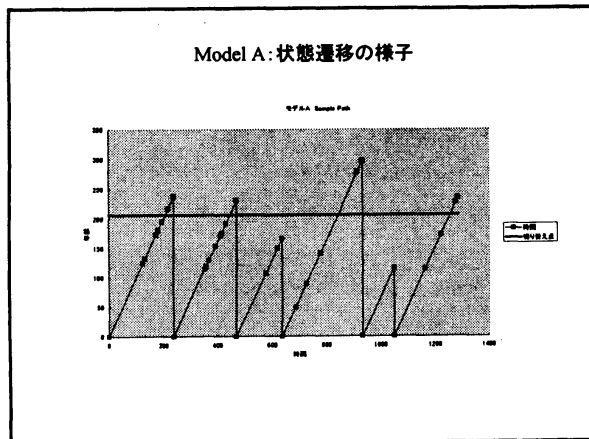
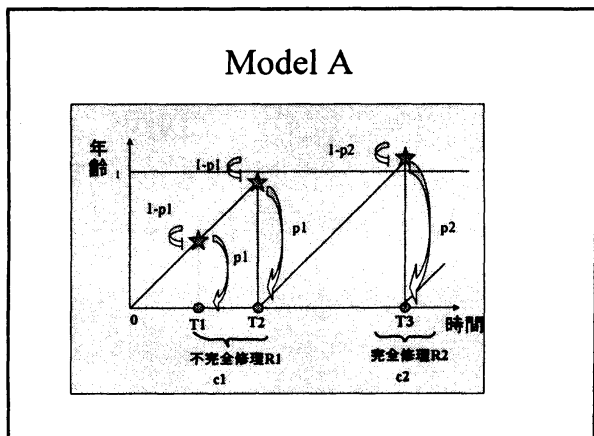


パラメータの説明

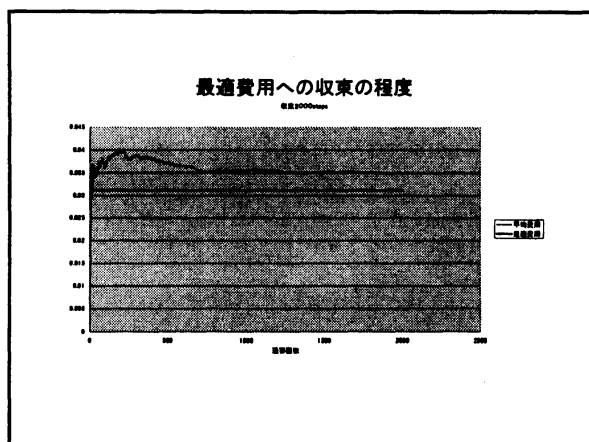
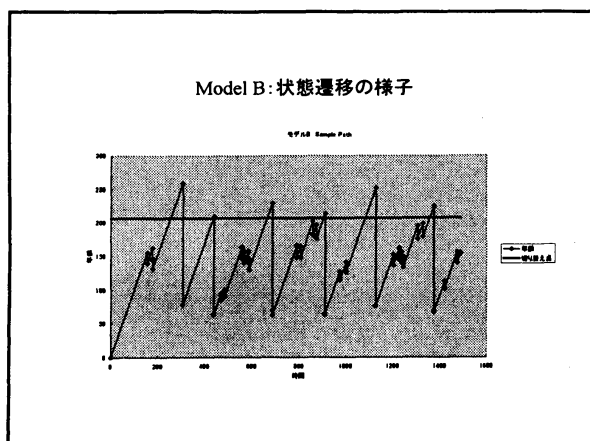
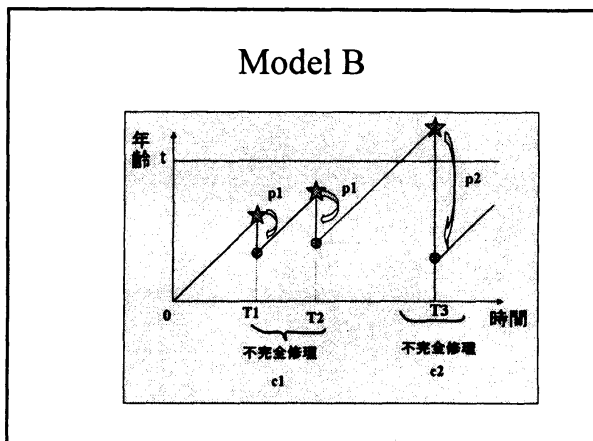
切り替え点	206.89126	m=	2.000
最適費用	0.0312753	eta=	100.000
繰り返し回数	2000	p1=	0.100
数値計算費用	0.0390314	p2=	0.700
		c1=	1.000
		c2=	3.000

Weibull分布のパラメータ
 m: 形状パラメータ
 eta: 尺度パラメータ
 シミュレーションのパラメータ
 p1: 不完全修理の再生確率
 p2: 完全修理の再生確率
 c1: 不完全修理の費用
 c2: 完全修理の費用

・モデル A の振る舞い



・モデル B の振る舞い



・モデル C の振る舞い

