数理解析研究所講究録 1298 巻 2002 年 1-6

$C(X)$ 上の荷重合成作用素に関する幾つかの量について

信州大学 理学部　髙木 啓行 (Hiroyuki Takagi)
Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science,
Shinshu University
山形大学 工学部　三浦 毅 (Takeshi Miura)
山形大学 工学部　髙橋 眞映 (Sin-Ei Takahasi)
Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics,
Yamagata University

作用素論の中で 合成作用素の研究が 注目をあびている. この講演では, $C(X)$ 上の荷重合成作用素 $uC_\varphi : f \mapsto u\cdot(f\circ\varphi)$ について, 2 つの量

本質ノルム　と　Hyers-Ulam stability の定数

が, 集合 $\varphi\big(\{x\in X : |u(x)|\geq r\}\big)$ $(r>0)$ を用いて表現できることを, 報告する.

§1. $C(X)$ 上の荷重合成作用素

X を コンパクト Hausdorff 空間とし, X 上の連続関数全体からなる Banach 空間 (sup ノルム) を, $C(X)$ で表す. いま, $C(X)$ の元 u をとる. また, φ は, X から X への写像で, 集合 $\{x\in X : u(x)\neq 0\}$ 上で連続なものとする. この u と φ を用いて, $C(X)$ 上の作用素 uC_φ を,

$$(uC_\varphi f)(x) = u(x)\,f(\varphi(x)) \qquad (x\in X,\ f\in C(X))$$

と定義する. すると, uC_φ は, $C(X)$ から $C(X)$ への有界線形作用素で, $\|uC_\varphi\| = \|u\|$ となる. uC_φ は, $C(X)$ 上の**荷重合成作用素** (weighted composition operator) と呼ばれる. とくに, u が 定数関数 1 の場合, $uC_\varphi = C_\varphi : f\mapsto f\circ\varphi$ は, **合成作用素** (composition operator) と呼ばれる. 他方, φ が X の恒等写像の場合は, よく知られた**積作用素** (multiplication operator) $uC_\varphi = M_u : f\mapsto u\cdot f$ である. これらの作用素の研究経過は, 本 [4] に詳しい.

[1] 本質ノルム　A を Banach 空間とし, T を A 上の有界線形作用素とする. A 上のコンパクト作用素全体の集合を $\mathcal{K}$ で表すとき, T から $\mathcal{K}$ への距離

$$\|T\|_e = \inf\big\{\,\|T-S\| : S\in\mathcal{K}\,\big\}$$

を, T の**本質ノルム** (essential norm) という. 本質ノルムは, その作用素とコンパクト作用素との関連を調べるとき, 有効になる. われわれは, uC_φ の本質ノルムを 求めた.

定理 1　$C(X)$ 上の荷重合成作用素 uC_φ の本質ノルムは, 次のように与えられる.

$$\|uC_\varphi\|_e = \inf\big\{\,r>0 : \varphi\big(\{x\in X : |u(x)|\geq r\}\big)\text{ が有限集合}\,\big\}.$$

同値性 “uC_φ がコンパクト $\Longleftrightarrow$ $\|uC_\varphi\|_e = 0$” と 定理1から, 次の系が得られる.

系1 (Kamowitz [2], Singh and Summers [5]) $C(X)$ 上の荷重合成作用素 uC_φ がコンパクトになるための必要十分条件は, 次のとおりである.

任意の $r > 0$ に対して, $\varphi\big(\{x \in X : |u(x)| \geq r\}\big)$ が有限集合.

また, 定理1で u が定数関数1の場合を考えると, 次の系が得られる.

系2 $C(X)$ 上の合成作用素 C_φ の本質ノルム $\|C_\varphi\|_e$ は, 0か1のどちらかである.

系2は, C_φ が コンパクトであるかないかで, $\|C_\varphi\|_e$ が それぞれ 0, 1になることをいっている. とくに, コンパクトでないときは, $\|C_\varphi\|_e = 1 = \|C_\varphi\| = \|C_\varphi - O\|$ だから, 零作用素 O が, C_φ からもっとも近いコンパクト作用素になる.

[2] Hyers-Ulam stabilityの定数 Ulamの問題 [8] や Hyersの結果 [1] に関連した研究が, 最近 広く活発に行われている ([7] など). とくに, 論文 [3] では これらの研究を総括して, Hyers-Ulam stabilty という概念を導入している. ここでの設定で述べてみよう.

A, B を Banach 空間とし, T を A から B への写像とする. T が **Hyers-Ulam stability** をもつとは, 次の条件をみたす定数 K が 存在することである.

$\|Tf - g\| \leq \varepsilon$ である任意の $g \in T(A)$, $\varepsilon > 0$, $f \in A$ に対して,
$Tf_0 = g$ かつ $\|f - f_0\| \leq K\varepsilon$ となる $f_0 \in A$ が 存在する.

このような定数 K の下限を, T の**最良 HUS 定数**と呼び, K_T とかくことにする.

T が有界線形作用素の場合, 次の3つの命題 (i) ~ (iii) が 同値になることが 容易に確かめられる.

(i) T は Hyers-Ulam stability をもつ.
(ii) T は 開写像である (G が A の開集合 $\Rightarrow$ $T(G)$ が $T(A)$ の開集合).
(iii) T の値域は 閉集合である.

このことから, Hyers-Ulam stability が, 関数解析の重要な概念の一般化であることが わかる. つづいて, 最良HUS定数について みておこう. T の核を $\mathcal{N}(T)$ と表し, 商空間 $A/\mathcal{N}(T)$ を考える. T によって自然にみちびかれる $A/\mathcal{N}(T)$ から B への1対1の線形作用素 $\tilde{T}$:

$$\tilde{T}\,(f + \mathcal{N}(T)) = Tf \qquad (f \in A)$$

を思い起こすと, 命題 (iii) は, 次の命題 (iv) とも 同値になる.

(iv) $\tilde{T}$ の逆作用素 $\tilde{T}^{-1} : T(A) \to A/\mathcal{N}(T)$ が 有界である.

さらに, (i) ~ (iv) の同値性と同時に, 等式

$$K_T = \|\tilde{T}^{-1}\| \tag{†}$$

が得られる. これらのことは, 関数解析の開写像定理の周辺の知識があれば, 容易に確認で

ここでは, T が uC_φ の場合を考えて, 次の定理を得た.

定理 2 uC_φ を, $C(X)$ 上の荷重合成作用素とする. uC_φ が Hyers-Ulam stability をもつための必要十分条件は,

$$(*) \qquad \varphi(\{x \in X : |u(x)| \geq r\}) = \varphi(\{x \in X : u(x) \neq 0\})$$

をみたす正の定数 r が 存在することである. また, uC_φ の 最良 HUS 定数 K_{uC_φ} は, $K_{uC_\varphi} = 1/\sup\{r > 0 : r \text{ は } (*) \text{ をみたす}\}$ で 与えられる.

この定理から, 容易に 次の系が得られる.

系 3 uC_φ を $C(X)$ 上の荷重合成作用素とする. もし $u^{-1} \in C(X)$ なら, uC_φ は Hyers-Ulam stabilty をもち, $K_{uC_\varphi} \leq \|u^{-1}\|$ が成り立つ. さらに, φ が 1 対 1 ならば, $K_{uC_\varphi} = \|u^{-1}\|$ が成り立つ.

u が定数関数 1 の場合は, $u^{-1} \in C(X)$ だから, 系 3 より, $C(X)$ 上の合成作用素 C_φ は すべて Hyers-Ulam stability をもつ. また, 系 3 において, 等式 $K_{uC_\varphi} = \|u^{-1}\|$ は, φ が 1 対 1 でないと 必ずしも成り立たない. たとえば, $X = [0,1]$ とし, u と φ を,

$$u(x) = x^2 - x + \frac{5}{4}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq \frac{3}{4} \text{ のとき}) \\ 4x-3 & (\frac{3}{4} < x \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1])$$

と定めると, $K_{uC_\varphi} = \dfrac{16}{17}$, $\|u^{-1}\| = 1$ となり, $K_{uC_\varphi} \neq \|u^{-1}\|$ である.

一方, 定理 2 において, φ が恒等写像の場合を考えると, 次の系が得られる.

系 4 M_u を $C(X)$ 上の積作用素とする. M_u が Hyers-Ulam stability をもつための必要十分条件は, 集合 $\{x \in X : u(x) \neq 0\}$ がコンパクトになることである. また, M_u の最良 HUS 定数 K_{M_u} は, $K_{M_u} = 1/\inf\{|u(x)| : u(x) \neq 0\}$ で 与えられる.

§1 の内容は, [6] にまとめた. 証明等 詳細は, [6] を参照されたい.

§2. $C_b(X)$ から $C_b(Y)$ への荷重合成作用素

この節では, 定理 2 を 一般化する.

完全正則空間 X 上で有界かつ連続な関数全体からなる Banach 空間 (sup ノルム) を, $C_b(X)$ で表す. ここでは, X, Y を完全正則空間とし, 2 つの空間 $C_b(X)$, $C_b(Y)$ を考える. いま, $C_b(Y)$ の元 u をとり, $S(u) = \{y \in Y : u(y) \neq 0\}$ とおく. また, φ は, Y から X への写像で, $S(u)$ 上で連続なものとする. この u と φ を用いて, $C_b(X)$ から $C_b(Y)$ への作用素 uC_φ を,

$$(uC_\varphi f)(y) = u(y)\, f(\varphi(y)) \qquad (y \in Y,\ f \in C_b(X))$$

と定義する. すると, uC_φ は, $C_b(X)$ から $C_b(Y)$ への有界線形作用素で, $\|uC_\varphi\| = \|u\|$ となる. uC_φ は, $C_b(X)$ から $C_b(Y)$ への荷重合成作用素と呼ばれる. $X = Y$ で それがコンパクト Hausdorff 空間のときが, §1 の場合である.

定理2は, 次のように一般化できる.

定理3 uC_φ を, $C_b(X)$ から $C_b(Y)$ への荷重合成作用素とする. uC_φ が Hyers-Ulam stability をもつための必要十分条件は,

$(*)'$ $$\overline{\varphi(\{y \in Y : |u(y)| \geq r\})} \supset \varphi(\{y \in Y : u(y) \neq 0\})$$

をみたす正の定数 r が 存在することである. ここで, $\overline{}$ は, 閉包を表す. また, uC_φ の最良 HUS 定数 K_{uC_φ} は, $K_{uC_\varphi} = 1/\sup\{r > 0 : r \text{ は } (*)' \text{ をみたす}\}$ となる.

定理3は, 定理2と同じ方針で証明できるが, 念のため, 以下に証明をつけておく. 証明では, 作用素 uC_φ によってみちびかれる $C_b(X)/\mathcal{N}(uC_\varphi)$ から $C_b(Y)$ への1対1の線形作用素 $u\tilde{C}_\varphi$:

$$u\tilde{C}_\varphi(f + \mathcal{N}(uC_\varphi)) = uC_\varphi f \qquad (f \in C_b(X))$$

に着目し, 定理2の直前に注意した次の同値性 (i) ⇔ (iv) を利用する.

(i) uC_φ は Hyers-Ulam stability をもつ $\Longleftrightarrow$ (iv) $u\tilde{C}_\varphi^{-1}$ が有界である.

はじめに, 商空間 $C_b(X)/\mathcal{N}(uC_\varphi)$ におけるノルムが,

$(\star)$ $$\|f + \mathcal{N}(uC_\varphi)\| = \sup\{\,|f(x)| : x \in \varphi(S(u))\,\} \qquad (f \in C_b(X))$$

と表現できることを 示しておこう.

$(\star)$ の証明 $\alpha = \sup\{|f(x)| : x \in \varphi(S(u))\}$ とおく. 任意の $h \in \mathcal{N}(uC_\varphi)$ に対して, $h(x) = 0$ $(x \in \varphi(S(u)))$ がいえるから,

$$\alpha = \sup\{\,|f(x) + h(x)| : x \in \varphi(S(u))\,\} \leq \|f + h\|$$

である. ゆえに, $\alpha \leq \|f + \mathcal{N}(uC_\varphi)\|$ である.

逆の不等式 $\|f + \mathcal{N}(uC_\varphi)\| \leq \alpha$ を示そう. まず, X の Stone-Čech のコンパクト化を $\tilde{X}$ で表す. $\tilde{X}$ は, X を稠密に含む コンパクト Hausdorff 空間で, f は 一意的に $\tilde{X}$ 上の連続関数 $\tilde{f}$ に拡張できる. いま, 任意に $\varepsilon > 0$ をとり,

$$F = \{x \in \tilde{X} : |\tilde{f}(x)| \leq \alpha\}, \qquad G = \{x \in \tilde{X} : |\tilde{f}(x)| \geq \alpha + \varepsilon\}$$

とおく. すると, F と G は $\tilde{X}$ の閉集合で, $F \cap G = \emptyset$ だから, Urysohn の補題より,

$$0 \leq g \leq 1, \quad g(F) = \{0\}, \quad g(G) = \{1\}$$

をみたす関数 $g \in C(\tilde{X})$ が存在する. そこで, $h(x) = f(x)\,g(x)$ $(x \in X)$ とおこう. 明らかに, $h \in C_b(X)$ である. また, α の定め方より, $\varphi(S(u)) \subset F$ だから, $h(x) = 0$ $(x \in \varphi(S(u)))$ となり, $h \in \mathcal{N}(uC_\varphi)$ がわかる. 一方,

$$|f(x) - h(x)| = |f(x)|\,|1 - g(x)| \leq \begin{cases} 0 & (x \in X \cap G \text{ のとき}) \\ \alpha + \varepsilon & (x \in X \setminus G \text{ のとき}) \end{cases}$$

だから, $\|f - h\| \leq \alpha + \varepsilon$ である. よって,

$$\|f + \mathcal{N}(uC_\varphi)\| \leq \|f - h\| \leq \alpha + \varepsilon$$

となる. ここで, $\varepsilon > 0$ は任意だったから, 結果として, $\|f + \mathcal{N}(uC_\varphi)\| \leq \alpha$ を得る. こうして, $(\star)$ が示せた. □

定理3を証明しよう.

定理3の証明 [必要性] uC_φ が Hyers-Ulam stability をもつとする．すると，上で注意した同値性 (i) ⇔ (iv) から，$u\widetilde{C}_\varphi^{-1}$ は有界である．そこで，$\|u\widetilde{C}_\varphi^{-1}\| < \dfrac{1}{r}$ をみたす $r>0$ をとる．この r が $(*)'$ をみたすことを示そう．いま，反対に r が $(*)'$ をみたさないと仮定してみる．すると，元 $x_0 \in \varphi(S(u)) \setminus \overline{\varphi(\{y \in Y : |u(y)| \geq r\})}$ がとれる．ここで，X が完全正則空間であることを思い出すと，

$$0 \leq f_0 \leq 1, \quad f_0(x_0) = 1, \quad f_0(x) = 0 \ \left(x \in \overline{\varphi(\{y \in Y : |u(y)| \geq r\})}\right)$$

をみたす関数 $f_0 \in C_b(X)$ が存在する．このとき，

$$|(uC_\varphi f_0)(y)| = |u(y)|\,|f_0(\varphi(y))| \leq \begin{cases} |u(y)| \cdot 0 = 0 & (\,|u(y)| \geq r \text{ のとき}) \\ r \cdot |f_0(\varphi(y))| \leq r & (\,|u(y)| < r \text{ のとき}) \end{cases}$$

だから，$\|uC_\varphi f_0\| \leq r$ となる．よって，$(\star)$ を使うと，

$$\begin{aligned} 1 &= |f_0(x_0)| \leq \sup\{\,|f_0(x)| : x \in \varphi(S(u))\,\} \\ &= \|f_0 + \mathcal{N}(uC_\varphi)\| = \|u\widetilde{C}_\varphi^{-1}(uC_\varphi f_0)\| \leq \|u\widetilde{C}_\varphi^{-1}\|\,\|uC_\varphi f_0\| \\ &< \frac{1}{r} \cdot r = 1 \end{aligned}$$

となり，矛盾が生じた．ゆえに，r は $(*)'$ をみたすことになる．こうして，必要性が示せた．この証明では，$\|u\widetilde{C}_\varphi^{-1}\| < \dfrac{1}{r}$ をみたす任意の $r>0$ が，$(*)'$ をみたすことが示せているから，$R = \sup\{\,r>0 : r \text{ は } (*)' \text{ をみたす}\,\}$ とおくと，$\dfrac{1}{R} \leq \|u\widetilde{C}_\varphi^{-1}\|$ が成り立つ．

[十分性] $(*)'$ をみたす $r>0$ が存在したとする．このとき，任意の $f \in C_b(X)$ に対して，$(\star)$ より，

$$\begin{aligned} \|f + \mathcal{N}(uC_\varphi)\| &= \sup\{\,|f(x)| : x \in \varphi(S(u))\,\} \\ &\leq \sup\left\{\,|f(x)| : x \in \overline{\varphi(\{y \in Y : |u(y)| \geq r\})}\,\right\} \\ &= \sup\left\{\,|f(x)| : x \in \varphi(\{y \in Y : |u(y)| \geq r\})\,\right\} \\ &= \sup\{\,|f(\varphi(y))| : |u(y)| \geq r\,\} \\ &= \sup\left\{\frac{1}{|u(y)|}|(uC_\varphi f)(y)| : |u(y)| \geq r\right\} \\ &\leq \frac{1}{r}\sup\{\,|(uC_\varphi f)(y)| : |u(y)| \geq r\,\} \\ &\leq \frac{1}{r}\,\|uC_\varphi f\| \end{aligned}$$

となる．よって，$u\widetilde{C}_\varphi^{-1}$ は有界で，$\|u\widetilde{C}_\varphi^{-1}\| \leq \dfrac{1}{r}$ となる．したがって，同値性 (i) ⇔ (iv) から，uC_φ は Hyers-Ulam stability をもつ．こうして，十分性も示せた．いまの証明では，$r>0$ は $(*)'$ をみたす数なら何でもよいから，$\|u\widetilde{C}_\varphi^{-1}\| \leq \dfrac{1}{R}$ が成り立つ．よって，必要性の証明の最後の不等式とあわせて，$\|u\widetilde{C}_\varphi^{-1}\| = \dfrac{1}{R}$ となる．ゆえに，(†) から，$K_{uC_\varphi} = \dfrac{1}{R}$ となる． □

定理3において，$X=Y$ かつ それがコンパクト Hausdorff 空間の場合を考えてみよう．u の連続性から，集合 $\{x \in X : |u(x)| \geq r\}$ は 閉集合 それゆえ コンパクト集合で，明らかに $\{x \in X : u(x) \neq 0\}$ に含まれるから，φ の連続性から，$\varphi\left(\{x \in X : |u(x)| \geq r\}\right)$ は コンパクト集合であり，

$$\overline{\varphi\left(\{x \in X : |u(x)| \geq r\}\right)} = \varphi\left(\{x \in X : |u(x)| \geq r\}\right)$$

となる．また，

$$\varphi\left(\{x \in X : |u(x)| \geq r\}\right) \subset \varphi\left(\{x \in X : u(x) \neq 0\}\right)$$

は つねに成り立つから，$(*)'$ と $(*)$ は同値になる．こうして，定理3の特別な場合として，定理2がみちびけた．

参考文献

[1] D.H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **27** (1941), 222–224.

[2] H. Kamowitz, *Compact weighted endomorphisms of* $C(X)$, Proc. Amer. Math. Soc., **83** (1981), 517–521.

[3] T.Miura, S.Miyajima and S.-E.Takahasi, *Hyers-Ulam stability of linear differential operator with constant coefficients, to appear in* Math. Nachr.

[4] R.K. Singh and J.S. Manhas, "Composition Operators on Function Spaces," North-Holland, 1993.

[5] R.K. Singh and W.H. Summers, *Compact and weakly compact composition operators on space of vector valued continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **99** (1987), 667–670.

[6] H. Takagi, T. Miura and S.-E. Takahasi, *Essential norm and stability constant of weighted composition operators on* $C(X)$, *submitted.*

[7] S.-E. Takahasi T. Miura and S. Miyajima, *On the Hyers-Ulam stability of the Banach space-valued differential equation* $y' = \lambda y$, Bull. Korean Math. Soc., **39** (2002), 309–315.

[8] S.M. Ulam, "Problems in Modern Mathematics," Chap. IV, Science eds, Wiley, 1964.