数理解析研究所講究録 1298 巻 2002 年 110-122

Convergence Theorems for Nonexpansive Mappings and Monotone Mappings with Applications

Hideaki Iiduka (飯塚　秀明), Wataru Takahashi (高橋　渉)
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology
(東京工業大学大学院　情報理工学研究科)

1　はじめに

H を Hilbert 空間とし, C を H の閉凸集合としたとき, C から H への写像 A が monotone であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\langle x-y, Ax-Ay\rangle \geq 0$$

が成り立つときをいう. A の変分不等式問題とは,

$$\langle v-u, Au\rangle \geq 0, \quad \forall v \in C$$

となる $u \in C$ を見つけることである. A の変分不等式の解集合を $VI(C, A)$ で表すことにする. ここで, 変分不等式問題と不動点問題との関係を述べる. T を C から C への写像とし, I を H 上の恒等写像とする. $A=I-T$ とすれば,

$$F(T)=VI(C, A)$$

となる. ただし, $F(T)$ は T の不動点集合である. このことから変分不等式問題と不動点問題には密接な関係があることがわかる.

C から H への写像 A が inverse-strongly-monotone であるとは,

$$\langle x-y, Ax-Ay\rangle \geq \alpha\|Ax-Ay\|^{2}, \quad \forall x, y \in C$$

となる非負な実数 α が存在するときをいう [5]-[12]. このとき, A を α-inverse-strongly-monotone と呼ぶことにする. C から C への写像 S が nonexpansive [21] であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Sx-Sy\| \leq \|x-y\|$$

が成り立つときをいう. C から H への写像 S が nonexpansive であるとき, S を nonself-nonexpansive と呼ぶことにする.

ここで Stampacchia [2] によって証明された定理を紹介する.

定理 1.1. C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする. A を H から H への η-strongly monotone で κ-Lipschitz continuous 写像とする. $n=1,2,\ldots$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A x_n) \end{cases}$$

で定義する. ただし, $\lambda \in (0, \frac{2\eta}{\kappa^2})$ を満たすものとする. このとき, $\{x_n\}$ は $VI(C,A)$ の元に強収束する.

次に Gol'shtein [6, 7] によって証明された有限次元空間での inverse-strongly-monotone 写像に関する収束定理を述べる.

定理 1.2. $\mathbf{R}^N$ を N 次元 Euclid 空間とする. A を $\mathbf{R}^N$ から $\mathbf{R}^N$ への α-inverse-strongly-monotone 写像とする. $n=1,2,\ldots$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = x \in \mathbf{R}^N, \\ x_{n+1} = x_n - \lambda_n A x_n \end{cases}$$

で定義する. ただし, $\{\lambda_n\} \subset [a,b] \subset (0, 2\alpha)$ を満たすものとする. このとき, $A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば, $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元に強収束する.

飯塚 - 高橋 - 豊田 [10] は Gol'shtein の定理 (定理 1.2) を拡張して, 次の Hilbert 空間での inverse-strongly-monotone 写像に関する弱収束定理を証明した.

定理 1.3. C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする. A を C から H への α-inverse-strongly-monotone 写像とする. $n=1,2,\ldots$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) P_C(x_n - \lambda_n A x_n) \end{cases}$$

で定義する. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,a] \subset [0,1)$ と $\{\lambda_n\} \subset [b,c] \subset (0,2\alpha)$ を満たすものとする. このとき, $VI(C,A) \neq \emptyset$ であるならば, $\{x_n\}$ は $VI(C,A)$ の元 z に弱収束する. ここで, $z = \lim_{n\to\infty} P_{VI(C,A)} x_n$ である.

さらに高橋 - 豊田 [22] は nonexpansive 写像の不動点近似と inverse-strongly-monotone 写像の変分不等式の解の近似を同時に考えるような次の弱収束定理を証明した.

定理 1.4. C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする. A を C から H への α-inverse-strongly-monotone 写像とし, S を C から C への nonexpansive 写像とする. $n=1,2,\ldots$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) S P_C(x_n - \lambda_n A x_n) \end{cases}$$

で定義する. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [a,b] \subset (0,1)$ と $\{\lambda_n\} \subset [c,d] \subset (0,2\alpha)$ を満たすものとする. このとき, $F(S) \cap VI(C,A) \neq \emptyset$ であるならば, $\{x_n\}$ は $F(S) \cap VI(C,A)$ の元 z に弱収束する. ここで, $z = \lim_{n\to\infty} P_{F(S)\cap VI(C,A)} x_n$ である.

この定理は山田 [23] によって証明された次の定理と関係がある.

定理 1.5. H を Hilbert 空間 H とする. A を H から H への η-strongly monotone で κ-Lipschitz continuous 写像とし, S を H から H への nonexpansive 写像とする. $n = 1, 2, \dots$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \\ x_{n+1} = Sx_n - \lambda\alpha_n A(Sx_n) \end{cases}$$

で定義する. ただし, $\{\alpha_n\} \subset (0,1]$ と λ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}^2} = 0, \quad \lambda \in (0, \frac{2\eta}{\kappa^2})$$

を満たすものとする. このとき, $F(S) \neq \emptyset$ であるならば, $\{x_n\}$ は $VI(F(S), A)$ の元に強収束する.

山田は写像の条件を強めて強収束定理を証明し, 高橋 - 豊田は写像の条件を弱めて弱収束定理を証明したのである.

本研究では, まず初めに Hilbert 空間での nonexpansive 写像の不動点集合と inverse-strongly-monotone 写像の変分不等式の解集合との共通要素を求める点列的近似法を導入し, そのあと点列が二つの集合の共通要素に強収束することを述べる. この結果から, nonexpansive 写像と strictly pseudocontractive 写像の共通不動点を求める点列的近似法を考える. 次に nonexpansive 写像の不動点集合と inverse-strongly-monotone 写像のゼロ点集合との共通要素を求める点列的近似法を考察し, さらに閉凸集合と連続 Fréchet 微分可能な凸汎関数の勾配のゼロ点集合との共通要素を求める点列的近似法を取り扱う.

この研究ではまた Hilbert 空間での nonself-nonexpansive 写像の不動点集合と inverse-strongly-monotone 写像の変分不等式の解集合との共通要素を求める点列的近似法を導入し, そのあと点列が二つの集合の共通要素に強収束することを証明する. この結果から, nonself-nonexpansive 写像と strictly pseudocontractive 写像の共通不動点を求める点列的近似法を得る. この結果は松下 - 黒岩 [13] によって証明された結果の一般化でもある.

2 準備

H を Hilbert 空間とし, その内積とノルムをそれぞれ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と $\|\cdot\|$ で表すことにする. C を H の閉凸集合とする. H から C の上への距離射影を $P_C(\cdot)$ で表すと, 任意の C の元 x に対して $z = P_C x$ であることと, $\langle x - z, z - y\rangle \geq 0$ が $y \in C$ に対して成り立つことは同値である. 変分不等式問題に関連させると, $u \in VI(C, A)$ であることと, 任意の $\lambda > 0$ に対して $u = P_C(u - \lambda Au)$ が成り立つこととが同値である. さらに, P_C は H から C への nonexpansive となり,

$$\langle x - y, P_C x - P_C y\rangle \geq \|P_C x - P_C y\|^2$$

が任意の $x, y \in H$ で成り立つことも知られている. Hilbert 空間 H は Opial 条件 [15] を満たすので, $x \neq y$ である $x, y \in H$ に対して $x_n \rightharpoonup x$ ならば

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

が成り立つ. ただし, $\rightharpoonup$ は弱収束を表すこととする.

次に inverse-strongly-monotone 写像の例をいくつか述べる. 写像 T を C から C への nonexpansive とし, I を H 上の恒等写像とする. $A = I - T$ とすれば, A は $\frac{1}{2}$-inverse-strongly-monotone であり $VI(C, A) = F(T)$ でもある [10]. C から H への写像 A が strongly monotone であるとは, 非負な実数 η が存在して, 任意の $x, y \in C$ に対して $\langle x - y, Ax - Ay\rangle \geq \eta\|x - y\|^2$ が成り立つときをいう. このとき, A を η-strongly monotone と呼ぶことにする. また, A が κ-Lipschitz continuous であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して $\|Ax - Ay\| \leq \kappa\|x - y\|$ が成り立つときをいう. A を η-strongly monotone で κ-Lipschitz continuous とすれば, A は $\frac{\eta}{\kappa^2}$-inverse-strongly-monotone である [12]. f を H 上の連続 Fréchet 微分可能な凸汎関数とし, ∇f を f の勾配とする. ∇f が $\frac{1}{\alpha}$-Lipschitz continuous ならば, ∇f は α-inverse-strongly-monotone である [1].

A を C から H への α-inverse-strongly-monotone とするとき, 明らかに A は $\frac{1}{\alpha}$-Lipschitz continuous である. また任意の $x, y \in C$ と $\lambda > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \|(I - \lambda A)x - (I - \lambda A)y\|^2 &= \|(x - y) - \lambda(Ax - Ay)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2\lambda\langle x - y, Ax - Ay\rangle + \lambda^2\|Ax - Ay\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 + \lambda(\lambda - 2\alpha)\|Ax - Ay\|^2 \end{aligned}$$

である. よって $\lambda \leq 2\alpha$ ならば, $I - \lambda A$ は C から H への nonexpansive となる.

$T \subset H \times H$ が monotone であるとは, 任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in T$ に対して $\langle x - y, x^* - y^*\rangle \geq 0$ が成り立つときをいう. monotone 写像 T が maximal であるとは, そのグラフ $G(T) = \{(x, y) : y \in Tx\}$ が他の monotone 写像のグラフに真に含まれないことである. A を C から H への inverse-strongly-monotone とする. $v \in C$ における C の normal cone を $N_C v$ とする. ただし, $N_C v = \{w \in H : \langle v - u, w\rangle \geq 0, \forall u \in C\}$ である. ここで $T \subset H \times H$ を次のように定義する.

$$Tv = \begin{cases} Av + N_C v, & v \in C, \\ \emptyset, & v \notin C. \end{cases}$$

このとき, T は maximal monotone であり, $0 \in Tv$ となる必要十分条件は $v \in VI(C, A)$ である [16].

3 収束定理

この節では, nonexpansive 写像と inverse-strongly-monotone 写像に関する強収束定理を述べる.

定理 3.1. C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする. A を C から H への α-inverse-strongly-monotone 写像とし, S を C から C への nonexpansive 写像とする. $n = 1, 2, \ldots$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n)SP_C(x_n - \lambda_n Ax_n) \end{cases}$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ と $\{\lambda_n\} \subset [a,b] \subset (0,2\alpha)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

を満たすものとする．このとき，$F(S) \cap VI(C,A) \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $P_{F(S)\cap VI(C,A)}x$ に強収束する．

証明 $n = 1, 2, \ldots$ に対して，$y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$ とする．$u \in F(S) \cap VI(C,A)$ とする．$I - \lambda_n A$ は nonexpansive で $u = P_C(u - \lambda_n Au)$ であるから，$n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$\|y_n - u\| \leq \|x_n - u\|$$

となる．このとき，$\|x_2 - u\| \leq \|x - u\|$ となる．いま，ある $k \in \mathbf{N}$ に対して $\|x_k - u\| \leq \|x - u\|$ を仮定すると，同様に $\|x_{k+1} - u\| \leq \|x - u\|$ を示すことができる．よって，$\{x_n\}$ は有界な点列である．また，$\{y_n\}$, $\{Sy_n\}$, $\{Ax_n\}$ も有界な点列である．$I - \lambda_n A$ は nonexpansive なので，$n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - y_n\| &\leq \|(x_{n+1} - \lambda_{n+1}Ax_{n+1}) - (x_n - \lambda_{n+1}Ax_n)\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|\|Ax_n\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x_n\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|\|Ax_n\| \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

となる．よって，$n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| &\leq |\alpha_n - \alpha_{n-1}|\|x - Sy_{n-1}\| + (1 - \alpha_n)\|y_n - y_{n-1}\| \\
&\leq |\alpha_n - \alpha_{n-1}|\|x - Sy_{n-1}\| + (1 - \alpha_n)(\|x_n - x_{n-1}\| + |\lambda_n - \lambda_{n-1}|\|Ax_{n-1}\|) \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - x_{n-1}\| + M|\lambda_n - \lambda_{n-1}| + L|\alpha_n - \alpha_{n-1}|
\end{aligned}$$

となる．ただし，$L = \sup\{\|x - Sy_n\| : n \in \mathbf{N}\}$, $M = \sup\{\|Ax_n\| : n \in \mathbf{N}\}$ とする．数学的帰納法により，$n, m = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$\|x_{n+m+1} - x_{n+m}\| \leq \prod_{k=m}^{n+m-1} (1 - \alpha_{k+1})\|x_{m+1} - x_m\| + M \sum_{k=m}^{n+m-1} |\lambda_{k+1} - \lambda_k| + L \sum_{k=m}^{n+m-1} |\alpha_{k+1} - \alpha_k|$$

となる．よって，$m = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| &= \limsup_{n\to\infty} \|x_{n+m+1} - x_{n+m}\| \\
&\leq M \sum_{k=m}^{\infty} |\lambda_{k+1} - \lambda_k| + L \sum_{k=m}^{\infty} |\alpha_{k+1} - \alpha_k|
\end{aligned}$$

となる．仮定より $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$ であるから，

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| \leq 0$$

を得る．よって $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ である．(3.1) と $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$ から，$\|y_{n+1} - y_n\| \to 0$ を得る．また，$\|x_n - Sy_n\| \to 0$ を得る．$u \in F(S) \cap VI(C,A)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u\|^2 &\leq \alpha_n\|x - u\|^2 + (1 - \alpha_n)\|y_n - u\|^2 \\
&\leq \alpha_n\|x - u\|^2 + (1 - \alpha_n)\{\|x_n - u\|^2 + \lambda_n(\lambda_n - 2\alpha)\|Ax_n - Au\|^2\} \\
&\leq \alpha_n\|x - u\|^2 + \|x_n - u\|^2 + (1 - \alpha_n)a(b - 2\alpha)\|Ax_n - Au\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-(1-\alpha_n)a(b-2\alpha)\|Ax_n-Au\|^2 &\le \alpha_n\|x-u\|^2+\|x_n-u\|^2-\|x_{n+1}-u\|^2\\ &\le \alpha_n\|x-u\|^2+(\|x_n-u\|+\|x_{n+1}-u\|)\|x_n-x_{n+1}\|\end{aligned}$$

を得る. そこで, $\alpha_n \to 0$ と $\|x_{n+1}-x_n\| \to 0$ から, $\|Ax_n-Au\| \to 0$ を得る. また,

$$\begin{aligned}\|y_n-u\|^2 &\le \langle (x_n-\lambda_n Ax_n)-(u-\lambda_n Au), y_n-u\rangle\\ &\le \frac{1}{2}\{\|x_n-u\|^2+\|y_n-u\|^2-\|x_n-y_n\|^2\\ &\quad +2\lambda_n\langle x_n-y_n, Ax_n-Au\rangle-\lambda_n^2\|Ax_n-Au\|^2\}\end{aligned}$$

であることより

$$\|y_n-u\|^2 \le \|x_n-u\|^2-\|x_n-y_n\|^2+2\lambda_n\langle x_n-y_n, Ax_n-Au\rangle-\lambda_n^2\|Ax_n-Au\|^2$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u\|^2 &\le \alpha_n\|x-u\|^2+(1-\alpha_n)\|y_n-u\|^2\\ &\le \alpha_n\|x-u\|^2+\|x_n-u\|^2-(1-\alpha_n)\|x_n-y_n\|^2\\ &\quad +2(1-\alpha_n)\lambda_n\langle x_n-y_n, Ax_n-Au\rangle-(1-\alpha_n)\lambda_n^2\|Ax_n-Au\|^2\end{aligned}$$

となる. そこで, $\alpha_n \to 0$, $\|x_{n+1}-x_n\| \to 0$, $\|Ax_n-Au\| \to 0$ から, $\|x_n-y_n\| \to 0$ を得る. $\|Sy_n-y_n\| \le \|Sy_n-x_n\|+\|x_n-y_n\|$ なので, $\|Sy_n-y_n\| \to 0$ を得る. 次に

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x-z_0, Sy_n-z_0\rangle \le 0$$

を示す. ただし, $z_0 = P_{F(S)\cap VI(C,A)}x$ とする. このことを示すために,

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x-z_0, Sy_n-z_0\rangle = \lim_{i\to\infty}\langle x-z_0, Sy_{n_i}-z_0\rangle$$

となる $\{y_n\}$ の部分列 $\{y_{n_i}\}$ を選ぶ. $\{y_{n_i}\}$ は有界だから, 弱収束する部分列 $\{y_{n_{i_j}}\}$ をもつ. 一般性を失うことなしで $y_{n_i} \rightharpoonup z$ と仮定できる. $\|Sy_n-y_n\| \to 0$ なので, $Sy_{n_i} \rightharpoonup z$ を得る. このとき, $z \in F(S)\cap VI(C,A)$ を得ることができる. 実際, 初めに $z \in VI(C,A)$ を示す. $T \subset H\times H$ を次のように定義する.

$$Tv = \begin{cases} Av+N_C v, & v \in C,\\ \emptyset, & v \notin C.\end{cases}$$

$(v,w) \in G(T)$ とする. $w-Av \in N_C v$, $y_n \in C$ なので, $\langle v-y_n, w-Av\rangle \ge 0$ を得る. 一方, $y_n = P_C(x_n-\lambda_n Ax_n)$ から, $\langle v-y_n, y_n-(x_n-\lambda_n Ax_n)\rangle \ge 0$ となり

$$\langle v-y_n, \frac{y_n-x_n}{\lambda_n}+Ax_n\rangle \ge 0$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}\langle v-y_{n_i}, w\rangle &\ge \langle v-y_{n_i}, Av\rangle\\ &\ge \langle v-y_{n_i}, Av\rangle-\langle v-y_{n_i}, \frac{y_{n_i}-x_{n_i}}{\lambda_{n_i}}+Ax_{n_i}\rangle\\ &\ge \langle v-y_{n_i}, Ay_{n_i}-Ax_{n_i}\rangle-\langle v-y_{n_i}, \frac{y_{n_i}-x_{n_i}}{\lambda_{n_i}}\rangle\end{aligned}$$

となる．これより $\langle v - z, w\rangle \geq 0$ を得る．ここで，T は maximal monotone であるから，$z \in T^{-1}0$ となり $z \in VI(C, A)$ を得る．$z \in F(S)$ を示す．$z \notin F(S)$ と仮定する．Opial 条件から，

$$\begin{aligned}
\liminf_{i\to\infty} \|y_{n_i} - z\| &< \liminf_{i\to\infty} \|y_{n_i} - Sz\| \\
&\leq \liminf_{i\to\infty} \|y_{n_i} - z\|
\end{aligned}$$

となり，矛盾を得る．それゆえ，$z \in F(S)$ を得る．このとき，

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\langle x - z_0, Sy_n - z_0\rangle &= \lim_{i\to\infty}\langle x - z_0, Sy_{n_i} - z_0\rangle \\
&= \langle x - z_0, z - z_0\rangle \leq 0
\end{aligned}$$

である．そこで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $m \in \mathbf{N}$ が存在して，$n \geq m$ ならば

$$\langle x - z_0, Sy_n - z_0\rangle \leq \varepsilon, \quad \alpha_n\|x - z_0\|^2 \leq \varepsilon$$

となるようにできる．いま，$n \geq m$ とすると

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - z_0\|^2 &= \alpha_n^2\|x - z_0\|^2 + 2\alpha_n(1-\alpha_n)\langle x - z_0, Sy_n - z_0\rangle \\
&\quad +(1-\alpha_n)^2\|Sy_n - z_0\|^2 \\
&\leq 3\varepsilon(1 - (1-\alpha_n)) + (1-\alpha_n)\|x_n - z_0\|^2
\end{aligned}$$

である．数学的帰納法により，

$$\|x_{n+1} - z_0\|^2 \leq 3\varepsilon(1 - \prod_{k=m}^{n}(1-\alpha_k)) + \prod_{k=m}^{n}(1-\alpha_k)\|x_m - z_0\|^2$$

を得る．よって

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_{n+1} - z_0\|^2 \leq 3\varepsilon$$

である．$\varepsilon > 0$ は任意なので，$\limsup_{n\to\infty}\|x_{n+1} - z_0\|^2 \leq 0$ となり，$x_n \to z_0$ を得る．■

定理 3.1 の直接的な結果として，次の系が挙げられる．

系 3.2. C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする．A を C から H への α-inverse-strongly-monotone 写像とする．$n = 1, 2, \ldots$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases}
x_1 = x \in C, \\
x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)P_C(x_n - \lambda_n Ax_n)
\end{cases}$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1)$ と $\{\lambda_n\} \subset [a, b] \subset (0, 2\alpha)$ は

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

を満たすものとする．このとき，$VI(C, A) \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $P_{VI(C,A)}x$ に強収束

次に nonself-nonexpansive 写像と inverse-strongly-monotone 写像に関する強収束定理を述べる.

この定理を証明するのに, 次の補助定理を用いる [13].

補助定理 3.3. C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする. S を C から H への nonexpansive 写像とし, $F(S) \neq \emptyset$ とする. このとき, $F(S) = F(P_C S)$ である.

定理 3.4. C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする. A を C から H への α-inverse-strongly-monotone 写像とし, S を C から H への nonexpansive 写像とする. $n = 1, 2, \ldots$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_{n+1} = P_C(\alpha_n x + (1-\alpha_n) S P_C(x_n - \lambda_n A x_n)) \end{cases}$$

で定義する. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ と $\{\lambda_n\} \subset [a,b] \subset (0, 2\alpha)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

を満たすものとする. このとき, $F(S) \cap VI(C,A) \neq \emptyset$ であるならば, $\{x_n\}$ は $P_{F(S)\cap VI(C,A)} x$ に強収束する.

証明 $n = 1, 2, \ldots$ に対して, $y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n)$ とする. $u \in F(S) \cap VI(C,A)$ とする. 定理 3.1 の証明と同様にして, $n = 1, 2, \ldots$ に対して,

$$\|y_n - u\| \leq \|x_n - u\|$$

と $\{x_n\}$ の有界性がいえる. よって, $\{y_n\}$, $\{Sy_n\}$, $\{Ax_n\}$ も有界な点列である. さらに, $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ も定理 3.1 の証明と同様に証明することができる. また, $\|x_n - P_C S y_n\| \to 0$ を得る. $u \in F(S) \cap VI(C,A)$ に対して,

$$\begin{aligned} -(1-\alpha_n)a(b-2\alpha)\|Ax_n - Au\|^2 &\leq \alpha_n \|x-u\|^2 + \|x_n - u\|^2 - \|x_{n+1} - u\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|x-u\|^2 + (\|x_n - u\| + \|x_{n+1} - u\|)\|x_n - x_{n+1}\| \end{aligned}$$

を得る. そこで, $\alpha_n \to 0$ と $\|x_{n+1} - x_n\| \to 0$ から, $\|Ax_n - Au\| \to 0$ を得る. また,

$$\|y_n - u\|^2 \leq \|x_n - u\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 + 2\lambda_n \langle x_n - y_n, Ax_n - Au\rangle - \lambda_n^2 \|Ax_n - Au\|^2$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u\|^2 \leq\ & \alpha_n \|x-u\|^2 + \|x_n - u\|^2 - (1-\alpha_n)\|x_n - y_n\|^2 \\ & + 2(1-\alpha_n)\lambda_n \langle x_n - y_n, Ax_n - Au\rangle - (1-\alpha_n)\lambda_n^2 \|Ax_n - Au\|^2 \end{aligned}$$

となる. そこで, $\alpha_n \to 0$, $\|x_{n+1} - x_n\| \to 0$, $\|Ax_n - Au\| \to 0$ から, $\|x_n - y_n\| \to 0$ を得る. $\|P_C S y_n - y_n\| \leq \|P_C S y_n - x_n\| + \|x_n - y_n\|$ なので, $\|P_C S y_n - y_n\| \to 0$ を得る. 次に

$$\limsup_{n\to\infty} \langle x - z_0, x_n - z_0\rangle \leq 0$$

を示す．ただし，$z_0 = P_{F(S)\cap VI(C,A)}x$ とする．このことを示すために，

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x - z_0, x_n - z_0\rangle = \lim_{i\to\infty}\langle x - z_0, x_{n_i} - z_0\rangle$$

となる $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ を選ぶ．$\{x_{n_i}\}$ は有界だから，弱収束する部分列 $\{x_{n_{i_j}}\}$ をもつ．一般性を失うことなしで $x_{n_i} \rightharpoonup z$ と仮定できる．$\|x_n - y_n\| \to 0$ なので，$y_{n_i} \rightharpoonup z$ を得る．このとき，$z \in F(S) \cap VI(C,A)$ を得ることができる．実際，$z \in VI(C,A)$ は定理 3.1 の証明と同様にして，証明することができる．$z \in F(P_C S)$ を示す．$z \notin F(P_C S)$ と仮定する．Opial 条件から，

$$\begin{aligned}\liminf_{i\to\infty}\|y_{n_i} - z\| &< \liminf_{i\to\infty}\|y_{n_i} - P_C S z\| \\ &\leq \liminf_{i\to\infty}\|y_{n_i} - z\|\end{aligned}$$

となり，矛盾を得る．それゆえ，$z \in F(P_C S)$ を得る．ここで，補助定理 3.3 より，$z \in F(S)$ を得る．このとき，

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\langle x - z_0, x_n - z_0\rangle &= \lim_{i\to\infty}\langle x - z_0, x_{n_i} - z_0\rangle \\ &= \langle x - z_0, z - z_0\rangle \leq 0\end{aligned}$$

である．そこで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $m \in \mathbf{N}$ が存在して，$n \geq m$ ならば

$$\langle x - z_0, x_n - z_0\rangle \leq \varepsilon$$

となるようにできる．一方，

$$P_C(\alpha_n x + (1-\alpha_n)Sy_n) - P_C(\alpha_n x + (1-\alpha_n)z_0) = x_{n+1} - z_0 + \alpha_n(z_0 - x)$$

なので，

$$\begin{aligned}&\|P_C(\alpha_n x + (1-\alpha_n)Sy_n) - P_C(\alpha_n x + (1-\alpha_n)z_0)\|^2 \\ \geq\ &\|x_{n+1} - z_0\|^2 + 2\alpha_n\langle z_0 - x, x_{n+1} - z_0\rangle\end{aligned}$$

を得る．よって，$n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z_0\|^2 &\leq 2\alpha_n\langle x - z_0, x_{n+1} - z_0\rangle + (1-\alpha_n)^2\|Sy_n - z_0\|^2 \\ &\leq 2\alpha_n\langle x - z_0, x_{n+1} - z_0\rangle + (1-\alpha_n)\|x_n - z_0\|^2\end{aligned}$$

となる．いま，$n \geq m$ とすると

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z_0\|^2 &\leq 2\alpha_n\varepsilon + (1-\alpha_n)\|x_n - z_0\|^2 \\ &= 2\varepsilon(1 - (1-\alpha_n)) + (1-\alpha_n)\|x_n - z_0\|^2\end{aligned}$$

である．数学的帰納法により，

$$\|x_{n+1} - z_0\|^2 \leq 2\varepsilon(1 - \prod_{k=m}^{n}(1-\alpha_k)) + \prod_{k=m}^{n}(1-\alpha_k)\|x_m - z_0\|^2$$

を得る. よって

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_{n+1} - z_0\|^2 \leq 2\varepsilon$$

である. $\varepsilon > 0$ は任意なので, $\limsup_{n\to\infty} \|x_{n+1} - z_0\|^2 \leq 0$ となり, $x_n \to z_0$ を得る. ■

4 応用

この節では, 定理 3.1 と定理 3.4 を用いて得られる Hilbert 空間での収束定理をいくつか述べる.

C から C への写像 T が strictly pseudocontractive であるとは, $0 \leq k < 1$ となる k が存在して, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k\|(I - T)x - (I - T)y\|^2$$

が成り立つときをいう. $k = 0$ ならば, T は nonexpansive となる. $A = I - T$ とすれば, A は $\frac{1-k}{2}$-inverse-strongly-monotone である [5].

まず初めに, 定理 3.1 を用いて nonexpansive 写像と strictly pseudocontractive 写像の共通不動点を求める点列的近似法を証明する.

定理 4.1. C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする. S を C から C への nonexpansive 写像とし, T を C から C への k-strictly pseudocontractive 写像とする. $n = 1, 2, \ldots$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n)S((1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n) \end{cases}$$

で定義する. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1)$ と $\{\lambda_n\} \subset [a, b] \subset (0, 1 - k)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

を満たすものとする. このとき, $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるならば, $\{x_n\}$ は $P_{F(S)\cap F(T)}x$ に強収束する.

証明 $A = I - T$ とすると, A は $\frac{1-k}{2}$-inverse-strongly-monotone であり $F(T) = VI(C, A)$ でもある. また, $P_C(x_n - \lambda_n Ax_n) = (1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n$ となる. ここで定理 3.1 を用いれば結論を得る. ■

次に定理 3.1 を用いて, nonexpansive 写像の不動点集合と inverse-strongly-monotone 写像のゼロ点集合との共通要素を求める点列的近似法を証明する.

定理 4.2. H を Hilbert 空間とする. A を H から H への α-inverse-strongly-monotone 写像とし, S を H から H への nonexpansive 写像とする. $n = 1, 2, \ldots$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n)S(x_n - \lambda_n Ax_n) \end{cases}$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ と $\{\lambda_n\} \subset [a,b] \subset (0,2\alpha)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

を満たすものとする．このとき，$F(S) \cap A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $P_{F(S)\cap A^{-1}0}x$ に強収束する．

証明 $A^{-1}0 = VI(H, A)$ となる．$P_H = I$ とおき，定理 3.1 を用いれば結論を得る．■

さらに定理 3.1 を用いて，閉凸集合と連続 Fréchet 微分可能な凸汎関数の勾配のゼロ点集合との共通要素を求める点列的近似法を証明する．

定理 4.3. C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする．f を H 上の連続 Fréchet 微分可能な凸汎関数とし，∇f を f の勾配とする．∇f は $\frac{1}{\alpha}$-Lipschitz continuous であるとする．$n = 1, 2, \ldots$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) P_C(x_n - \lambda_n \nabla f(x_n)) \end{cases}$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ と $\{\lambda_n\} \subset [a,b] \subset (0,2\alpha)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

を満たすものとする．このとき，$C \cap (\nabla f)^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば，$\{x_n\}$ は $P_{C\cap(\nabla f)^{-1}0}x$ に強収束する．

証明 [1] から ∇f は α-inverse-strongly-monotone であり $(\nabla f)^{-1}0 = VI(H, \nabla f)$ でもある．また，$C = F(P_C)$ となる．ここで定理 3.1 を用いれば結論を得る．■

最後に定理 3.4 を用いて，nonself-nonexpansive 写像と strictly pseudocontractive 写像の共通不動点を求める点列的近似法を証明する．

定理 4.4. C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする．S を C から H への nonexpansive 写像とし，T を C から C への k-strictly pseudocontractive 写像とする．$n = 1, 2, \ldots$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_{n+1} = P_C(\alpha_n x + (1 - \alpha_n) S((1 - \lambda_n) x_n + \lambda_n T x_n)) \end{cases}$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ と $\{\lambda_n\} \subset [a,b] \subset (0,1-k)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

を満たすものとする．このとき，$F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $P_{F(S)\cap F(T)}x$ に強収

証明 $A = I - T$ とすると, A は $\frac{1-k}{2}$-inverse-strongly-monotone であり $F(T) = VI(C, A)$ でもある. また, $P_C(x_n - \lambda_n Ax_n) = (1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n$ となる. ここで定理 3.4 を用いれば結論を得る. ■

定理 3.4 の直接的な結果として, nonself-nonexpansive 写像の不動点を求める点列的近似法が証明できる.

定理 4.5. C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする. S を C から H への nonexpansive 写像とする. $n = 1, 2, \ldots$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_{n+1} = P_C(\alpha_n x + (1 - \alpha_n)Sx_n) \end{cases}$$

で定義する. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$$

を満たすものとする. このとき, $F(S) \neq \emptyset$ であるならば, $\{x_n\}$ は $P_{F(S)}x$ に強収束する.

証明 任意の $x \in C$ に対して $Ax = 0$ とすると, A は inverse-strongly-monotone であり $C = VI(C, A)$ でもある. また, $SP_C(x_n - \lambda_n Ax_n) = Sx_n$ となる. ここで定理 3.4 を用いれば結論を得る. ■

参考文献

[1] J. B. Baillon and G. Haddad, *Quelques propriétés des opérateurs angle-bornés et n-cycliquement monotones*, Israel J. Math. **26** (1977), 137-150.

[2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Editeur, Paris, 1983.

[3] F. E. Browder, *Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 780-785.

[4] F. E. Browder, *The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces*, Math. Ann. **177** (1968), 283-301.

[5] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), 197-228.

[6] E. G. Gol'shtein, *The modification method for monotone mappings*, Economics and Math. Methods **11** (6), 1144-1159 (in Russian).

[7] E. G. Gol'shtein and N. V. Tret'yakov, *Modified lagrangians in convex programming and their generalizations*, Math. Prog. Study **10** (1979), 86-97.

[8] B. R. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957-961.

[9] H. Iiduka and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings*, to appear.

[10] H. Iiduka, W. Takahashi and M. Toyoda, *Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings*, to appear.

[11] J. L. Lions and G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 493-517.

[12] F. Liu and M. Z. Nashed, *Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates*, Set-Valued Anal. **6** (1998), 313-344.

[13] S. Matsushita and D. Kuroiwa, *Approximation of fixed points of nonexpansive nonself-mappings*, Math. Japonica, to appear.

[14] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong and weak convergence theorems by an improved splitting method*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **9** (2002), 99-107.

[15] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximation for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591-597.

[16] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75-88.

[17] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control and Optim. **14** (1976), 877-898.

[18] W. Takahashi, *Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 168-181.

[19] W. Takahashi, *Nonlinear complementarity problem and systems of convex inequalities*, J. Optim. Theory Appl. (1978), 493-508.

[20] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[21] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[22] W. Takahashi and M. Toyoda, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings*, J. Optim. Theory Appl., to appear.

[23] I. Yamada, *The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings*, Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and their Applications (Butnariu, Censor and Reich, eds.), Kluwer Academic Publishers, 2001, pp. 473-504.