数理解析研究所講究録 1301 巻 2003 年 1-12

証明可能性の論理と解釈可能性の論理における
レーブの公理の性質を用いたカット除去定理の証明

南山大学数理情報学部 佐々木克巳(Katsumi Sasaki)
Department of Mathematical Sciences,
Nanzan University

Valentini [Val83]は、証明可能性の論理 L にカットのないシークエント体系を与えた。カット除去定理の証明には 3 重帰納法が用いられ、この意味で Gentzen が LK に対して行った 2 重帰納法による証明より複雑である。一方で、様相論理 K4 は、レーブの公理を加えることで L と一致する論理であり、K4 のカット除去定理は Gentzen の用いた 2 つのパラメータによる 2 重帰納法で証明できる。[Sas01]は、K4 のカットのないシークエント体系とレーブの公理のある性質を用いて、Valentini の体系のカット除去定理の別証明を与えた。

[Sas02a]は、最小の解釈可能性の論理 IL にカットのないシークエント体系を与えた。カット除去定理の証明には、[Sas01]の方法が用いられている。すなわち、K4 の L に対する関係と同様の関係を IL に対してもつ論理 IK4 のカット除去定理が Gentzen の用いた 2 重帰納法で証明され、この体系とレーブの公理の性質を用いて、IL の体系に対するカット除去定理が証明された。

解釈可能性の論理 ILP にも、K4 と同じ役割をする論理 IK4P が存在する。[Sas02b]はこの論理にカットのないシークエント体系を与えた。証明は 2 重帰納法で行われた。ILP のシークエント体系も与えられたが、カット除去の詳細は述べられていない。

また、上記のレーブの公理の性質を用いたカット除去定理の証明は一部複雑な証明方法が用いられている。ここでは、この複雑な部分を帰納的な証明で置き換え、より整理した証明を与える。同時に、[Sas02b]の与えたシークエント体系 ILP のカット除去定理を証明する。

1. 証明可能性の論理と解釈可能性の論理

ここでは、証明可能性の論理と解釈可能性の論理、およびその部分論理を導入す

命題変数を表すために、p,q などの記号を用いる。証明可能性の論理の論理式は、命題変数と$\bot$から2項論理結合子$\wedge,\vee,\supset$と単項論理演算子$\Box$を用いて定義される。また、$\neg P$を$P\supset\bot$の省略形として用い、論理式Pの部分論理式全体の集合をSub(P)とおく。

定義 1.1. 様相論理Kは、すべてのトートロジーと公理

$\Box(p\supset q)\supset(\Box p\supset\Box q)$

をもち、モーダス・ポネンス、代入、および必然規則

$P\in K4 \quad\Rightarrow\quad \Box P\in K4$

について閉じている最小の論理式の集合である。

論理Mに対し、M∪{P}を含み、モーダス・ポネンス、代入、および次の規則

$P\in K4 \quad\Rightarrow\quad \Box P\in K4$

について閉じている最小の論理式の集合をM+P と表す。

定義 1.2.

(1) $K4=K+\Box\Box p\supset\Box p$

(2) $L=K4+L(p)$

ただし、$L(p)=\Box(\Box p\supset p)\supset\Box p$　であり、これをレーブの公理という。

解釈可能性の論理の論理式は、命題変数と$\bot$から 2 項論理結合子$\wedge,\vee,\supset,\rhd$用いて定義される。解釈可能性の論理においては、$\Box P$と$\Diamond P$をそれぞれ$\neg P\rhd\bot$と$\neg(P\rhd\bot)$の省略形として用いる。混乱のない限り、証明可能性の論理の論理式も解釈可能性の論理の論理式も単に論理式ということにする。

定義 1.3.

(1) IK4は、K4に属する論理式および4つの公理

$\Box(p\supset q)\supset p\rhd q$

$((p\rhd q)\wedge(q\rhd r))\supset(p\rhd r)$

$((p\rhd r)\wedge(q\rhd r))\supset((p\vee q)\rhd r)$

$\Diamond p\supset p$

をもち、モーダス・ポネンス、代入、必然規則について閉じている最小の論理式の集合である。

(2) $IL=IK4+L(p)$

(3) $IK4P=IK4+P$　　ただし、$P=(p\rhd q)\supset\Box(p\rhd q)$

(4) $ILP=IL4P+L(p)$

2. シークエント体系

1節で述べた論理のシークエント体系を導入する。論理式の有限集合を表すのに、Γ,Δ などのギリシア文字を用いる。とくに、Σ は $P \rhd Q$ の形の論理式の集合を表すものとする。また、

$\Box\Gamma=\{\Box P \mid P\in\Gamma\}$

$\neg\Gamma=\{\neg P \mid P\in\Gamma\}$

$\Gamma\rhd\bot=\{P\rhd\bot \mid P\in\Gamma\}$

$\Gamma_P=\Gamma-\{P\}$

とおく。

シークエントとしては $\Gamma\to\Delta$ の形のものを用いる。慣例に従って、シークエント

$$\{P_1,\cdots,P_n\}\cup\Gamma_1\cup\cdots\cup\Gamma_l\to\Delta_1\cup\cdots\cup\Delta_k\cup\{Q_1,\cdots,Q_m\}$$

を

$$P_1,\cdots,P_n,\Gamma_1,\cdots,\Gamma_l\to\Delta_1,\cdots,\Delta_k,Q_1,\cdots,Q_m$$

のようにも表す。また、

$$\mathrm{Sub}(\Gamma\to\Delta)=\bigcup_{P\in\Gamma\cup\Delta}\mathrm{Sub}(P)$$

とおき、解釈可能性の論理の論理式に対しては、さらに、

$$\mathrm{Sub}^*(P)=\mathrm{Sub}\{P\}\cup\{C\rhd D \mid C,D\in\mathrm{Sub}\{P\}\cup\{\bot\}\}\cup\{\bot\}$$

$$\mathrm{Sub}^*(\Gamma\to\Delta)=\bigcup_{P\in\Gamma\cup\Delta}\mathrm{Sub}^*(P)$$

とおく。

さて、**K4,L,IK4,IL,IK4P,ILP** の各論理に対するシークエント体系 **GK4**、**GL**、**GIK4**、**GIL**、**GIK4P**、**GILP** を導入する。

次の公理と推論規則からなる体系を **GK4** とおく。

GK4 の公理　　　$P\to P$ と $\bot\to$

GK4 の推論規則

(W 左)

$$\frac{\Gamma_P\to\Delta}{P,\Gamma_P\to\Delta}$$

(W 右)

$$\frac{\Gamma\to\Delta_P}{\Gamma\to\Delta_P,P}$$

(カット)

$$\frac{\Gamma\to\Delta,P \qquad P,\Pi\to\Lambda}{\Gamma,\Pi_P\to\Delta_P,\Lambda}$$

(∧左)

$$\frac{P, \Gamma \to \Delta}{P \wedge Q, \Gamma \to \Delta} \qquad \frac{Q, \Gamma \to \Delta}{P \wedge Q, \Gamma \to \Delta}$$

(∧右)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, P \qquad \Gamma \to \Delta, Q}{\Gamma \to \Delta, P \wedge Q}$$

(∨左)

$$\frac{P, \Gamma \to \Delta \qquad Q, \Gamma \to \Delta}{P \vee Q, \Gamma \to \Delta}$$

(∨右)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, P}{\Gamma \to \Delta, P \vee Q} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, Q}{\Gamma \to \Delta, P \vee Q}$$

(⊃左)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, P \qquad Q, \Pi \to \Lambda}{P \supset Q, \Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}$$

(⊃右)

$$\frac{P, \Gamma \to \Delta, Q}{\Gamma \to \Delta, P \supset Q}$$

($\Box_{K4}$)

$$\frac{\Box\Gamma, \Gamma \to P}{\Box\Gamma \to \Box P}$$

GL,GIK4,GIL,GIK4P,GILP は、GK4 の($\Box_{K4}$)を次の各規則で置き換えて得られる体系である。

($\Box_{L}$)

$$\frac{\Box P, \Box\Gamma, \Gamma \to P}{\Box\Gamma \to \Box P}$$

($\Box_{IK4}$)

$$\frac{P, \{Q, X_1, \cdots, X_n\} \rhd \bot \to Q, X_1, \cdots, X_n \qquad \Sigma \to Y_1 \rhd Q \qquad \cdots \qquad \Sigma \to Y_n \rhd Q}{X_1 \rhd Y_1, \cdots, X_n \rhd Y_n, \Sigma \to P \rhd Q}$$

($\rhd_{IL}$)

$$\frac{P, P \rhd \bot, \{Q, X_1, \cdots, X_n\} \rhd \bot \to Q, X_1, \cdots, X_n \qquad \Sigma \to Y_1 \rhd Q \qquad \cdots \qquad \Sigma \to Y_n \rhd Q}{X_1 \rhd Y_1, \cdots, X_n \rhd Y_n, \Sigma \to P \rhd Q}$$

($\rhd_{IK4P}$)

$$\frac{P, \{Q, X_1, \cdots, X_n\} \rhd \bot, \Sigma \to Q, X_1, \cdots, X_n \qquad \Sigma \to Y_1 \rhd Q \qquad \cdots \qquad \Sigma \to Y_n \rhd Q}{X_1 \rhd Y_1, \cdots, X_n \rhd Y_n, \Sigma \to P \rhd Q}$$

($\rhd_{ILP}$)

$$\frac{P, P \rhd \bot, \{Q, X_1, \cdots, X_n\} \rhd \bot, \Sigma \to Q, X_1, \cdots, X_n \qquad \Sigma \to Y_1 \rhd Q \qquad \cdots \qquad \Sigma \to Y_n \rhd Q}{X_1 \rhd Y_1, \cdots, X_n \rhd Y_n, \Sigma \to P \rhd Q}$$

定理 2.1([Sas01],[Sas02a],[Sas02b]).
(1) $P \in K4 \Leftrightarrow \ \to P \in GK4$
(2) $P \in L \Leftrightarrow \ \to P \in GL$
(3) $P \in IK4 \Leftrightarrow \ \to P \in GIK4$
(4) $P \in IL \Leftrightarrow \ \to P \in GIL$
(5) $P \in ILP \Leftrightarrow \ \to P \in GILP$

定理 2.2([Sas01],[Sas02a],[Sas02b]).
(1) $\Gamma \to \Delta \in GK4$ ならば、$\Gamma \to \Delta$ を終式とする GK4 のカットなしの証明図が存在する。
(2) $\Gamma \to \Delta \in GIK4$ ならば、$\Gamma \to \Delta$ を終式とする GIK4 のカットなしの証明図が存在する。
(3) $\Gamma \to \Delta \in GIK4P$ ならば、$\Gamma \to \Delta$ を終式とする GIK4P のカットなしの証明図が存在する。

3. レーブの公理の性質

4 節で GL,GIL,GILP のカット除去定理を示すが、ここではそれに必要なレーブの公理の性質を述べる。

定義 3.1. $\Box^n P$ を次のように定義する。
(1) $\Box^0 P = P$
(2) $\Box^{k+1} P = \Box(\Box^k P)$

補題 3.2. n=0,1,2,…に対して、次が成り立つ。

$$\Box^n L(p) \to L(p) \in GK4$$

シークエントの体系 G に対して、公理→P を加えてできる体系を G+P とかく。

定理 3.3. n=0,1,2,…に対して、次が成り立つ。
(1) $\Gamma \to \Delta \in GL \Leftrightarrow \Gamma \to \Delta \in GK4 + \Box^n L(P)$
(2) $\Gamma \to \Delta \in GIL \Leftrightarrow \Gamma \to \Delta \in GIK4 + \Box^n L(P)$
(3) $\Gamma \to \Delta \in GILP \Leftrightarrow \Gamma \to \Delta \in GIK4P + \Box^n L(P)$

証明：補題 3.2 と n についての数学的帰納法で示される。詳細は、[Sas02a]、[Sas01]を参照。

4. カット除去定理

ここでは、次の定理を証明する。ここでの証明は、[Sas01]、[Sas02a]で与えた証明より単純で整理された形になっている。

定理 4.1. $\Gamma \to \Delta \in$ GL(あるいは、GIL、GILP)ならば、$\Gamma \to \Delta$ を終式とする GL(あるいは、GIL、GILP)のカットなしの証明図が存在する。

定理を証明するためにいくつかの準備を行う。

補題 4.2. n=1,2,… とする。$\Gamma \to \Delta \in$ GL(あるいは、GIL、GILP)ならば、論理式 $P_1,\cdots,P_k$ が存在して、

$$\Box^n L(P_1),\cdots,\Box^n L(P_k), \Gamma \to \Delta \in \text{GK4 (あるいは、GIK4、GIK4P)}$$

証明：GL と GIL については[Sas01]、[Sas02a]で証明されている。ここでは、その概略と GILP についての証明を述べる。

GL についての証明の概略を示す。$\Gamma \to \Delta \in$ GL とする。定理 3.3 より、$\Gamma \to \Delta \in$ GK4+$\Box^n L(P)$であり、この証明図$\mathcal{P}$が存在する。$\mathcal{P}$の中に現れる$\to \Box^n L(P)$の形の公理を

$$\to \Box^n L(P_1),\cdots,\to \Box^n L(P_k)$$

とおく。次に、シークエント$\Phi \to \Psi$に対して、シークエント

$$\Box^n L(P_1),\cdots,\Box^n L(P_k), \Phi \to \Psi$$

を対応させる関数をfとする。次の 2 条件が示されれば、$\Box^n L(P_1),\cdots, \Box^n L(P_k), \Gamma \to \Delta \in$ GK4 が得られる。

(1.1) $\mathcal{P}$に現れる公理 S に対して、$f(S) \in$ GK4

(1.2) $\mathcal{P}$に現れる推論規則 I に対して、次が成り立つ。

I の任意の上式 S に対して$f(S) \in$ GK $\Rightarrow$ $f(T) \in$ GK4

(1.1),(1.2)は(T→)などを用いて容易に示される。

GIL についての証明は GL についての証明と同様にして示される。ここでは、(1.2)に対応するものの中で I が($\Box_{IK4}$)の場合、すなわち、

(2.1) ($\Box_{IK4}$)の各上式の左辺に$\Pi=\{\Box^n L(P_1),\cdots,\Box^n L(P_k)\}$を加えたシークエントがどれも GIK4 で証明可能ならば、下式にΠを加えたシークエントも

GIK4 で証明可能である。

を示す。$\Gamma \to \bot \rhd C$ GIK4 で証明可能なので、(2.1)は次の推論規則($\Box_{IK4}$)によって示される。

$$\frac{P, \Pi, \Lambda \rhd \bot \to \Pi^*, \Lambda \quad \Sigma \to \bot \rhd Q \ \cdots \ \Sigma \to \bot \rhd Q \quad \Pi, \Sigma \to Y_m \rhd Q \ \cdots \ \Pi, \Sigma \to Y_m \rhd Q}{X_1 \rhd Y_1, \cdots, X_m \rhd Y_m, \Pi, \Pi, \Sigma \to P \rhd Q}$$

ただし、$\Pi^* = \{\neg\Box^{n-1}L(P_1), \cdots, \neg\Box^{n-1}L(P_k)\}$、$\Lambda = \{Q, X_1, \cdots, X_m\}$

GILP についての証明も GL についての証明と同様である。GIL についての証明と同様に、(1.2)に対応するものの中で I が($\Box_{IK4P}$)の場合のみを次の推論規則($\Box_{IK4P}$)によって示す。

$$\frac{P, \{Q, X_1, \cdots, X_m\} \rhd \bot, \Pi, \Sigma \to Q, X_1, \cdots, X_m \qquad \Pi, \Sigma \to Y_m \rhd Q \quad \cdots \quad \Pi, \Sigma \to Y_m \rhd Q}{X_1 \rhd Y_1, \cdots, X_m \rhd Y_m, \Pi, \Sigma \to P \rhd Q}$$

定義 4.3.

(1) GL からカットを除いて($\Box_{K4}$)を加えた体系を GL*とおく。

(2) GIL からカットを除いて($\Box_{IK4}$)を加えた体系を GIL*とおく。

(3) GILP からカットを除いて($\Box_{IK4P}$)を加えた体系を GILP*とおく。

補題 4.4. シークエント S を終式とする GL*(あるいは、GIL*、GILP*)の証明図は、Sub(S) (あるいは、Sub*(S))の要素からなるシークエントで構成される。

証明:証明図の構成に関する帰納法で示される。

補題 4.5. GIL*(あるいは GILP*)において、S を終式とする証明図を$\mathcal{P}$とする。このとき、S を終式とする証明図で、次の 2 条件をみたすものが存在する。

(1) $\Gamma \to \Delta, \bot \rhd P$ の形のシークエントは、次の形でのみ現れる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot \to}}{\text{(W 左)と(W 右)を何度か}}}{\bot, \bot \rhd \bot, Q \rhd \bot \to Q}}{\dfrac{\to \bot \rhd Q}{\dfrac{\text{(W 左)と(W 右)を何度か}}{\Gamma \to \Delta, \bot \rhd Q}}}$$

(2) $P \rhd \bot, \Gamma \to \Delta, P \rhd Q$ の形のシークエントは、次の形でのみ現れる。ただし、$\Delta \cup \{P \rhd Q\}$に$\bot \rhd Z$ の形の論理式は属さないとする。

$$
\dfrac{\dfrac{P \to P}{P, P\rhd\bot, Q\rhd\bot \to Q, P}\,\text{(W左)と(W右)を何度か} \qquad \dfrac{\dfrac{\bot\to}{\bot,\bot\rhd\bot,Q\rhd\bot\to Q}\,\text{(W左)と(W右)を何度か}}{\to \bot\rhd Q}}{\dfrac{P\rhd\bot\to P\rhd Q}{P\rhd\bot,\Gamma\to\Delta,P\rhd Q}\,\text{(W左)と(W右)を何度か}}
$$

証明:$\mathcal{P}$の構成に関する帰納法で容易に示される。

定義 4.6.

(1) GL*の証明図$\mathcal{P}$に対して、

$$\mathrm{pf}(\mathcal{P})=\{P \mid \Box P \text{ を主論理式とする推論規則が}\mathcal{P}\text{に現れる}\}$$

とおき、その要素の個数を#pf($\mathcal{P}$)とおく。

(2) GIL*, GILP*の証明図$\mathcal{P}$に対して、

$$\mathrm{pf}(\mathcal{P})=\{P \mid P\neq\bot,\ \text{下式の左辺に } P\rhd\bot \text{ が属さず } P\rhd Q \text{ を主論理式とする推論規則が}\mathcal{P}\text{に現れる}\}$$

とおき、その要素の個数を#pf($\mathcal{P}$)とおく。

系 4.7. 補題 4.5 に現れる各証明図$\mathcal{P}$に対して、pf($\mathcal{P}$)$=\emptyset$である。

補題4.8. $\Gamma\to\Delta$を終式とするGL*(あるいは、GIL*,GILP*)の証明図を$\mathcal{P}$とする。このとき、

$$\Box P,\Gamma\to\Delta \qquad (\text{あるいは、} P\rhd\bot,\Gamma\to\Delta)$$

を終式とする GL*の証明図$\mathcal{P}_1$で pf($\mathcal{P}_1$)$\subseteq$pf($\mathcal{P}$)$-\{P\}$をみたすものが存在する

証明: GL*の場合を$\mathcal{P}$の構成に関する帰納法で示す。$\mathcal{P}$が公理のとき、$\Gamma\to\Delta$は公理だから、(W左)のみを推論規則に用いて$\Box P,\Gamma\to\Delta$を終式とする証明図$\mathcal{Q}$を構成できる。pf($\mathcal{Q}$)は空集合だから、pf($\mathcal{Q}$)$\subseteq$pf($\mathcal{P}$)$-\{P\}$をみたす。

$\mathcal{P}$が公理でないとき、$\mathcal{P}$の終式$\Gamma\to\Delta$を導く推論規則Iが存在する。Iが($\Box_L$)のとき、Iは次の形をしている。

$$\dfrac{\Box Q,\Box\Gamma_1,\Gamma_1\to Q}{\Box\Gamma_1\to\Box Q}$$

ただし、$\Gamma=\Box\Gamma_1$、$\Delta=\{\Box Q\}$である。P=Q のとき、(W左)のみを推論規則に用いて、$\Box P,\Gamma\to\Delta$、すなわち$\Box P,\Gamma\to\Box P$を終式とする証明図$\mathcal{Q}$を構成できる。

pf($\mathcal{Q}$)は空集合だから、pf($\mathcal{Q}$)⊆pf($\mathcal{P}$)−{P}をみたす。$P \neq Q$ のとき、$\mathcal{P}$においてIの上式を終式とする証明図を$\mathcal{P}_1$とする。帰納法の仮定より、

$$\Box P, \Box Q, \Box \Gamma_1, \Gamma_1 \to Q$$

を終式とする GL*の証明図$\mathcal{Q}_1$で pf($\mathcal{Q}_1$)⊆pf($\mathcal{P}_1$)−{P}をみたすものが存在する。$\mathcal{Q}_1$から次のように$\Box P, \Box \Gamma_1 \to \Box Q$ を終式とする証明図$\mathcal{Q}$で pf($\mathcal{Q}$)⊆pf($\mathcal{P}$)−{P}をみたすものが構成される。

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{\Box P, \Box Q, \Box \Gamma_1, \Gamma_1 \to Q}}{\cfrac{\Box P, P, \Box Q, \Box \Gamma_1, \Gamma_1 \to Q}{\Box P, \Box \Gamma_1 \to \Box Q}}$$

Iが($\Box_{K4}$)のときも同様である。IがLKの規則のときは容易に示すことができる。

GIL*とGILP*の場合は同様に示すことができるのでGILP*の場合のみを$\mathcal{P}$の構成に関する帰納法で示す。$\mathcal{P}$が公理のときは、GL*の場合と同様である。$\mathcal{P}$が公理でないとき、終式を導く推論規則Iが存在する。Iが($\rhd_{ILP}$)のとき、Iは次の形をしている。

$$\frac{Q, Q\rhd\bot, \{R, X_1, \cdots, X_n\}\rhd\bot, \Sigma \to R, X_1, \cdots, X_n \qquad \Sigma \to Y_1\rhd R \qquad \cdots \qquad \Sigma \to Y_n\rhd R}{X_1\rhd Y_1, \cdots, X_n\rhd Y_n, \Sigma \to Q\rhd R}$$

ただし、下式の左辺がΓ、右辺がΔである。Iの各上式を終式とする証明図が$\mathcal{P}$に現れるのでそれらを一番左の上式を終式とするものから順に$\mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_{n+1}$とする。

$Q=\bot$のとき、補題 4.5 の条件(1)の形で $P\rhd\bot, \Gamma \to \Delta$を終式とする証明図$\mathcal{Q}$を容易に構成できる。pf($\mathcal{Q}$)は空集合だから、pf($\mathcal{Q}$)⊆pf($\mathcal{P}$)−{P}をみたす。

$P=Q\neq\bot$のとき、補題 4.5 の条件(2)の形で $P\rhd\bot, \Gamma \to \Delta$を終式とする証明図$\mathcal{Q}$を容易に構成できる。pf($\mathcal{Q}$)は空集合だから、pf(Q)⊆pf($\mathcal{P}$)−{P}をみたす。

$P\neq Q, Q\neq\bot$のとき、次の($\rhd_{ILP}$)の規則 I*を考える。

$$\frac{Q, Q\rhd\bot, \Lambda\rhd\bot, P\rhd\bot, \Sigma \to \Lambda, P \qquad \Sigma^+ \to Y_1\rhd R \quad \cdots \quad \Sigma^+ \to Y_n\rhd R \qquad \Sigma^+ \to \bot\rhd R}{X_1\rhd Y_1, \cdots, X_n\rhd Y_n, P\rhd\bot, \Sigma^+ \to Q\rhd R}$$

ただし、$\Sigma^+=\Sigma\cup\{P\rhd\bot\}$、$\Lambda=\{R, X_1, \cdots, X_n\}$である。I*の上式を左から$S_1, \cdots, S_{n+2}$とおく。$S_{n+2}$に対して、補題 4.5 の条件(1)の形で$S_{n+2}$を終式とする証明図$\mathcal{Q}_{n+2}$を構成できる。pf($\mathcal{Q}_{n+2}$)は空集合だから、pf($\mathcal{Q}_{n+2}$)⊆pf($\mathcal{P}$)−{P}をみたす。各 S_i ($i=1, \cdots, n+1$)は、Iの上式の左辺に$P\rhd\bot$を加えたシークエントであるから、帰納法の仮定から、S_iを終式とする GILP*の証明図$\mathcal{Q}_i$で pf($\mathcal{Q}_i$)⊆pf($\mathcal{P}_i$)−{P}⊆pf($\mathcal{P}$)−{P}をみたすものが存在する。I*の主論理式は、$Q\rhd R$で、$P\neq Q$だから、I*の下式、すなわち

$P \rhd \bot, \Gamma \to \Delta$ を終式とする GILP*の証明図 $\mathcal{Q}$ で $\mathbf{pf}(\mathcal{Q}) \subseteq \mathbf{pf}(\mathcal{Q}_1) \cup \cdots \cup \mathbf{pf}(\mathcal{Q}_{n+1}) \cup \mathbf{pf}(\mathcal{Q}_{n+2}) \cup \{Q\} \subseteq \mathbf{pf}(\mathcal{P}) - \{P\}$ をみたすものが存在する。

I が $(\Box_{IK4P})$ のときも同様である。I が LK の規則のときは容易に示すことができる。

補題 4.9. $\Box^n \Pi_1, \Gamma \to \Delta, \neg\Box^n \Pi_2$,を終式とする GL*の証明図(あるいは、$\Box^n \Pi_1, \Gamma \to \Delta, \neg\Box^n \Pi_2$,を終式とし補題 4.5 の条件をみたす GIL*, GILP*の証明図)を $\mathcal{P}$ とする。このとき、$(\Pi_1 \cup \Pi_2) \cap \mathrm{Sub}(\Gamma \to \Delta) = \varnothing$ (あるいは $(\Pi_1 \cup \Pi_2) \cap \mathrm{Sub}^*(\Gamma \to \Delta) = \varnothing$)かつ $\#\mathbf{pf}(\mathcal{P}) < n$ ならば、$\Gamma \to \Delta$ を終式とする GL*(あるいは、GIL*, GILP*)の証明図が存在する。

証明：GL*、GIL*、GILP*のいずれの場合も $\mathcal{P}$ の構成に関する帰納法で示す。

GL*について成立することを示す。$\mathcal{P}$ が公理のときは、$(\Pi_1 \cup \Pi_2) \cap \mathrm{Sub}(\Gamma \to \Delta) = \varnothing$ から、Π_1 も Π_2 も空集合である。よって、$\Gamma \to \Delta$ は公理である。$\mathcal{P}$ が公理でないときは、$\mathcal{P}$ において終式を導く推論規則 I が存在する。I が LK の推論規則でないときのみを示す。I は次の形である。

$$\frac{\Phi, \Box^n \Pi_1, \Box^{n-1} \Pi_1, \Box\Gamma_1, \Gamma_1 \to P}{\Box^n \Pi_1, \Box\Gamma_1 \to \Box P}$$

ただし、$\Phi \in \{\varnothing, \{\Box P\}\}$、$\Gamma = \Box\Gamma_1$、$\Delta = \{\Box P\}$、$\Pi_2 = \varnothing$ である。I の上式を終式とする証明図が $\mathcal{P}$ の中に現れるので、それを $\mathcal{P}_1$ とする。 $\mathbf{pf}(\mathcal{P}) = \mathbf{pf}(\mathcal{P}_1) \cup \{P\}$ である。補題 4.8 より、

$$\Box^{n-1}(\Box\Pi_1 \cup \Pi_1), \Box P, \Box\Gamma_1, \Gamma_1 \to P$$

を終式とする GL*の証明図 $\mathcal{Q}_1$ で $\mathbf{pf}(\mathcal{Q}_1) \subseteq \mathbf{pf}(\mathcal{P}_1) - \{P\}$ をみたすものが存在する。$\mathbf{pf}(\mathcal{P}_1) - \{P\} = \mathbf{pf}(\mathcal{P}) - \{P\}$ だから、$\mathbf{pf}(\mathcal{Q}_1) \subseteq \mathbf{pf}(\mathcal{P}) - \{P\}$ であり、$\#\mathbf{pf}(\mathcal{Q}_1) \leqq \#\mathbf{pf}(\mathcal{P}) - 1 < n - 1$ である。補題 4.4 より、$(\Box\Pi_1 \cup \Pi_1) \cap \mathrm{Sub}(\Box P, \Box\Gamma_1, \Gamma_1 \to P) = \varnothing$ である。よって帰納法の仮定より、

$$\Box P, \Box\Gamma_1, \Gamma_1 \to P$$

を終式とする GL*の証明図が存在する。$(\Box_L)$ より、

$$\Box\Gamma_1 \to \Box P$$

すなわち、$\Gamma \to \Delta$ を終式とする GL*の証明図が存在する。

GIL*と GILP*の場合は同様に示すことができるので GILP*の場合のみを示す。$\mathcal{P}$ が公理のときは、GL*の場合と同様である。$\mathcal{P}$ が公理でないとき、終式を導く推論規則 I が存在する。I が LK の推論規則でないときのみを示す。I は次の形である。

$$\frac{P,\Phi,X\rhd\bot,\Box^n\Pi_1,\Sigma\to\neg\Box^{n-1}\Pi_{11},X \qquad \Box^n\Pi_{12},\Sigma\to Y_1\rhd Q \quad\cdots\quad \Box^n\Pi_{12},\Sigma\to\bot\rhd Q}{X_1\rhd Y_1,\cdots,X_m\rhd Y_m,\Box^n\Pi_{11},\Box^n\Pi_{12},\Sigma\to P\rhd Q}$$

ただし、

$\Phi\in\{\varnothing,\{P\rhd\bot\}\}$、

$X=\{Q,X_1,\cdots,X_m\}$、

$\Gamma=\{X_1\rhd Y_1,\cdots,X_m\rhd Y_m,\}\cup\Sigma$、

$\Delta=\{P\rhd Q\}$、

$\Pi_1=\Pi_{11}\cup\Pi_{12}$、

$\Pi_2=\varnothing$

である。Iの各上式を終式とする証明図が$\mathcal{P}$の中に現れるので、それらを一番左の上式に対するものから$\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_1,\ \cdots$ とする。$\mathrm{pf}(\mathcal{P})=\mathrm{pf}(\mathcal{P}_i)\cup\{P\}$である。補題 4.8 をIの一番左の上式に適用すると、

$$P,P\rhd\bot,X\rhd\bot,\Box^{n-1}(\Box\Pi_1),\Sigma\to\neg\Box^{n-1}\Pi_{11},X$$

を終式とする GILP*の証明図$\mathcal{Q}_0$で $\mathrm{pf}(\mathcal{Q}_0)\subseteq\mathrm{pf}(\mathcal{P}_0)-\{P\}=\mathrm{pf}(\mathcal{P})-\{P\}$をみたすものが存在する。$\#\mathrm{pf}(\mathcal{Q}_0)<n-1$ である。また、補題 4.4 より、$(\Box\Pi_1\cup\Pi_{11})\cap\mathrm{Sub}^*(P,P\rhd\bot,X\rhd\bot,\Sigma\to X)=\varnothing$である。よって帰納法の仮定より、

$$P,P\rhd\bot,X\rhd\bot,\Sigma\to X$$

を終式とする GL*の証明図$\mathcal{R}_0$が存在する。一方、Iの上式 $\Box^n\Pi_{12},\Sigma\to Y_i\rhd Q$ $(i=1,\cdots,m)$を終式とする証明図$\mathcal{P}_i$、補題 4.4、帰納法の仮定より、

$$P\rhd\bot,\Sigma\to Y_i\rhd Q$$

を終式とする GL*の証明図$\mathcal{R}_i$が存在する。$\mathcal{R}_0,\mathcal{R}_1,\cdots,\mathcal{R}_m$と$(\rhd_{\mathrm{ILP}})$より、

$$X_1\rhd Y_1,\cdots,X_m\rhd Y_m,\Sigma\to P\rhd Q$$

すなわち、$\Gamma\to\Delta$を終式とする GILP*の証明図が存在する。

定理 4.1 の証明:

$\Gamma\to\Delta\in\mathrm{GL}$ (あるいは GIL、GILP)、n を $\mathrm{Sub}(\Gamma\to\Delta)$ (あるいは $\mathrm{Sub}^*(\Gamma\to\Delta)$)の要素の個数とする。補題4.2より、論理式$P_1,\cdots,P_k$が存在して、

$$\Box^{2n+2}L(P_1),\cdots,\Box^{2n+2}L(P_k),\Gamma\to\Delta\in\mathrm{GK4}\quad(\text{あるいは GIK4、GIK4P})$$

である。定理 2.2 より上のシークエントを終式とする GK4(あるいは GIK4、GIK4P)のカットなしの証明図が存在し、故に GL*の証明図$\mathcal{P}$が存在する(あるいは、補題 4.5 より補題 4.5 の条件をみたす GIL*、GILP*の証明図$\mathcal{P}$が存在する)。上のシークエントは

$$\Box^{n+1}\{\Box^{n+1}L(P_1),\cdots,\Box^{n+1}L(P_k)\},\Gamma\to\Delta$$

とも表現でき、n の定義から、$\{\Box^{n+1}L(P_1),\cdots,\Box^{n+1}L(P_k)\}\cap\mathrm{Sub}^*(\Gamma\to\Delta)=\varnothing$である。また、$\mathrm{pf}(\mathcal{P})\subseteq\mathrm{Sub}^*(\Gamma\to\Delta)$だから、$\#\mathrm{pf}(\mathcal{P})<n+1$ である。補題 4.9 より、

$\Gamma \to \Delta$を終式とするGL*(あるいはGIL*、GILP*)の証明図が存在する。($\Box_{K4}$) (あるいは($\rhd_{IK4}$) ,($\rhd_{IK4P}$))は、($\Box_{L}$) (あるいは($\rhd_{IL}$) ,($\rhd_{ILP}$))と(W 左)を組み合わせて導かれるので、$\Gamma \to \Delta$を終式とするカットなしの GL(あるいは GIL、GILP)の証明図が存在する。

参考文献

[Sas01] K. Sasaki, Loeb's axiom and cut-elimination theorem, Journal of the Nanzan Academic Society Mathematical Sciences and Information Engineering, 1, 2001, pp. 91-98.

[Sas02a] K. Sasaki, A cut-free sequent system for the smallest interpretability logic, Studia Logica, 70(2002), pp.353-372

[Sas02b] K. Sasaki, A sequent system for the interpretability logic with the persistence axiom, Journal of the Nanzan Academic Society Mathematical Sciences and Information Engineering, 2, 2002, pp. 25-34.

[Val83] S. Valentini, The modal logic of provability: cut-elimination, Journal of Philosophical logic, 12, 1983, pp. 471-476.