数理解析研究所講究録 1302 巻 2003 年 68-90

スカラー変数とベクトル変数が結合した可積分系の分類

土田 隆之 (東京大・数理科学研究科)
Takayuki Tsuchida (University of Tokyo)
E-mail: tsuchida@poisson.ms.u-tokyo.ac.jp

and

Thomas Wolf (Brock University)
E-mail: twolf@brocku.ca

概要

(1+1)-次元において, 1つのスカラー変数と1つのベクトル変数が結合した, 3階の非線形発展方程式系について考察する. コンピューターを使って, 5階の対称性を持つ系をしらみつぶしに求め, 各々の系について “手で” 可積分性を調べる.

- **目次**

1 はじめに

この講演では, スカラー変数 $u(x,t)$ とベクトル変数 $U(x,t)$ が結合した系を考え, 可積分と期待される場合について, 1つ1つ詳しく調べる. 具体的な問題設定は以下の通りである.

- (1+1)-次元 (空間 x, 時間 t).
- 空間 x に関して3階の発展方程式系.
- 方程式の形は, (微分) 多項式型で, ベクトルからスカラー量を作る時は, 必ず内積を用いる.
- ベクトル変数 $U(x,t)$ の成分の数 N は, 任意の自然数であるとし, ベクトル間の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す:

$$U=(U_1,U_2,\ldots,U_N), \qquad \langle U,U_x\rangle=\sum_{j=1}^{N}U_j\frac{\partial U_j}{\partial x}, \ \text{etc.}$$

- u, U, ∂_x, ∂_t に適当な重みを持たせたとき, 方程式の各項が同じ重みを持つ.

最近の研究 [1, 2] によれば, スカラー変数に対する3階の多項式型方程式が, 可積分になるような (正の) 重みづけは, 以下の3通りしかない.

- KdV 方程式 $u_t=u_{xxx}+uu_x$ と同じ重みづけ：

$$\partial_x\to 1, \quad \partial_t\to 3, \quad u\to 2.$$

- mKdV 方程式 $u_t=u_{xxx}+u^2u_x$ と同じ重みづけ：

$$\partial_x\to 1, \quad \partial_t\to 3, \quad u\to 1.$$

- Ibragimov–Shabat 方程式 [3] $u_t=u_{xxx}+3u^2u_{xx}+9uu_x^2+3u^4u_x$ と同じ重みづけ： $\partial_x\to 1, \quad \partial_t\to 3, \quad u\to \frac{1}{2}.$

このとき, 3階の方程式は, 5階の対称性 (可換な時間発展) を持てば, 無限個の対称性を持つ (逆も成立). そこで, 以下では, 上の3通りの重みづけのもとで, 5階の対称性を持つような3階のスカラー・ベクトル結合系を調べることにする. 実は, 多成分系での事情はもう少し複雑で, 従属変数が異なる重みを持つ可積分系も存在するのだが [4], 紙数の都合上, その場合についての考察とコンピューター計算の詳細は, 文献 [5] に譲ることにする.

2 結合型KdV方程式

KdV型の重みづけ：$\partial_x \to 1$, $\partial_t \to 3$, $u \to 2$, $U \to 2$の場合, スカラー・ベクトル結合系の一般形は, 以下の通り (a_1〜a_6は定数)：

$$\begin{cases} u_t = a_1 u_{xxx} + a_2 u u_x + a_3 \langle U, U_x \rangle, \\ U_t = a_4 U_{xxx} + a_5 u_x U + a_6 u U_x. \end{cases} \tag{2.0}$$

(2.0)が3階である(分散項を持つ)ことと, 2つの式がdecoupleしないことを仮定する. 即ち, $(a_1, a_4) \neq (0,0)$, $a_3 \neq 0$, $(a_5, a_6) \neq (0,0)$.

定理2.1 (2.0)が5階の対称性：

$$\begin{cases} u_s = b_1 u_{xxxxx} + b_2 u u_{xxx} + \cdots, \\ U_s = b_9 U_{xxxxx} + b_{10} u_{xxx} U + \cdots, \end{cases}$$

を持つとき ($u_{ts} = u_{st}$, $U_{ts} = U_{st}$), 変数のスケーリングにより, 以下の4つの系のいずれかと一致する：

$$\begin{cases} u_t = \langle U, U_x \rangle, \\ U_t = U_{xxx} + u_x U + 2 u U_x, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 6 u u_x - 6 \langle U, U_x \rangle, \\ U_t = U_{xxx} + 6 u_x U + 6 u U_x, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3 u u_x + 3 \langle U, U_x \rangle, \\ U_t = u_x U + u U_x, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 6 u u_x - 12 \langle U, U_x \rangle, \\ U_t = -2 U_{xxx} - 6 u U_x. \end{cases} \tag{2.4}$$

□

いずれの系も, $U = \mathbf{0}$とおくことが可能で, この点からみると, (2.1)は自明な式 $u_t = 0$ の拡張, (2.2)–(2.4)はKdV方程式の拡張になっている.

2.1 系(2.1)

(2.1)式は, Drinfel'd–Sokolov系 [6, 7] (のうちの1つ)の多成分拡張である. この拡張は既に知られており, KP階層にある拘束条件を課せば得られることが, 文献[8, 9]で示されている.

2.2　系 (2.2)

(2.2) 式は, Jordan KdV 方程式として既に知られている [10]. KdV 方程式の行列拡張：$Q_t = Q_{xxx} + 3Q_xQ + 3QQ_x$ が可積分であることは良く知られているが, 特に

$$Q = u\mathbf{1} + \sum_{j=1}^{N} U_j \mathbf{e}_j,$$

とおくことで, (2.2) 式を得る. 但し, $\mathbf{1}$ は単位行列, $\{\mathbf{e}_j\}$ は互いに反可換な行列：$\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}_+ \equiv \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = -2\delta_{ij}\mathbf{1}$ である.

2.3　系 (2.3)

(2.3) 式は, Ito 方程式 [11] の多成分拡張であり, 二重ハミルトニアン構造を持つことが示されている [12]. $w = \sqrt{<U, U>}$ とおくと, Ito 方程式そのもの：

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3uu_x + 3ww_x, \\ w_t = (uw)_x, \end{cases} \tag{2.5}$$

を得るので, (2.3) は, Ito 方程式と U に対する線形方程式からなる三角型の系である. Ito 方程式 (2.5) の Lax 形式は, 線形方程式系：

$$\begin{cases} \psi_{xx} = \left(\zeta - \frac{1}{2}u - \frac{3}{16\zeta}w^2\right)\psi, \\ \psi_t = (4\zeta + u)\psi_x - \frac{1}{2}u_x\psi, \end{cases}$$

で与えられる (ζ はスペクトルパラメータ) [13]. 実際, 無矛盾条件：$\psi_{xxt} = \psi_{txx}$ を計算すれば, (2.5) を得る.

(2.5) の自明でない解 $u(x,t)$, $w(x,t)$ が与えられたときに, 残された U に対する線形方程式：

$$U_t = (uU)_x, \tag{2.6}$$

は以下のように解くことができる. $w(x,t)$ の従う式のポテンシャル形は, $\hat{w}_t = u\hat{w}_x$ で与えられる ($\hat{w}_x \equiv w$). この時, 任意関数 $f(z)$ に対し, $[f(\hat{w})]_t = u\,[f(\hat{w})]_x$ が成立することに注意すると, (2.6) の解：

$$U_j = [f_j(\hat{w})]_x = w \times f_j'\left(\int^x w\,\mathrm{d}x'\right), \quad j = 1, \ldots, N,$$

が得られる. $f_1(z), \ldots, f_N(z)$ は, 任意関数であるが, $\langle U, U\rangle = w^2$ が成立するための制約条件：$\sum_{j=1}^{N}\left[f_j'(z)\right]^2 = 1$ をみたさなければならない.

2.4 系 (2.4)

(2.4) 式は, Hirota–Satsuma [14] によって提出された 2 成分 KdV 方程式の, 新しい (と思われる) 拡張である. (2.4) 式が Lax 形式に書けることを示そう. 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\phi}$ に対する線形方程式系:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\psi}_{xx} + P\boldsymbol{\psi} + Q\boldsymbol{\phi} = \zeta\boldsymbol{\psi}, \\ \boldsymbol{\phi}_{xx} + P\boldsymbol{\phi} + R\boldsymbol{\psi} = -\zeta\boldsymbol{\phi}, \\ \boldsymbol{\psi}_t = 4\zeta\boldsymbol{\psi}_x + 2P\boldsymbol{\psi}_x - 4Q\boldsymbol{\phi}_x - P_x\boldsymbol{\psi} + 2Q_x\boldsymbol{\phi}, \\ \boldsymbol{\phi}_t = -4\zeta\boldsymbol{\phi}_x + 2P\boldsymbol{\phi}_x - 4R\boldsymbol{\psi}_x - P_x\boldsymbol{\phi} + 2R_x\boldsymbol{\psi}, \end{cases} \tag{2.7}$$

を考える. ζ はスペクトルパラメータ, P, Q, R は正方行列である. 無矛盾条件: $\boldsymbol{\psi}_{xxt} = \boldsymbol{\psi}_{txx}$, $\boldsymbol{\phi}_{xxt} = \boldsymbol{\phi}_{txx}$ を考えることで, 3 つの行列方程式:

$$\begin{cases} P_t = P_{xxx} + 3(P^2)_x - 6(QR)_x, \\ Q_t = -2Q_{xxx} - 6Q_xP + 3[P_x, Q], \\ R_t = -2R_{xxx} - 6R_xP + 3[P_x, R], \end{cases} \tag{2.8}$$

及び, 3 つの制約条件: $[P, Q] = O$, $[P, R] = O$, $[Q, R]_x = O$ を得る. 特に,

$$P = u\mathbf{1}, \quad Q = U_1\mathbf{1} + \sum_{j=1}^{N-1} U_{j+1}\mathbf{e}_j, \quad R = U_1\mathbf{1} - \sum_{j=1}^{N-1} U_{j+1}\mathbf{e}_j,$$

とおくと ($\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}_+ = -2\delta_{ij}\mathbf{1}$), 制約条件は自動的にみたされ, 行列方程式 (2.8) は, 結合型 Hirota–Satsuma 方程式 (2.4) に帰着する.

3 結合型 mKdV 方程式と結合型 Burgers 方程式

mKdV 型の重みづけ: $\partial_x \to 1$, $\partial_t \to 3$, $u \to 1$, $U \to 1$ の場合, スカラー・ベクトル結合系の一般形は, 以下の通り (a_1〜a_{21} は定数):

$$\begin{cases} u_t = a_1u_{xxx} + a_2uu_{xx} + a_3u_x^2 + a_4u^2u_x + a_5u^4 + a_6u_x\langle U, U\rangle \\ \qquad + a_7u\langle U, U_x\rangle + a_8\langle U, U_{xx}\rangle + a_9\langle U_x, U_x\rangle + a_{10}u^2\langle U, U\rangle \\ \qquad + a_{11}\langle U, U\rangle^2, \\ U_t = a_{12}U_{xxx} + a_{13}u_{xx}U + a_{14}u_xU_x + a_{15}uU_{xx} + a_{16}uu_xU \\ \qquad + a_{17}u^2U_x + a_{18}\langle U, U\rangle U_x + a_{19}\langle U, U_x\rangle U + a_{20}u^3U \\ \qquad + a_{21}u\langle U, U\rangle U. \end{cases} \tag{3.0}$$

(3.0) が 3 階である (分散項を持つ) ことと，2 つの式が decouple しないことを仮定する.

定理3.1 (3.0) が 5 階の対称性：

$$\begin{cases} u_s = b_1 u_{xxxxx} + b_2 u u_{xxxx} + \cdots, \\ U_s = b_{36} U_{xxxxx} + b_{37} u_{xxxx} U + \cdots, \end{cases}$$

を持つとき ($u_{ts} = u_{st}$, $U_{ts} = U_{st}$), 変数のスケーリングにより，以下の 25 個の系のいずれかと一致する：

$$\begin{cases} u_t = 3u_x\langle U,U\rangle + 3\langle U,U_{xx}\rangle - 3\langle U,U\rangle^2, \\ U_t = U_{xxx} + u_{xx}U + u_x U_x - 3\langle U,U_x\rangle U, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} u_t = 2u_x\langle U,U\rangle + 2\langle U,U_{xx}\rangle - \langle U_x,U_x\rangle - 2\langle U,U\rangle^2, \\ U_t = U_{xxx} + u_{xx}U + 2u_x U_x - 2\langle U,U\rangle U_x - 2\langle U,U_x\rangle U, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} u_t = u_x\langle U,U\rangle + 2u\langle U,U_x\rangle + \langle U,U_{xx}\rangle + \langle U_x,U_x\rangle, \\ U_t = U_{xxx} + u_{xx}U + u_x U_x - 2uu_x U - u^2 U_x + \langle U,U\rangle U_x \\ \qquad - \langle U,U_x\rangle U, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + \frac{3}{2}u_x^2 + \frac{3}{2}\langle U_x,U_x\rangle, \\ U_t = u_x U_x, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3u_x^2 + 2au_x\langle U,U\rangle + a\langle U,U_{xx}\rangle + a\langle U_x,U_x\rangle + b\langle U,U\rangle^2, \\ U_t = u_{xx}U + 2u_x U_x + a\langle U,U\rangle U_x + a\langle U,U_x\rangle U, \quad (a,b) \neq (0,0), \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3u_x^2 - 3\langle U_x,U_x\rangle, \\ U_t = U_{xxx} + 6u_x U_x, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3u_x^2 + u_x\langle U,U\rangle + \langle U,U_{xx}\rangle, \\ U_t = U_{xxx} + 3u_{xx}U + 3u_x U_x + \langle U,U_x\rangle U, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3u_x^2 + 2u_x\langle U,U\rangle + \langle U,U_{xx}\rangle + \frac{1}{2}\langle U_x,U_x\rangle, \\ U_t = U_{xxx} + 6u_{xx}U + 6u_x U_x + 2\langle U,U_x\rangle U, \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + u_x^2 - 12\langle U, U_{xx}\rangle + 12\langle U_x, U_x\rangle - 4\langle U, U\rangle^2, \\ U_t = 4U_{xxx} + u_{xx}U + 2u_xU_x + 4\langle U, U\rangle U_x + 4\langle U, U_x\rangle U, \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 3u_x^2 + 4u_x\langle U, U\rangle + 2\langle U, U_{xx}\rangle + \langle U_x, U_x\rangle + \frac{2}{3}\langle U, U\rangle^2, \\ U_t = -2U_{xxx} - 6u_{xx}U - 6u_xU_x - 4\langle U, U_x\rangle U, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x + \frac{3}{2}u_x\langle U, U\rangle + u\langle U, U_x\rangle + \langle U, U_{xx}\rangle + \langle U_x, U_x\rangle, \\ U_t = -u_xU_x - \frac{1}{2}u^2U_x + \frac{3}{2}\langle U, U\rangle U_x, \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x + \frac{3}{2}u_x\langle U, U\rangle + u\langle U, U_x\rangle + \langle U, U_{xx}\rangle + \langle U_x, U_x\rangle, \\ U_t = -u_xU_x - \frac{1}{2}u^2U_x + \frac{1}{2}\langle U, U\rangle U_x + \langle U, U_x\rangle U, \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x + \frac{1}{2}u_x\langle U, U\rangle + u\langle U, U_x\rangle + \langle U, U_{xx}\rangle + \langle U_x, U_x\rangle, \\ U_t = u_{xx}U + u_xU_x - uu_xU - \frac{1}{2}u^2U_x + \frac{1}{2}\langle U, U\rangle U_x + \langle U, U_x\rangle U, \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x + \frac{3}{2}u_x\langle U, U\rangle + u\langle U, U_x\rangle + \langle U, U_{xx}\rangle + \langle U_x, U_x\rangle \\ \qquad + \frac{1}{2}\langle U, U\rangle^2, \\ U_t = -u_xU_x - \frac{1}{2}u^2U_x - \frac{1}{2}\langle U, U\rangle U_x + \frac{1}{2}u\langle U, U\rangle U, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x + u_x\langle U, U\rangle + u\langle U, U_x\rangle + \langle U, U_{xx}\rangle + \langle U_x, U_x\rangle \\ \qquad - \frac{1}{4}u^2\langle U, U\rangle + \frac{1}{4}\langle U, U\rangle^2, \\ U_t = \frac{1}{2}u_{xx}U + \frac{1}{2}\langle U, U_x\rangle U - \frac{1}{4}u^3U + \frac{1}{4}u\langle U, U\rangle U, \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + u^2u_x + u_x\langle U, U\rangle, \\ U_t = U_{xxx} + u^2U_x + \langle U, U\rangle U_x, \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + 2u^2u_x + u_x\langle U, U\rangle + u\langle U, U_x\rangle, \\ U_t = U_{xxx} + uu_xU + u^2U_x + \langle U, U\rangle U_x + \langle U, U_x\rangle U, \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - 6u^2u_x + 6u_x\langle U, U\rangle + 12u\langle U, U_x\rangle, \\ U_t = U_{xxx} - 12uu_xU - 6u^2U_x + 6\langle U, U\rangle U_x, \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - 6u^2u_x + u_x\langle U, U\rangle + 2u\langle U, U_x\rangle + \langle U, U_{xx}\rangle + \langle U_x, U_x\rangle, \\ U_t = U_{xxx} + 3u_{xx}U + 3u_xU_x - 6uu_xU - 3u^2U_x + \langle U, U\rangle U_x \\ \qquad + 3\langle U, U_x\rangle U, \end{cases} \tag{3.19}$$

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xxx} - 6u^2u_x + u_x\langle U, U\rangle + 2u\langle U, U_x\rangle + \langle U, U_{xx}\rangle + \langle U_x, U_x\rangle, \\
U_t = U_{xxx} + 6u_{xx}U + 6u_xU_x - 12uu_xU - 6u^2U_x + \langle U, U\rangle U_x \\
\qquad + 4\langle U, U_x\rangle U,
\end{cases}
\tag{3.20}
$$

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xxx} - 6u^2u_x + u_x\langle U, U\rangle + 2u\langle U, U_x\rangle + \langle U, U_{xx}\rangle + \langle U_x, U_x\rangle, \\
U_t = -2U_{xxx} - 6u_{xx}U - 6u_xU_x + 12uu_xU + 6u^2U_x + \langle U, U\rangle U_x \\
\qquad - 2\langle U, U_x\rangle U,
\end{cases}
\tag{3.21}
$$

$$
\begin{cases}
u_t = a(u_{xxx} + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + 3u^2u_x) + u_x\langle U, U\rangle + 2u\langle U, U_x\rangle \\
\qquad + 2\langle U, U_{xx}\rangle + 2\langle U_x, U_x\rangle, \\
U_t = U_{xxx} + \frac{1}{2}(1-a)u_{xx}U + \frac{3}{2}u_xU_x + \frac{3}{2}uU_{xx} + \frac{3}{4}(1-2a)uu_xU \\
\qquad + \frac{3}{4}u^2U_x - \langle U, U_x\rangle U + \frac{1}{8}(1-4a)u^3U - \frac{1}{2}u\langle U, U\rangle U, \\
\qquad\qquad a : \text{arbitrary},
\end{cases}
\tag{3.22}
$$

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xxx} + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + 3u^2u_x + u_x\langle U, U\rangle + 2u\langle U, U_x\rangle \\
\qquad + 2\langle U, U_{xx}\rangle + 2\langle U_x, U_x\rangle, \\
U_t = -\frac{1}{2}u_{xx}U - \frac{3}{2}uu_xU - \langle U, U_x\rangle U - \frac{1}{2}u^3U - \frac{1}{2}u\langle U, U\rangle U,
\end{cases}
\tag{3.23}
$$

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xxx} + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + 3u^2u_x + u_x\langle U, U\rangle + 2u\langle U, U_x\rangle \\
\qquad + \langle U, U_{xx}\rangle + \langle U_x, U_x\rangle, \\
U_t = \frac{1}{2}u_{xx}U + u_xU_x + uu_xU + u^2U_x + \frac{1}{2}\langle U, U\rangle U_x + \frac{1}{2}\langle U, U_x\rangle U,
\end{cases}
\tag{3.24}
$$

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xxx} + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + 3u^2u_x + u_x\langle U, U\rangle + 2u\langle U, U_x\rangle \\
\qquad + \langle U, U_{xx}\rangle + \langle U_x, U_x\rangle, \\
U_t = \frac{1}{2}u_{xx}U + u_xU_x + uu_xU + u^2U_x + \langle U, U\rangle U_x.
\end{cases}
\tag{3.25}
$$

□

いずれの系も, $U = \mathbf{0}$ とおくことが可能で, この点からみると, (3.1)–(3.3) は自明な式の, (3.4)–(3.10) は potential KdV 方程式の, (3.11)–(3.21) は mKdV 方程式の, (3.22)–(3.25) は高階 Burgers 方程式の拡張になっている. 実は, (3.22)–(3.24) は, 2 階の方程式系の 3 階の対称性である (後述).

3.1 系 (3.1)

この系は, (3.3) と変数変換を通じてつながっているので, 可積分性については, 3.3 章でまとめて議論する.

3.2 系 (3.2)

この系においては, $(u_x - \langle U, U\rangle)_t = 0$ という関係式が成立することから, $u_x - \langle U, U\rangle = \phi(x)$ とおける. この時, U の式は,

$$U_t = U_{xxx} + 2\phi U_x + \phi_x U,$$

と書き換えられ, その解は重ね合わせの形 : $U(x,t) = \int \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{\lambda t}\Psi(x;\lambda)$ で書くことができる. ここで, ベクトル関数 $\Psi(x;\lambda)$ は, 常微分方程式 :

$$\Psi_{xxx} + 2\phi\Psi_x + \phi_x\Psi = \lambda\Psi, \tag{3.26}$$

の解である. (3.26) は, Kaup–Kupershmidt 方程式に付随する散乱問題と同じ形をしているが, これは偶然ではない (文献 [5] を参照).

3.3 系 (3.3)

新しいスカラー変数 w, ベクトル変数 W を,

$$\begin{cases} w = -u_x - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\langle U, U\rangle, \\ W = U_x + uU, \end{cases}$$

によって定義すると (Miura 型の変換), これらは,

$$\begin{cases} w_t = -3\langle W, W_x\rangle, \\ W_t = W_{xxx} + w_x W + 2wW_x, \end{cases}$$

をみたす. この系は, W のスケーリングにより, 結合型 Drinfel'd–Sokolov 系 (2.1) に一致する.

系 (3.1) との関係 : また別のスカラー変数 v を, $v = u_x - u^2 + \langle U, U\rangle$ によって導入すると, (3.3) は, v, U に対する系として書き直すことができる :

$$\begin{cases} v_t = (3v\langle U, U\rangle + 3\langle U, U_{xx}\rangle - 3\langle U, U\rangle^2)_x, \\ U_t = U_{xxx} + v_x U + vU_x - 3\langle U, U_x\rangle U. \end{cases} \tag{3.27}$$

(3.27) において, ポテンシャル化：$v = \hat{u}_x$ を考えることで, (3.1)($u \to \hat{u}$ とした系) を得る.

3.4 系 (3.4)

この系は, 結合型 Ito 方程式 (2.3) のポテンシャル形に過ぎない.

3.5 系 (3.5)

新しいスカラー変数 w, ベクトル変数 W を,

$$\begin{cases} w = u_x + \frac{a}{2}\langle U, U\rangle, \\ W = \sqrt{\langle U, U\rangle}U, \end{cases}$$

によって定義すると, これらは,

$$\begin{cases} w_t = w_{xxx} + 6ww_x + (b - \frac{a^2}{4})\langle W, W\rangle_x, \\ W_t = 2(wW)_x, \end{cases} \tag{3.28}$$

をみたす. $b \neq \frac{a^2}{4}$ のとき, (3.28) は, 変数のスケーリングにより, 結合型 Ito 方程式 (2.3) と一致する. $b = \frac{a^2}{4}$ のとき, (3.28) は, KdV 方程式と, KdV に依存した係数を持つ線形方程式からなる, 三角型の系である. この系が, 無限個の対称性を持つことは, 文献 [15] で示されている.

3.6 系 (3.6)

この系は, Jordan KdV 方程式 (2.2) のポテンシャル形に過ぎない.

3.7 系 (3.7)

この系は, (3.19) と変数変換を通じてつながっているので, 可積分性については, 3.19 章でまとめて議論する.

3.8 系 (3.8)

この系は, (3.20) と変数変換を通じてつながっているので, 可積分性については, 3.20 章でまとめて議論する.

3.9 系 (3.9)

スカラー変数 w を, $w = u_x + 2\langle U, U\rangle$ によって定義すると, w は KdV 方程式：

$$w_t = w_{xxx} + 2ww_x, \tag{3.29a}$$

をみたす．従って, (3.9) は三角型の系である．$u_x = w - 2\langle U, U\rangle$ を U の式に代入すると,

$$U_t = 4U_{xxx} + w_x U + 2wU_x, \tag{3.29b}$$

を得るが, これは, KdV 方程式に対する, Lax 表示の時間部分と同じである．

3.10 系 (3.10)

この系は, (3.21) と変数変換を通じてつながっているので, 可積分性については, 3.21 章でまとめて議論する．

3.11 系 (3.11)

スカラー変数 w を, $w = -u_x + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\langle U, U\rangle$ によって定義すると, w は KdV 方程式：

$$w_t = w_{xxx} - 3ww_x,$$

をみたす．従って, (3.11) は三角型の系である．$\frac{1}{2}\langle U, U\rangle = -u_x + \frac{1}{2}u^2 - w$ を, u の式に代入すると,

$$u_t = -2u_x^2 + u^2u_x - 3wu_x - w_x u - w_{xx}, \tag{3.30}$$

を得る．KdV 方程式の解 $w(x,t)$ が与えられたときに, この式を, u について解けるかどうかは不明である．

もっとも簡単な, $w(x,t) = 0$ の場合, (3.30) は (変数のスケーリングの後),

$$u_t = u_x(u_x - u^2), \tag{3.31}$$

に落ちる．(3.31) 式は, 無限個の可換な対称性：

$$u_{t_n} = u_x(u_x - u^2)^n, \quad n \in \mathbb{R},$$

を持つので, 対称性の意味で可積分である．一階の方程式であるが, 一般解の具体的な表示はわかっていない．

3.12　系 (3.12)

u の方程式, 及び $\langle U,U\rangle$ の従う方程式は, 系 (3.11) の場合と全く同じである. このため, 同じ様に w を定義すると, w は KdV 方程式をみたし, u は (3.30) 式に従う. 系 (3.11) と系 (3.12) の唯一の違いは, U に対する方程式を, u,w を用いて線形に書き直した時の, 式の形にある.

3.13　系 (3.13)

スカラー変数 w を, $w=-u_x+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}\langle U,U\rangle$ によって定義すると, w は KdV 方程式：

$$w_t = w_{xxx} - 3ww_x,$$

をみたす. 従って, (3.13) は三角型の系である.

$\frac{1}{2}\langle U,U\rangle = -u_x+\frac{1}{2}u^2-w$ を, u の式と U の式, それぞれに代入すると,

$$\begin{cases} u_t = -(wu+w_x)_x, \\ U_t = -(wU)_x, \end{cases} \tag{3.32}$$

を得る. いずれも線形で, $w(x,t)=0$ の場合は, 自明な式に落ちる.

3.14　系 (3.14)

スカラー変数 w を, $w=-u_x+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}\langle U,U\rangle$ によって定義すると, w は KdV 方程式：

$$w_t = w_{xxx} - 3ww_x, \tag{3.33a}$$

をみたす. 従って, (3.14) は三角型の系である. $\frac{1}{2}\langle U,U\rangle = -u_x+\frac{1}{2}u^2-w$ を u の式に代入すると,

$$u_t = -u^2u_x + \frac{1}{2}u^4 - w_{xx} + wu_x - w_xu - 2wu^2 + 2w^2, \tag{3.33b}$$

を得る.

系 (3.33) は, (少なくとも) 2つの高階対称性を持つので, 可積分であると思われる. 最初の高階対称性は,

$$\begin{cases} w_t = w_{xxxxx} - 5ww_{xxx} - 10w_xw_{xx} + \frac{15}{2}w^2w_x, \\ u_t = -\frac{1}{2}u^4w + 2u^2w^2 - 2w^3 + u^2wu_x - \frac{1}{2}w^2u_x - u^3w_x + 5uww_x \\ \qquad + 2uu_xw_x + 3w_x^2 - u^2w_{xx} + 5ww_{xx} + u_xw_{xx} - uw_{xxx} - w_{xxxx}, \end{cases}$$

で与えられ, これは, $w=0$とおくと消えてしまう. 二番目の高階対称性についても, 同様である. 一方, (3.33b) は, リダクション$w=0$により, 非自明な式：

$$u_t = -u^2 u_x + \frac{1}{2}u^4,$$

に落ちる. コンピューターを使って調べた限り, この方程式は, 高階対称性を持たないようである.

従って, 可積分であると思われる系のリダクションにより, 高階対称性を持たない(?)方程式が得られた. 可積分性とは何かを考える上で, (3.33)は, 興味深い系であろう.

3.15　系(3.15)

スカラー変数wを, $w=-u_x+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}\langle U,U\rangle$ によって定義すると, wは KdV方程式：

$$w_t = w_{xxx} - 3ww_x,$$

をみたす. 従って, (3.15)は三角型の系である.

$\frac{1}{2}\langle U,U\rangle = -u_x + \frac{1}{2}u^2 - w$を, uの式とUの式, それぞれに代入すると,

$$\begin{cases} u_t = -w_x u - \frac{1}{2}wu^2 - w_{xx} + w^2, \\ U_t = -\frac{1}{2}(w_x + wu)U, \end{cases}$$

を得る. $w(x,t)$が与えられた時, $u(x,t)$の従う方程式は, xをfixしてみると, Riccati方程式である. $w(x,t)$と$u(x,t)$が得られたならば, Uの式を積分することができる：

$$U(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_0^t (w_x + wu)\mathrm{d}t'} U(x,0).$$

3.16　系(3.16)

$(N+1)$-成分ベクトルWを, $W=(u,U)$で定義すると, 系(3.16)は, 一本のベクトル方程式：

$$W_t = W_{xxx} + \langle W,W\rangle W_x,$$

に書くことができる. このベクトルmKdV方程式が, 可積分であることは良く知られている(例えば, 文献[16, 17]を参照).

3.17 系 (3.17)

$(N+1)$-成分ベクトル W を, $W=(u,U)$ で定義すると, 系 (3.17) は, 一本のベクトル方程式：

$$W_t = W_{xxx} + \langle W, W\rangle W_x + \langle W, W_x\rangle W,$$

に書くことができる. このベクトル mKdV 方程式も, 良く知られており, 文献 [18] で, Lax 形式に書けることが示されている.

3.18 系 (3.18)

この系は, Jordan mKdV 方程式として既に知られている [10]. mKdV 方程式の行列拡張：

$$Q_t = Q_{xxx} - 3(Q_x Q^2 + Q^2 Q_x),$$

が可積分であることは良く知られているが, 特に,

$$Q = u\mathbf{1} + \sum_{j=1}^{N} U_j \mathbf{e}_j, \quad \{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}_+ = -2\delta_{ij}\mathbf{1},$$

とおくことで, (3.18) を得る.

系 (2.2), (3.6) との関係：新しいスカラー変数 w, ベクトル変数 W を,

$$\begin{cases} w = \pm u_x - u^2 + \langle U, U\rangle, \\ W = U_x \mp 2uU, \end{cases}$$

によって定義すると (Miura 型の変換), これらは, Jordan KdV 方程式 (2.2)：

$$\begin{cases} w_t = w_{xxx} + 3(w^2 - \langle W, W\rangle)_x, \\ W_t = W_{xxx} + 6(wW)_x, \end{cases} \tag{3.34}$$

をみたす. また, (3.34) のポテンシャル化を考えることで, 系 (3.6) を得る.

3.19 系 (3.19)

(3.19) が, Lax 形式に書けることを示そう. まず, 以下の線形方程式系を考える：

$$\boldsymbol{\psi}_x = U\boldsymbol{\psi}, \qquad \boldsymbol{\psi}_t = V\boldsymbol{\psi}, \tag{3.35}$$

$$U = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\zeta I_l & Q \\ R & \mathrm{i}\zeta I_m + P \end{pmatrix}, \tag{3.36a}$$

$$V = \left(\begin{array}{l|l} -4\mathrm{i}\zeta^3 I_l - 2\mathrm{i}\zeta QR & 4\zeta^2 Q + 2\mathrm{i}\zeta(Q_x + QP) - Q_{xx} \\ \quad + Q_x R - QR_x + 2QPR & \quad - 2Q_x P - QP_x + 2QRQ - QP^2 \\ \hline 4\zeta^2 R + 2\mathrm{i}\zeta(-R_x + PR) & 4\mathrm{i}\zeta^3 I_m + 2\mathrm{i}\zeta RQ - P_{xx} + R_x Q \\ \quad - R_{xx} + P_x R + 2PR_x & \quad - RQ_x + P_x P - PP_x + 2PRQ \\ \quad + 2RQR - P^2 R & \quad + 2RQP - P^3 - 3g_x P \end{array}\right). \tag{3.36b}$$

ζはスペクトルパラメータ, I_lとI_mは, $l \times l$と$m \times m$の単位行列, Q, R, Pは行列変数, gは任意のスカラー関数である. Lax対(3.36)を, (3.35)の無矛盾条件：$U_t - V_x + UV - VU = O$ に代入すると, 3本の行列mKdV方程式：

$$\begin{cases} Q_t + Q_{xxx} + 3(Q_x P)_x - 3Q_x RQ - 3QRQ_x \\ \quad + 3Q_x P^2 + 3QP_x P - 3g_x QP = O, \\ R_t + R_{xxx} - 3(PR_x)_x - 3R_x QR - 3RQR_x \\ \quad + 3P^2 R_x + 3PP_x R + 3g_x PR = O, \\ P_t + P_{xxx} + 3(g_x P)_x - 3(PRQ + RQP)_x \\ \quad + 3PP_x P + 3P^2 RQ - 3RQP^2 = O, \end{cases} \tag{3.37}$$

を得る. (3.37)が, 転置に関するリダクション：$R = {}^tQ$, ${}^tP = -P$ を許すことに注意して,

$$Q = (u, W_1, \ldots, W_N) \equiv (u, W), \quad R = \begin{pmatrix} u \\ W_1 \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ {}^tW \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & W_1 & \cdots & W_N \\ -W_1 & & & \\ \vdots & & O & \\ -W_N & & & \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & W \\ -{}^tW & O \end{pmatrix},$$

とおく. すると, (3.37) は, 以下の系に帰着する:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} - 6u^2u_x - 6u_x\langle W, W\rangle - 6u\langle W, W_x\rangle \\ \qquad + 3g_x\langle W, W\rangle - 3\langle W_x, W\rangle_x = 0, \\ W_t + W_{xxx} + 3(u_xW)_x - 3ug_xW - 3uu_xW \\ \qquad - 3u^2W_x - 3\langle W, W\rangle W_x - 9\langle W, W_x\rangle W = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{3.38}$$

ここで, $g = u$, $W = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}U$ とおき, t の符号を変えると, (3.38) は系 (3.19) に一致する.

系 (3.7) との関係: 新しいスカラー変数 v を, $v = u_x - u^2 + \frac{1}{3}\langle U, U\rangle$ によって導入すると, (3.19) は, v, U に対する系として, 書き直すことができる:

$$\begin{cases} v_t = (v_{xx} + 3v^2 + v\langle U, U\rangle + \langle U, U_{xx}\rangle)_x, \\ U_t = U_{xxx} + 3v_xU + 3vU_x + \langle U, U_x\rangle U. \end{cases} \tag{3.39}$$

(3.39) において, ポテンシャル化: $v = \hat{u}_x$ を考えることで, (3.7)($u \to \hat{u}$ とした系) を得る.

3.20 系 (3.20)

新しいスカラー変数 w を, $w = u_x - u^2$ によって導入することで, (3.20) は, 以下の系に書き換えられる:

$$\begin{cases} w_t = w_{xxx} + 6ww_x + w_x\langle U, U\rangle + 2w\langle U, U\rangle_x + \frac{1}{2}\langle U, U\rangle_{xxx}, \\ U_t = U_{xxx} + 6(wU)_x + \langle U, U\rangle U_x + 2\langle U, U\rangle_x U. \end{cases} \tag{3.40}$$

(3.40) は, 高階 Jaulent–Miodek 方程式 [19] の新しい多成分拡張である. 以下, (3.40) が Lax 形式に書けることを示そう. 線形方程式系:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\psi}_{xx} + (Q + \zeta R)\boldsymbol{\psi} = \zeta^2\boldsymbol{\psi}, \\ \boldsymbol{\psi}_t = (4\zeta^2 I + 2\zeta R + 2Q + \frac{3}{2}R^2)\boldsymbol{\psi}_x - [\zeta R_x + Q_x + \frac{3}{4}(R^2)_x]\boldsymbol{\psi}, \end{cases} \tag{3.41}$$

を考える. ζ はスペクトルパラメータ, Q と R は, 同じサイズの正方行列である. (3.41) に対して, 無矛盾条件: $\boldsymbol{\psi}_{xxt} = \boldsymbol{\psi}_{txx}$ を考えると, 2本の行列方程式:

$$\begin{cases} Q_t = Q_{xxx} + 3(Q^2)_x + \frac{3}{4}(R^2)_{xxx} + \frac{3}{2}R^2Q_x \\ \qquad + \frac{3}{4}[Q(R^2)_x + 3(R^2)_xQ], \\ R_t = R_{xxx} + 3(QR + RQ)_x + \frac{3}{4}[3(R^2)_xR + R(R^2)_x + 2R^2R_x], \end{cases} \tag{3.42}$$

と，1つの制約条件：$[Q, R^2] = O$ を得る．特に，

$$Q = w\mathbf{1}, \quad R = \frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{i}\sum_{j=1}^{N} U_j \mathbf{e}_j, \quad \{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}_+ = -2\delta_{ij}\mathbf{1},$$

とおくと，制約条件は自動的にみたされ，行列方程式 (3.42) は，系 (3.40) に帰着する．

系 (3.8) との関係：また別のスカラー変数 v を，$v = u_x - u^2 + \frac{1}{6}\langle U, U\rangle$ によって導入すると，(3.20) は，v, U に対する系として書き直すことができる：

$$\begin{cases} v_t = (v_{xx} + 3v^2 + 2v\langle U, U\rangle + \langle U, U_{xx}\rangle + \frac{1}{2}\langle U_x, U_x\rangle)_x, \\ U_t = U_{xxx} + 6v_x U + 6vU_x + 2\langle U, U_x\rangle U. \end{cases} \tag{3.43}$$

(3.43) において，ポテンシャル化：$v = \hat{u}_x$ を考えることで，(3.8)($u \to \hat{u}$ とした系) を得る．

3.21 系 (3.21)

新しいスカラー変数 w，ベクトル変数 W を，

$$\begin{cases} w = u_x + u^2 + \frac{1}{6}\langle U, U\rangle, \\ W = U_x + 2uU, \end{cases}$$

によって定義すると (Miura 型の変換)，これらは，

$$\begin{cases} w_t = w_{xxx} - 6ww_x + 2\langle W, W_x\rangle, \\ W_t = -2W_{xxx} + 6wW_x, \end{cases}$$

をみたす．この系は，変数のスケーリングにより，結合型 Hirota–Satsuma 方程式 (2.4) と一致する．

系 (3.10) との関係：また別のスカラー変数 v を，$v = u_x - u^2 - \frac{1}{6}\langle U, U\rangle$ によって導入すると，(3.21) を，v, U に対する系として書き直すことができる：

$$\begin{cases} v_t = (v_{xx} + 3v^2 + 4v\langle U, U\rangle + 2\langle U, U_{xx}\rangle + \langle U_x, U_x\rangle + \frac{2}{3}\langle U, U\rangle^2)_x, \\ U_t = -2U_{xxx} - 6v_x U - 6vU_x - 4\langle U, U_x\rangle U. \end{cases} \tag{3.44}$$

(3.44) において，ポテンシャル化：$v = \hat{u}_x$ を考えることで，(3.10)($u \to \hat{u}$ とした系) を得る．

3.22 系 (3.22)

この系は, 2 階の方程式系：

$$\begin{cases} u_\tau = \frac{1}{3}(1+2a)(u_{xx}+2uu_x) + \frac{4}{3}\langle U, U_x\rangle, \\ U_\tau = U_{xx} + \frac{1}{3}(1-a)u_xU + uU_x + \frac{1}{12}(1-4a)u^2U - \frac{1}{3}\langle U, U\rangle U, \end{cases} \tag{3.45}$$

の 3 階の対称性である. 変数変換：

$$\begin{cases} w = \mathrm{e}^{\int^x u\mathrm{d}x'}, \\ W = U\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int^x u\mathrm{d}x'}, \end{cases} \tag{3.46}$$

により, 2 つの系 (3.45), (3.22) は, (ほぼ) 線形化される：

$$\begin{cases} w_\tau = \frac{1}{3}(1+2a)w_{xx} + \frac{2}{3}\langle W, W\rangle, \\ W_\tau = W_{xx}, \end{cases} \tag{3.47}$$

$$\begin{cases} w_t = aw_{xxx} + \langle W, W\rangle_x, \\ W_t = W_{xxx}. \end{cases} \tag{3.48}$$

$a=1$ の場合, 更に変換：$W = V_x$, $w + \frac{1}{3}\langle V, V\rangle = v$ を考えることで, 完全に線形化することができる. $a = -\frac{1}{2}$ の場合, (3.47) の w の式を積分することができ,

$$w(x,\tau) = \frac{2}{3}\int^\tau \langle W(x,\tau'), W(x,\tau')\rangle\,\mathrm{d}\tau',$$

を得る. 同様に, $a=0$ の場合, (3.48) の w の式を積分することができる. a の値がこれら以外のとき, (3.47) と (3.48) を, (Green 関数等を持ち出さずに) 綺麗に解くことができるかどうかは, 不明である.

3.23 系 (3.23)

この系は, (3.22) において, t, U のスケーリングを変えてから, $a \to \infty$ の極限をとることで得られる. このことから類推される通り, (3.23) は, 2 階の方程式系：

$$\begin{cases} u_\tau = u_{xx} + 2uu_x + 2\langle U, U_x\rangle, \\ U_\tau = -\frac{1}{2}u_xU - \frac{1}{2}u^2U - \frac{1}{2}\langle U, U\rangle U, \end{cases} \tag{3.49}$$

の 3 階の対称性である.

２つの系 (3.49), (3.23) は, (3.22) の場合と全く同じ変換 (3.46) により,

$$\begin{cases} w_\tau = w_{xx} + \langle W, W \rangle, \\ W_\tau = \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_t = w_{xxx} + \langle W, W \rangle_x, \\ W_t = \mathbf{0}, \end{cases}$$

にうつされる．更に, 変換：$\langle W, W \rangle = g''(x)$, $w + g(x) = v$ を考えることで, 完全に線形化することができる．

3.24　系 (3.24)

この系は, ２階の方程式系：

$$\begin{cases} u_\tau = u_{xx} + 2uu_x + \langle U, U_x \rangle, \\ U_\tau = \frac{1}{2} u_x U + uU_x, \end{cases} \tag{3.50}$$

の３階の対称性である．系 (3.50) について考えてみよう．スカラー変数 w を, $w = \frac{1}{2}\langle U, U \rangle$ によって定義すると, (3.50) から, ２成分 Burgers 方程式：

$$\begin{cases} u_\tau = u_{xx} + 2uu_x + w_x, \\ w_\tau = (uw)_x, \end{cases} \tag{3.51}$$

を得る．従って, (3.50) は, ２成分 Burgers 方程式 (3.51) と, U に対する線形方程式からなる三角型の系である．

(3.51) 式の自明でない解 $u(x,\tau)$, $w(x,\tau)$ が与えられたとき, 残された U に対する方程式：

$$(U_j^2)_\tau = (uU_j^2)_x, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

は, 結合型 Ito 方程式 (2.3) の場合と同様に, 解くことができる．

従って, 問題は, ２成分 Burgers 方程式 (3.51) の可積分性である．(3.51) が無限個の可換な対称性を持つことは, 文献 [20] で示されている．しかし残念ながら, (3.51) に対する線形化変換, 一般解, あるいは fake でない Lax 表示等を見つけることはできなかった．代わりに, 文献 [5] では, 進行波解について調べた．

3.25 系 (3.25)

U が 1 成分ベクトル, 即ちスカラー変数のときは, 系 (3.25) は, 系 (3.24) と一致する. しかし, (3.24) とは異なり, (3.25) は 2 階の対称性を持たない. 3.24 章と同様に, $w = \frac{1}{2}\langle U, U\rangle$ とおくと, (3.25) から, 2 成分 Burgers 方程式 (3.51) の 3 階の対称性を得る. 従って, 主な問題は, 2 成分 Burgers 方程式 (3.51) の階層をどうやって解くかだが...

4 結合型 Ibragimov–Shabat 方程式

紙数の都合上, 一般形は省略するが, 次の定理が成り立つ.

定理 4.1 Ibragimov–Shabat 型の重みづけのもとで, 5 階の対称性を持つ 3 階のスカラー・ベクトル結合系は, 変数のスケーリングにより, 以下の 2 つの系のどちらかと一致する:

$$\left\{\begin{aligned} u_t &= (a+1)(u_{xxx} + 3u^2u_{xx} + 9uu_x^2 + 3u^4u_x + 3u_{xx}\langle U, U\rangle \\ &\quad + 6u_x\langle U, U_x\rangle + 3u_x\langle U, U\rangle^2) + 2au\langle U, U_{xx}\rangle + (2a+3)u\langle U_x, U_x\rangle \\ &\quad + (10a+6)u_xu^2\langle U, U\rangle + 2au^3\langle U, U_x\rangle + 6au\langle U, U\rangle\langle U, U_x\rangle \\ &\quad + au^5\langle U, U\rangle + 2au^3\langle U, U\rangle^2 + au\langle U, U\rangle^3, \\ U_t &= U_{xxx} + 3\langle U, U\rangle U_{xx} + 6\langle U, U_x\rangle U_x + 3\langle U_x, U_x\rangle U + 3\langle U, U\rangle^2 U_x \\ &\quad - 2au_{xx}uU + (a+3)u_x^2U + 6uu_xU_x + 3u^2U_{xx} - 6au_xu^3U \\ &\quad + 3u^4U_x - 2au_xu\langle U, U\rangle U - 4au^2\langle U, U_x\rangle U + 6u^2\langle U, U\rangle U_x \\ &\quad - au^6U - 2au^4\langle U, U\rangle U - au^2\langle U, U\rangle^2U, \qquad a : \text{arbitrary}, \end{aligned}\right. \tag{4.1}$$

$$\left\{\begin{aligned} u_t &= u_{xxx} + 3u^2u_{xx} + 9uu_x^2 + 3u^4u_x + 3u_{xx}\langle U, U\rangle + 6u_x\langle U, U_x\rangle \\ &\quad + 2u\langle U, U_{xx}\rangle + 2u\langle U_x, U_x\rangle + 10u_xu^2\langle U, U\rangle + 2u^3\langle U, U_x\rangle \\ &\quad + 3u_x\langle U, U\rangle^2 + 6u\langle U, U\rangle\langle U, U_x\rangle + u^5\langle U, U\rangle + 2u^3\langle U, U\rangle^2 \\ &\quad + u\langle U, U\rangle^3, \\ U_t &= -2u_{xx}uU + u_x^2U - 6u_xu^3U - 2u_xu\langle U, U\rangle U - 4u^2\langle U, U_x\rangle U \\ &\quad - u^6U - 2u^4\langle U, U\rangle U - u^2\langle U, U\rangle^2U. \end{aligned}\right. \tag{4.2}$$

□

(4.1), (4.2) 共に $U = \mathbf{0}$ とおくことが可能で, この点からみると, どちらも Ibragimov–Shabat 方程式の拡張になっている. また, (4.1) は, $u = 0$ とおけ

ば, ベクトル Ibragimov–Shabat 方程式 [21]：

$$U_t = U_{xxx} + 3\langle U, U\rangle U_{xx} + 6\langle U, U_x\rangle U_x + 3\langle U_x, U_x\rangle U + 3\langle U, U\rangle^2 U_x,$$

に帰着する.

4.1 系 (4.1)

(4.1) が, 保存則：$(u^2 + \langle U, U\rangle)_t = (\cdots)_x$ を持つことに注目する (紙数の都合上, flux は省略). 変数変換：

$$\begin{cases} w = u\mathrm{e}^{\int^x (u^2 + \langle U,U\rangle)\mathrm{d}x'}, \\ W = U\mathrm{e}^{\int^x (u^2 + \langle U,U\rangle)\mathrm{d}x'}, \end{cases} \tag{4.3}$$

を考えると, w と W に対する一対の線形方程式：

$$\begin{cases} w_t = (a+1)w_{xxx}, \\ W_t = W_{xxx}, \end{cases}$$

を得る.

4.2 系 (4.2)

(4.2) が, 保存則：$(u^2 + \langle U, U\rangle)_t = (\cdots)_x$ を持つことに注目する. 4.1 章と同じ変数変換 (4.3) を考えると, 線形方程式と自明な式の対：

$$\begin{cases} w_t = w_{xxx}, \\ W_t = \mathbf{0}, \end{cases}$$

を得る.

5 おわりに

- スカラー変数とベクトル変数の結合系について, コンピューターを使って, 高階対称性を持つ場合をしらみつぶしに求めた.
- 得られた１つ１つの系について考察を加え, 多くの場合に, Lax 形式に書ける, 線形化可能である, など何らかの意味で可積分といえることを示した. 一方で, (3.31) 式や, 2 成分 Burgers 方程式 (3.51) のように, 解き方がわからない方程式も出てきた.

- 3通りの重みづけの中で, 特にmKdV型の場合が, 可積分系の数も多く, 性質も多様であることが判明した (はっきりした理由は不明).
- スカラー変数1つ・ベクトル変数1つの系を考えたために, スカラー変数2つの系等と比べ, 2つの系をつなぐ変数変換を探すのが容易であった (形がかなり限られるため).
- 近年, コンピューター性能の進歩などにより, 可積分系の完全なリストを作る研究が盛んに行われている (例えば, 文献[21–27] を参照). 当研究は, これらの研究 (の一部) の延長上にあるものである ([5] で詳述).

参考文献

[1] Sanders J A and Wang J P 1998 On the integrability of homogeneous scalar evolution equations *J. Diff. Eq.* **147** 410–434

[2] Olver P J, Sanders J A and Wang J P 2001 Classification of symmetry-integrable evolution equations *CRM Proc. Lecture Notes* **29** 363–372

[3] Ibragimov N H and Shabat A B 1980 Infinite Lie–Bäcklund algebras *Func. Anal. Appl.* **14** 313–315

[4] Sanders J A and Wang J P 2001 On the integrability of systems of second order evolution equations with two components *Preprint*

[5] Tsuchida T and Wolf T 2002 Classification of polynomial integrable systems of mixed scalar and vector evolution equations *Preprint*

[6] Wilson G 1982 The affine Lie algebra $C_2^{(1)}$ and an equation of Hirota and Satsuma *Phys. Lett.* A **89** 332–334

[7] Drinfel'd V G and Sokolov V V 1985 Lie algebras and equations of Korteweg–de Vries type *J. Sov. Math.* **30** 1975–2036

[8] Konopelchenko B and Strampp W 1992 New reductions of the Kadomtsev–Petviashvili and two-dimensional Toda lattice hierarchies via symmetry constraints *J. Math. Phys.* **33** 3676–3686

[9] Sidorenko J and Strampp W 1993 Multicomponent integrable reductions in the Kadomtsev–Petviashvili hierarchy *J. Math. Phys.* **34** 1429–1446

[10] Svinolupov S I 1993 Jordan algebras and integrable systems *Func. Anal. Appl.* **27** 257–265

[11] Ito M 1982 Symmetries and conservation laws of a coupled nonlinear wave equation *Phys. Lett.* A **91** 335–338

[12] Kupershmidt B A 1985 A coupled Korteweg–de Vries equation with dispersion *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** L571–L573

[13] Bogolyubov N N and Prikarpatskii A K 1986 Complete integrability of the nonlinear Ito and Benney–Kaup systems: Gradient algorithm and Lax representation *Theor. Math. Phys.* **67** 586–596

[14] Hirota R and Satsuma J 1981 Soliton solutions of a coupled Korteweg–de Vries equation *Phys. Lett.* A **85** 407–408

[15] van der Kamp P H 2002 On proving integrability *Inver. Probl.* **18** 405–414

[16] Iwao M and Hirota R 1997 Soliton solutions of a coupled modified KdV equations *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** 577–588

[17] Tsuchida T and Wadati M 1998 The coupled modified Korteweg-de Vries equations *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** 1175–1187

[18] Konopelchenko B G 1983 Nonlinear transformations and integrable evolution equations *Fortschr. Phys.* **31** 253–296

[19] Jaulent M and Miodek I 1976 Nonlinear evolution equations associated with 'energy-dependent Schrödinger potentials' *Lett. Math. Phys.* **1** 243–250

[20] Ma W X 1993 A hierarchy of coupled Burgers systems possessing a hereditary structure *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** L1169–L1174

[21] Sokolov V V and Wolf T 2001 Classification of integrable polynomial vector evolution equations *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** 11139–11148

[22] Sokolov V V and Wolf T 1999 A symmetry test for quasilinear coupled systems *Inver. Probl.* **15** L5–L11

[23] Foursov M V 2000 On integrable coupled Burgers-type equations *Phys. Lett.* A **272** 57–64

[24] Foursov M V 2000 Classification of certain integrable coupled potential KdV and modified KdV-type equations *J. Math. Phys.* **41** 6173–6185

[25] Karasu(Kalkanli) A 1997 Painlevé classification of coupled Korteweg–de Vries systems *J. Math. Phys.* **38** 3616–3622

[26] Sakovich S Yu 1999 Coupled KdV equations of Hirota–Satsuma type *J. Nonlin. Math. Phys.* **6** 255–262

[27] Sakovich S Yu and Tsuchida T 2000 Symmetrically coupled higher-order nonlinear Schrödinger equations: singularity analysis and integrability *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 7217–7226