数理解析研究所講究録 1303 巻 2003 年 24-27

Parabolic subgroups of Coxeter groups and their boundaries

宇都宮大学教育学部

保坂 哲也 (Tetsuya Hosaka)

ここでは，有限生成な無限 Coxeter 群の parabolic 部分群とその境界の研究を目的としている．まず，Coxeter 群と parabolic 部分群の定義を与える．

有限集合 S と写像 $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ で次の条件をみたすものを考える．

(1) すべての $s, t \in S$ について $m(s,t) = m(t,s)$,

(2) すべての $s \in S$ について $m(s,s) = 1$,

(3) 相異なるすべての $s, t \in S$ について $m(s,t) \geq 2$.

このような S と m によって

$$W = \langle\, S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \text{ for } s, t \in S \,\rangle$$

と表現される群 W を **Coxeter 群**とよび，(W, S) の組を **Coxeter 系**と呼ぶ．Coxeter 系 (W, S) と S の部分集合 T に対して，W_T を T によって生成される W の部分群とする．このとき (W_T, T) は再び Coxeter 系となる ([1])．このような W_T を **parabolic 部分群**とよぶ．

この分野に関して近年，M. Bestvina, M. W. Davis, A. N. Dranishnikov らによっていくつかの興味深い結果が示されている．それらの結果について特に注目すべきことは，Coxeter 系 (W, S) から定義されるある simplicial complex $L(W, S)$ と CAT(0) 空間 $\Sigma(W, S)$ を調べることによって Coxeter 群に関する情報を得ているということである．まず，この $L(W, S)$ と $\Sigma(W, S)$ について紹介する．

Coxeter 系 (W, S) に対して，$L(W, S)$ は次で定義される．

(1) $L(W, S)$ の頂点集合を S とする．

(2) 空でない S の部分集合 T について，W_T が有限のときに限り T が $L(W, S)$ の simplex を張るとする．

次に $\Sigma(W, S)$ を定義する．離散位相を入れた W と $L(W, S)$ の cone $CL(W, S)$ の基底空間 $|CL(W, S)|$ の積 $W \times |CL(W, S)|$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める:

$(w_1, x_1), (w_2, x_2) \in W \times |CL(W,S)|$ について

$$(w_1, x_1) \sim (w_2, x_2) \iff x_1 = x_2 \text{ and } w_1^{-1} w_2 \in W_{V(x_1)},$$

ただし $V(x) = \{s \in S \mid x \in \mathrm{St}(s, \mathrm{sd}\, L(W,S))\}$. ここで, $\mathrm{St}(s, \mathrm{sd}\, L(W,S))$ は $L(W,S)$ の重心細分 $\mathrm{sd}\, L(W,S)$ における s の closed star をあらわす. このとき,

$$\Sigma(W,S) = W \times |CL(W,S)| / \sim$$

と定義する.

Coxeter 群 W は $\Sigma(W,S)$ に自然に作用し, $\Sigma(W,S)/W = |CL(W,S)|$ となる. また $\Sigma(W,S)$ 上にある距離を定めると CAT(0) 空間となることが, G. Moussong によって示されている ([11]). Coxeter 群 W が無限であるとき, $\Sigma(W,S)$ は non-compact となり, CAT(0) 空間の境界 $\partial\Sigma(W,S)$ を付け加えることにより, $\Sigma(W,S)$ のコンパクト化が得られる ([2]). この境界 $\partial\Sigma(W,S)$ を **Coxeter 系 (W,S) の境界**とよぶ. Coxeter 群 W は自然に境界 $\partial\Sigma(W,S)$ に作用する. Coxeter 系の境界の位相が, Coxeter 群によって決定されるかどうかは未解決な問題である ([7]).

ここで, $S_0 \subset S$ に対して, 自然な包含関係

$$\Sigma(W_{S_0}, S_0) \subset \Sigma(W,S)$$
$$\partial\Sigma(W_{S_0}, S_0) \subset \partial\Sigma(W,S)$$

が存在する.

Coxeter 群の parabolic 部分群に関する結果を述べる前に, いくつか定義と補題を与える.

Definition 1. Coxeter 系 (W,S) と $T \subset S$ について, W の部分集合 A_T を次で定める:

$$A_T := \{w \in W \mid \ell(wt) > \ell(w) \text{ for all } t \in T\},$$

ここで $\ell(w)$ は w の S に関する word の length を表す.

Definition 2. Coxeter 系 (W,S) について, $W = W_T \times W_{S \setminus T}$ となる空でない真部分集合 $T \subset S$ が存在しないとき, (W,S) は**既約**であるという.

$L(W,S)$ を詳しく調べることにより次の補題を得た.

Lemma 3. 既約 *Coxeter* 系 (W,S) と S の真部分集合 T に対して, もし W_T が無限ならば, $A_T s \cap W_T$ が無限となる $t \in S \setminus T$ が存在する.

Coxeter 群の良く知られた性質から次を得る:

Lemma 4. *Coxeter* 系 (W,S) と $T \subset S$ に対して，等式

$$[W : W_T] = |A_T|$$

が成り立つ.

Lemmas 3 と Lemma 4 から直ちに次の定理が得られる:

Theorem 5. 既約な *Coxeter* 系 (W,S) について，W が無限ならば，W は自分自身以外に指数が有限な *parabolic* 部分群を持たない.

いま，Coxeter 系 (W,S) の既約分解を考える．すなわち，S の分割 $\{S_1 \ldots, S_r\}$ で，$W = W_{S_1} \times \cdots \times W_{S_r}$ となり，各 (W_{S_i}, S_i) が規約となるものを考える．ここで，

$$\tilde{S} = \bigcup \{S_i \mid W_{S_i} \text{ は無限群 }\}$$

と定義する.

Theorem 5 から，一般の Coxeter 系について，指数が有限な parabolic 部分群の中で最小となるものを決定することができる.

Corollary 6. $W_{\tilde{S}}$ は，(W,S) における指数が有限な *parabolic* 部分群で最小なものである．よって，$T \subset S$ について，$[W : W_T] < \infty$ ならば次が成り立つ.

(1) $\tilde{S} \subset T$.
(2) $W_T = W_{\tilde{S}} \times W_{T \setminus \tilde{S}}$.
(3) $[W : W_{S_0}] = |W_{S \setminus \tilde{S}}| / |W_{T \setminus \tilde{S}}|$.

また，Lemma 3 の応用として，既約な Coxeter 系の境界に関して次の定理を得た.

Theorem 7. 既約 *Coxeter* 系 (W,S) と真部分集合 $T \subset S$ について，$\partial\Sigma(W_T, T)$ が空でないならば，$\partial\Sigma(W_T, T)$ は W*-invariant* ではない.

Sketch of proof. $\partial\Sigma(W_T, T)$ が W-invariant でないことを示すためには

$$w\alpha \notin \partial\Sigma(W_T, T)$$

となる $w \in W$ と $\alpha \in \partial\Sigma(W_T, T)$ の存在を示せばよい.

Lemma 3 から，$A_T s \cap W_T$ が無限となる $s \in S \setminus T$ が存在する．このとき

$$s^{-1} A_T^{-1} \cap W_T = (A_T s \cap W_T)^{-1} \subset W_T \subset \Sigma(W_T, T).$$

従って，列 $\{w_i\} \subset s^{-1} A_T^{-1} \cap W_T$ で境界上の点 $\alpha \in \partial\Sigma(W_T, T)$ に収束するものが存在する．いま $\xi : [0, \infty) \to \Sigma(W, S)$ を，$\xi(0) = 1, \xi(\infty) = \alpha$ をみたす geodesic ray とする．ここで，各 i について $d(w_i, \mathrm{Im}\,\xi) < M$ となる M が存在するように，列 $\{w_i\}$ をとることができる．このとき，$w_i \in s^{-1}A_T^{-1}$ という性質から，

$$d_\ell(sw_i, W_T) = d_\ell(sw_i, 1) = \ell(sw_i).$$

これは，列 $\{sw_i\}$ の収束先 $s\alpha$ が $\partial\Sigma(W_T, T)$ に属さないことを示している．従って，$\partial\Sigma(W_T, T)$ は W-invariant ではない．□

更に上述の定理の一般化として次の定理を得た:

Theorem 8. *Coxeter* 系 (W, S) と部分集合 $T \subset S$ について次は同値:

(1) $W = W_{\tilde{T}} \times W_{S \setminus \tilde{T}}$;
(2) $\partial\Sigma(W_T, T)$ は W*-invariant.*

この Theorem において，(1) が Coxeter 群の parabolic 部分群の代数的な性質であるのに対して，(2) は parabolic 部分群の境界における位相的な性質である．

References

[1] N.Bourbaki, *Groupes et Algebrès de Lie*, Chapters IV-VI, Masson, Paris, 1981.
[2] M.R.Bridson and A.Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
[3] M.W.Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. **117** (1983), 293–324.
[4] M.W.Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, in Handbook of geometric topology (Edited by R.J.Daverman and R.B.Sher), North-Holland, Amsterdam, 2002, pp.373–422.
[5] M.W.Davis, *The cohomology of a Coxeter group with group ring coefficients*, Duke Math. J. **91 (no.2)** (1998), 297–314.
[7] A.N.Dranishnikov, *On boundaries of hyperbolic Coxeter groups*, Topology Appl. **110 (no.1)** (2001), 29–38.
[8] M.Gromov, Hyperbolic groups, in Essays in group theory (S. M. Gersten, ed.), M.S.R.I. Publ. 8, 1987, pp. 75-264.
[9] T.Hosaka, *Parabolic subgroups of finite index in Coxeter groups*, J. Pure Appl. Algebra **169** (2002), 215–227.
[10] J.E.Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.
[11] G.Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph.D. thesis, The Ohio State University, 1988.