数理解析研究所講究録 1303 巻 2003 年 28-39

Characterizations of spaces having a compactification with a certain infinite-dimensional property

埼玉大学教育学部
木村 孝 (Takashi Kimura)

静岡大学大学院理工学研究科
菰田智恵子 (Chieko Komoda)

1 準備

この小論で考える概念の定義を述べる。はじめに、被覆次元の partition による同値命題を無限次元に拡張した A-weakly infinite-dimensional 及び、S-weakly infinite-dimensional の定義を述べる。

定義 1.1. 正規空間 X に対し、

X : *A-weakly infinite-dimensional* (以下、A-w.i.d. と略記する)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\{(A_i, B_i) : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of pairs of disjoint closed subsets of X

$\exists\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of closed subsets of X

s.t. L_i : a partition between A_i and B_i $(i \in \mathbb{N})$, $\underline{\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i = \emptyset}$

X : *S-weakly infinite-dimensional* (以下、S-w.i.d. と略記する)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\{(A_i, B_i) : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of pairs of disjoint closed subsets of X

$\exists\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of closed subsets of X

s.t. L_i : a partition between A_i and B_i $(i \in \mathbb{N})$, $\underline{\bigcap_{i=1}^{n} L_i = \emptyset \quad \text{for some } n}$

次に、被覆次元の Ostrand による特徴付けを無限次元に拡張した C-space 及び、finite C-space の定義を述べる。

定義 1.2. 正規空間 X に対し、

X : *C-space*(Addis and Gresham [1])

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\{\mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of open covers of X

$\exists\{\mathcal{H}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of collections of pairwise disjoint open subsets of X

s.t. $\mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i \quad (i \in \mathbb{N})$, $\underline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i : \text{cover of } X}$

このとき、$\{\mathcal{H}_i : i \in \mathbb{N}\}$ を *C-refinement* of $\{\mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N}\}$ と呼ぶ。

X : *finite C-space*(Borst [3])
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\{\mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of <u>finite</u> open covers of X
$\exists\{\mathcal{H}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of collections of pairwise disjoint open subsets of X
s.t. $\mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i \quad (i \in \mathbb{N})$, $\underline{\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i : \text{cover of } X \text{ for some } n}$

このとき、$\{\mathcal{H}_i : i \in \mathbb{N}\}$ を *finite C-refinement* of $\{\mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N}\}$ と呼ぶ。

A-w.i.d.、S-w.i.d.、C-space、finite C-space の関係については、「S-w.i.d. $\Longrightarrow$ A-w.i.d.」が成り立つことは明らかである。また、「コンパクト空間 X に対して、X : S-w.i.d. $\Longleftrightarrow$ X : A-w.i.d. 及び、X : C-space $\Longleftrightarrow$ X : finite C-space」が成り立つことも明らかである。さらに、「C-space $\Longrightarrow$ A-w.i.d.」及び、「finite C-space $\Longrightarrow$ S-w.i.d. 」が成り立つことが知られている。

2 はじめに

次元論におけるコンパクト化定理について考察する。この節では考える空間は全てチコノフ空間であると仮定する。

まず、はじめに、Stone-Čech のコンパクト化を考える。有限次元の例として被覆次元 dim を考え、無限次元の例として S-w.i.d. を考えることとする。

<u>Stone-Čech compactification</u>

空間 X に対し、次が成り立つ。

$$\dim X \leq n \Longrightarrow \dim \beta X \leq n$$

$$X : S\text{-}w.i.d. \Longrightarrow \beta X : S\text{-}w.i.d.$$

この逆を考える。dim に関しては、「空間 X に対し、$\dim \beta X \leq n \Longrightarrow \dim X \leq n$ 」が成り立つ。S-w.i.d. は正規空間に対して定義されているが、βX が S-w.i.d. であっても X は正規空間となるとはかぎらないので、X は正規空間であると仮定する。「正規空間 X に対し、βX : *S-w.i.d.* $\Longrightarrow$ X : *S-w.i.d.* 」が成り立つ。

βX の weight は X の weight よりも大きくなることが多いので、次に、weight 保存のコンパクト化について考える。

<u>weight-preserving compactification</u>

空間 X に対し、次が成り立つ。

(1) $\dim X \leq n \quad \Longrightarrow \quad \exists \alpha X$: *compactification*
s.t. $\dim \alpha X \leq n, \quad w(\alpha X) = w(X)$

（2） X : S-$w.i.d.$ $\Longrightarrow$ $\exists \alpha X$: *compactification*

$\quad$ *s.t.* αX : S-$w.i.d.$, $w(\alpha X) = w(X)$

次に、この逆が成り立つかどうかを考えたい。

問題 (1) 空間 X に対し、

$$\begin{array}{lcl} \exists \alpha X : \text{compactification} & \overset{?}{\Longrightarrow} & \dim X \leq n \\ \quad \text{s.t. } \dim \alpha X \leq n,\ w(\alpha X) = w(X) & & \end{array}$$

問題 (2) 正規空間 X に対し、

$$\begin{array}{lcl} \exists \alpha X : \text{compactification} & \overset{?}{\Longrightarrow} & X : S\text{-w.i.d.} \\ \quad \text{s.t. } \alpha X : S\text{-w.i.d.},\ w(\alpha X) = w(X) & & \end{array}$$

問題 (1) について　可分距離化可能空間のクラスでは、問題（1）は肯定解を持つ。
実際、weight 保存のコンパクト化 αX で $\dim \alpha X \leq n$ を満たすものが存在したと仮定する。このとき、$n \geq \dim \alpha X = \mathrm{ind}\, \alpha X \geq \mathrm{ind} X = \dim X$ となる。

しかし、空間 X が可分距離化可能空間でなければ成り立たない例がある。

例 2.1.(Roy's example) Roy は、$\mathrm{ind} X = 0$ かつ $\dim X = 1$ となる距離空間 X を構成した。
このとき、$\mathrm{ind} X = 0$ より、X は $D^{\mathfrak{M}}$ に埋め込める。但し、$D = \{0,1\}, \mathfrak{M} = w(X)$ とする。$\alpha X = \mathrm{Cl}_{D^{\mathfrak{M}}} X$ とおけば、$0 \leq \dim \alpha X \leq \mathrm{ind}\, \alpha X = 0$ より、$\dim \alpha X = 0$ となる。また、$w(\alpha X) = \mathfrak{M} = w(X)$ であることは明らかである。

問題 (2) について　可分距離化可能空間であっても成り立たない例がある。

例 2.2. $X = \bigoplus_{n=1}^{\infty} I^n$ は S-w.i.d. ではないが、その一点コンパクト化 ωX は S-w.i.d. である。このとき、$w(\omega X) = w(X) = \omega$ であることは明らかである。

3　S-w.i.d. なコンパクト化を持つ空間の特徴付け　その 1

前節で見たように、空間 X が S-w.i.d. ならば weight 保存の S-w.i.d. なコンパクト化を持つが、この逆は成り立たない。そこで、weight 保存の S-w.i.d. なコンパクト化を持つ空間の特徴付けを考えたい。

問題 3.1. 空間 X に対し、

X : ? $\Longleftrightarrow$ $\exists \alpha X$: compactification

$\quad$ s.t. αX : S-w.i.d., $w(\alpha X) = w(X)$

特に、例2.2より、可分距離化可能空間に対しても、S-w.i.d. であることは、weight 保存の S-w.i.d. なコンパクト化を持つ空間の特徴付けにならない。従って、可分距離化可能空間に限って上の問題を考えることとしたい。

問題 3.2. 可分距離化可能空間 X に対し、

X : ? $\Longleftrightarrow \exists \alpha X$: compactification
s.t. αX : S-w.i.d., $w(\alpha X) = w(X)$

以下、考える空間は全て可分距離化可能空間であるとし、コンパクト化は全て距離化可能なコンパクト化であると仮定する。

問題3.2は、Borst が次のような解答を与えた。

定義 3.3.(Borst [2]) 空間 X に対し、

X : *small w.i.d.*
$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \mathcal{B}$: countable base for X
s.t.
(1) $\mathcal{B}$ は、finite union について閉じている
(2) $\forall \{(B_{i1}, B_{i2}) : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of pairs of elements of $\mathcal{B}$
with $\mathrm{Cl}B_{i1} \cap \mathrm{Cl}B_{i2} = \emptyset$ $(i \in \mathbb{N})$
$\exists \{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of closed subsets of X
s.t. L_i : a partition between $\mathrm{Cl}B_{i1}$ and $\mathrm{Cl}B_{i2}$ $(i \in \mathbb{N})$, $\bigcap_{i=1}^{n} L_i = \emptyset$ for some n

定理 3.4.(Borst [2]) 空間 X に対し、

X : small w.i.d. $\Longleftrightarrow \exists \alpha X$ *: compactification s.t.* αX *:* S*-w.i.d.*

4 C-spaceとなるコンパクト化を持つ空間の特徴付け その1

我々は、C-spaceとなるコンパクト化を持つ空間の特徴付けを与えたい。

問題 4.1. 空間 X に対し、

X : ? $\Longleftrightarrow \exists \alpha X$: compactification s.t. αX : C-space

コンパクト空間 X に対しては, X : C-space $\Longleftrightarrow X$: finite C-space となるので、問題4.1は次と同じである。

問題 4.2. 空間 X に対し、

X : ? $\Longleftrightarrow \exists \alpha X$: compactification s.t. αX : finite C-space

最初に、C-space となるコンパクト化を持つための十分条件を考えてみよう。

2 節で、空間 X が S-w.i.d. であることが S-w.i.d. なコンパクト化を持つための十分条件であると述べた。

同様に、空間 X が finite C-space であることが finite C-space となるコンパクト化を持つための十分条件であることが証明される。

しかし、空間 X が finite C-space であることは必要条件ではない。例 2.2 でとりあげた $X = \bigoplus_{n=1}^{\infty} I^n$ は S-w.i.d. ではないので finite C-space とはならないが、その 1 点コンパクト化 ωX は finite C-space であることが証明できる。

2 節において、Borst が S-w.i.d. なコンパクト化を持つ空間の特徴付けをある特別な base の存在によって与えたことを紹介した。そこで、finite C-space となるコンパクト化を持つ空間の特徴付けをある特別な base の存在によって与えることができないだろうか。

我々は、まず、次の条件 $(\sharp)$ を満たす base $\mathcal{B}$ を考えた。

$(\sharp)$ $\exists \mathcal{B}$: countable base for X
s.t.
(1) $\mathcal{B}$ は、finite intersection について閉じている
(2) $\forall \{\mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of finite open covers of X with $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{B}$ $(i \in \mathbb{N})$
$\exists \{\mathcal{H}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of collectios of pairwise disjoint open subsets of X
s.t. $\mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i$ $(i \in \mathbb{N})$, $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$: cover of X for some n

しかし、条件 $(\sharp)$ は、finite C-space となるコンパクト化を持つ空間の特徴付けとはならない。実際、空間 X がコンパクトでなければ有限部分被覆を持たない開被覆 $\mathcal{U}$ が存在する。$\mathcal{U}$ を細分する base $\mathcal{B}$ をとれば $\mathcal{B}$ の有限部分集合族で被覆となるものは存在しないので条件（2）が満たされる。さらに、条件（1）を満たすように base $\mathcal{B}$ をとりなおすことは容易なので、空間 X がコンパクトでなければ条件 $(\sharp)$ を満たす base $\mathcal{B}$ はつねに存在する。例えば、空間 X として $\mathbb{R}^\omega$ を考えると条件 $(\sharp)$ を満たすが、$\mathbb{R}^\omega$ は Hilbert cube I^ω を含むので finite C-space となるコンパクト化は存在しない。従って、条件 $(\sharp)$ は、finite C-space となるコンパクト化を持つための十分条件にはならないので、特徴付けとはならない。そこで、条件 $(\sharp)$ を次のように修正する。

定義 4.3. $\mathcal{A}$: collection of subsets of X に対し、
$\mathcal{A}$: *separating*
$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in X, \forall F$: closed subset of X $(x \notin F)$ に対して、
$\exists A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ s.t. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $x \in A_1, F \subset A_2$

X : *small C-space*
$\overset{def}{\iff} \exists\mathcal{B}$: countable separating collection of open subsets of X
s.t.
(1) $\mathcal{B}$ は、finite intersection について閉じている
(2) $\forall\{\mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of finite open covers of X with $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{B}$ $(i \in \mathbb{N})$
$\exists\{\mathcal{H}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of collectios of pairwise disjoint open subsets of X
s.t. $\mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i$ $(i \in \mathbb{N})$, $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$: cover of X for some n

我々は次の結果を得た。

定理 4.4. 空間 X に対し、
X : *small C-space* $\iff \exists\alpha X$: *compactification* *s.t.* αX : *finite C-space*

証明の概略 $\Longrightarrow$ について

証明には、次に挙げる基本的な定理を用いる。

定理 (Schurle [8])
X : *Čech complete* $\Longrightarrow \exists\alpha X$: *compactification* *s.t.* $\alpha X - X$: *countable-dimesional*

我々は、次の補題を証明した。

補題 $\forall X$: *small C* に対して、$\exists\tilde{X}$: *Čech completion s.t.* $\tilde{X}$: *small C*

定理 (Schurle) より、
$\exists\alpha\tilde{X}$: compactification of $\tilde{X}$ s.t. $\alpha\tilde{X} - \tilde{X}$: countable-dimesional

となる。$\alpha\tilde{X}$ は X のコンパクト化でもあるので、$\alpha\tilde{X}$ が finite C-space であることを示せばよい。

$\forall\mathcal{G}_i$: finite open cover of $\alpha\tilde{X}$ $(i \in \mathbb{N})$ とする。

$\alpha\tilde{X} - \tilde{X}$: C-space より、
$\exists\tilde{\mathcal{H}}_{2i-1}$: collection of pairwise disjoint open subsets of $\alpha\tilde{X}$ $(i \in \mathbb{N})$
s.t. $\tilde{\mathcal{H}}_{2i-1} < \tilde{\mathcal{G}}_{2i-1}$ $(i \in \mathbb{N})$, $\bigcup\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{H}}_{2i-1} \supset \alpha\tilde{X} - \tilde{X}$

$K \overset{def}{=} \alpha\tilde{X} - \bigcup\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{H}}_{2i-1}$ とおけば、K : compact subset of $\tilde{X}$ である。
$\tilde{X}$: small C より、K : C-space となるので、
$\exists\tilde{\mathcal{H}}_{2i}$: collection of pairwise disjoint open subsets of $\alpha\tilde{X}$ $(i \in \mathbb{N})$
s.t. $\tilde{\mathcal{H}}_{2i} < \tilde{\mathcal{G}}_{2i}$ $(i \in \mathbb{N})$, $\bigcup\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{\mathcal{H}}_{2i} \supset K$ for some n

以上より、$\{\tilde{\mathcal{H}}_i : i \in \mathbb{N}\}$: C-refinement of $\{\tilde{\mathcal{G}}_i : i \in \mathbb{N}\}$ となるので、$\alpha\tilde{X}$ は C-space である。$\alpha\tilde{X}$ はコンパクトなので finite C-space である。

$\Longleftarrow$ について

証明には、次に挙げる定理を用いる。

定理 (Misra [6]) 可分距離空間 X に対して、*closure-distributive base* $\mathcal{B}$ が存在する。
(但し、$\mathcal{B}$: *closure-distributive* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall B_1, ...\forall B_n \in \mathcal{B}$ に対して、
$$\mathrm{Cl}B_1 \cap ... \cap \mathrm{Cl}B_n = \mathrm{Cl}(B_1 \cap ... \cap B_n)\ )$$

$\exists \alpha X$: compactification of X s.t. αX : finite C-space とする。

定理 (Misra) より、

$\exists \tilde{\mathcal{B}}$: countable closure-distributive base for αX
s.t. $\tilde{\mathcal{B}}$ は finite intersection について閉じている

となる。さらに、$\tilde{\mathcal{B}}$ を次のようにとりなおす。

$\mathcal{B}' \overset{def}{=} \{\alpha X - \mathrm{Cl}_{\alpha X}\tilde{B} : \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}\}$ とおき、$\mathcal{B} \overset{def}{=} \mathcal{B}'|X = \{B' \cap X : B' \in \mathcal{B}'\}$ とおくと、$\mathcal{B}$ が求める base となる。よって、X : small C となる。

5 C-space となるコンパクト化を持つ空間の特徴付け その2

我々は前節で C-space となるコンパクト化を持つ空間の特徴付けを与えたが、Borst は別の特徴付けを与えているので紹介する。はじめに、C-space の定義に立ち還る。C-space は Haver [5] によって距離空間に対して定義された。

定義 5.1. (Haver [5]) 距離空間 (X, d) に対し、
(X, d) : *C-space in the sense of Haver* (以下、C-space(Haver) と略記する)
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}\}$ $(\varepsilon_i > 0)$
$\exists\{\mathcal{H}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of collections of pairwise disjoint open subsets of X
s.t. $\forall H \in \mathcal{H}_i$ に対して、$d(H) < \varepsilon_i$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i$: cover of X

距離空間 (X, d) に対しては、Haver の意味での C-space と Addis と Gresham の意味での C-space の２つが定義されている。C-space と C-space(Haver) の関係は次のようである。

容易にわかることとして次が挙げられる。

命題 5.2. 距離空間 (X, d) に対し、
X : C-space $\Longrightarrow$ (X, d) : C-space(Haver)

コンパクト距離空間 (X,d) に対しては逆も成り立つ。

命題 5.3. コンパクト距離空間 (X,d) に対し、
X : *C-space* $\Longleftrightarrow$ (X,d) : *C-space(Haver)*

空間がコンパクトでなければ逆は成り立たない。

例 5.4. R. Pol は、w.i.d. なコンパクト距離空間 Y と、A-w.i.d. ではない Y の部分距離空間 X を構成した。

この空間 X は C-space(Haver) であるが C-space ではない。実際、空間 Y は C-space であることもわかるので、上の命題から Y は C-space(Haver) となり、その部分空間 X も C-space(Haver) となる。一方、X は A-w.i.d. ではないので C-space ではない。

Borst は、C-space(Haver) を拡張し、次の定義を与えた。

定義 5.5.(Borst [3]) 空間 X に対し、

X : *C-Ha-space*
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists d$: metric on X s.t. (X,d) : C-space(Haver)

X : *finite C-Ha-space*
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists d$: metric on X
s.t.
$\forall\{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}\}$ $(\varepsilon_i > 0)$
$\exists\{\mathcal{H}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of collections of pairwise disjoint open subsets of X
s.t. $\forall H \in \mathcal{H}_i$ に対して、$d(H) < \varepsilon_i$, $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$: cover of X for some n

Borst は finite C-Ha-space であることが C-space となるコンパクト化を持つための必要十分条件であることを証明した。

定理 5.6.(Borst [3]) 空間 X に対し、
X : *finite C-Ha-space* $\Longleftrightarrow$ $\exists\alpha X$: *compactification s.t.* αX : *finite C-space*

6 S-w.i.d. なコンパクト化を持つ空間の特徴付け その2

前節で、Borst は特別な距離の存在によって C-space となるコンパクト化を持つ空間の特徴付けを与えたことを紹介した。従って、S-w.i.d. なコンパクト化を持つ空間の特徴付けを特別な距離の存在によってできないかという問題が自然に考えられる。我々は、次の結果を得た。

定義 6.1. 空間 X に対し、

X : μ-S-*w.i.d.*

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists d$: totally bounded metric on X

s.t.

$\forall\{(E_i, F_i) : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of pairs of closed subsets of X with $d(E_i, F_i) > 0$

$\exists\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of closed subsets of X

s.t. L_i : a partition between E_i and F_i $(i \in \mathbb{N})$, $\bigcap_{i=1}^{n} L_i = \emptyset$ for some n

定理 6.2. 空間 X に対し、

X : μ-S-*w.i.d.* $\Longleftrightarrow \exists \alpha X$: *compactification s.t.* αX : S-*w.i.d.*

問題 6.3. μ-S-w.i.d. の定義において totally bounded 性を外しても定理 6.2 に対応する命題は成立するか？

7 countable-dimensional なコンパクト化を持つ空間の特徴付け

S-w.i.d. なコンパクト化を持つ空間の特徴付け、及び、C-space となるコンパクト化を持つ空間の特徴付けを与えたので、countable-dimensional なコンパクト化を持つ空間の特徴付けを与えたい。

問題 7.1. 空間 X に対し、

X : ? $\Longleftrightarrow \exists \alpha X$: *compactification s.t.* αX : *countable-dimensional*

問題 7.1 には次の解答が与えられている。

命題 7.2. 空間 X に対し、

X : *trind* を持つ $\Longleftrightarrow \exists \alpha X$: *compactification s.t.* αX : *countable-dimensional*

命題 7.2 は次の 2 つのよく知られた定理から容易にわかる。

定理 7.3. コンパクト空間 X に対し、

X : *countable-dimensional* $\Longleftrightarrow X$: *trind* を持つ

定理 7.4. 空間 X に対し、

X : *trind* を持つ $\Longrightarrow \exists \alpha X$: *compactification*

s.t. αX : *trind* を持つ

このように、countable-dimensional なコンパクト化を持つ空間の特徴付けが与えられるが、我々は、Borst 流に、特別な base の存在、あるいは、特別な距離の存在によって特徴付けることを考える。

はじめに、長田先生が、距離空間に対して、countable-dimensional である空間の特徴付けを次のように与えたので紹介する。

定理 7.5.(Nagata [7])　距離空間 X に対し（可分性を必要としない）、
X : *countable-dimensional*
$\Longleftrightarrow \forall\{(A_i, B_i) : i \in \mathbb{N}\}$: *a sequence of pairs of disjoint closed subsets of* X
$\exists\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: *a sequence of closed subsets of* X
s.t. L_i : *a partition between* A_i *and* B_i $(i \in \mathbb{N})$, $\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: *point-finite*

定理 7.5 を用いて、Borst 流に countable-dimensional なコンパクト化を持つ空間の特徴付けを与えたい。そのために、point-finite を次のように書き換える。

命題 7.6.　$\mathcal{A}$: collection of subsets of X に対し、
$\mathcal{A}$: *point-finite* $\Longleftrightarrow \forall\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ $(\mathcal{A}'$: *infinite*$)$ に対し、$\cap\mathcal{A}' = \cap\{A : A \in \mathcal{A}'\} = \emptyset$

特に、X : コンパクト、$\mathcal{A}$: collection of closed subsets of X のとき、さらに、次のように書き換えることができる。

命題 7.7.　X : コンパクト、$\mathcal{A}$: collection of closed subsets of X のとき、
$\mathcal{A}$: *point-finite* $\Longleftrightarrow$ $\forall\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ $(\mathcal{A}'$: *infinite*$)$ に対し、
$\exists\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$ *s.t.* $\mathcal{A}''$: *finite*, $\cap\mathcal{A}'' = \emptyset$

上の条件を満たす collection $\mathcal{A}$ は strongly point-finite と呼ばれる。すなわち、

定義 7.8.(Engelking and Pol [4])　$\mathcal{A}$: collection of subsets of X に対し、
$\mathcal{A}$: *strongly point-finite* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ $(\mathcal{A}'$: infinite$)$ に対し、
$\exists\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$ s.t. $\mathcal{A}''$: finite, $\cap\mathcal{A}'' = \emptyset$

コンパクト距離空間 X に対し、定理 7.5 はつぎのように書き換えることができる。

定理 7.9.　コンパクト距離空間 X に対し、
X : *countable-dimensional*
$\Longleftrightarrow \forall\{(A_i, B_i) : i \in \mathbb{N}\}$: *a sequence of pairs of disjoint closed subsets of* X
$\exists\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: *a sequence of closed subsets of* X
s.t. L_i : *a partition between* A_i *and* B_i $(i \in \mathbb{N})$
$\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: *strongly point-finite*

定理 7.9 を用いて、我々は、countable-dimensional なコンパクト化を持つ空間の特徴付けを次のように与えることができた。

定義 7.10. 空間 X に対し、

X : *small countable-dimensional*

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\mathcal{B}$: countable separating collection of open subsets of X

s.t.

(1) $\mathcal{B}$ は、finite union について閉じている

(2) $\forall\{(B_{i1}, B_{i2}) : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of pairs of subsets of $\mathcal{B}$

with $\mathrm{Cl}B_{i1} \cap \mathrm{Cl}B_{i2} = \emptyset$ $(i \in \mathbb{N})$

$\exists\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of closed subsets of X

s.t. L_i : a partition between $\mathrm{Cl}B_{i1}$ and $\mathrm{Cl}B_{i2}$ $(i \in \mathbb{N})$

$\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: strongly point-finite

定理 7.11. 空間 X に対し、

X : small countable-dimensional $\Longleftrightarrow$ $\exists\alpha X$: compactification

s.t. αX : countable-dimensional

問題 7.12. small countable-dimensional の定義において、「$\exists\mathcal{B}$: countable separating collection of open subsets of X」を「$\exists\mathcal{B}$: countable base for X」に代えても、上の定理は成立するか？

我々は、特別な距離の存在によっても countable-dimensional な コンパクト化を持つ空間の特徴付けを与えることができた。

定義 7.13. 空間 X に対し、

X : *μ-countable-dimensional*

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists d$: totally bounded metric on X

s.t.

$\forall\{(E_i, F_i) : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of pairs of closed subsets of X with $d(E_i, F_i) > 0$

$\exists\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of closed subsets of X

s.t. L_i : a partition between E_i and F_i $(i \in \mathbb{N})$

$\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: strongly point-finite

μ-countable-dimensional は、countable-dimensional なコンパクト化を持つ空間の特徴付けとなる。

定理 7.14. 空間 X に対し、

X : μ-countable-dimensional $\Longleftrightarrow$ $\exists\alpha X$: compactification

s.t. αX : countable-dimensional

参考文献

[1] D. F. Addis and J. H. Gresham, *A class of infinite-dimensional spaces, Part I: Dimension theory and Alexandroff's Problem*, Fund. Math. 101(1978), 195-205.

[2] P. Borst, *Spaces having a weakly infinite-dimensional compactification*, Top. Appl. 21(1985), 261-268.

[3] P. Borst, *Some remarks concerning C-spaces*, Preprint.

[4] R. Engelking and R. Pol, *Some characterizations of spaces that have transfinite dimension*, Top. Appl. 15(1983), 247-253.

[5] W. E. Haver, *A covering property for metric spaces*, Topology Conference at Virginia Polytechnic Institute 1973, Lecture Notes In Math. 375(1974), 108-113.

[6] A. K. Misra, *Some regular Wallman βX*, Indag. Math. 35(1973), 237-242.

[7] J. Nagata, *On countable-dimensional spaces*, Proc. Japan Acad. 34(1958), 146-149.

[8] A. W. Schurle, *Compactification of strongly countable-dimensional spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 136(1969), 25-32.