数理解析研究所講究録 1306 巻 2003 年 57-62

確率過程を考慮したネットワークデザインゲームについて

早稲田大学・商学部　毛利　裕昭 (Hiroaki Mohri)
School of Commerce,
Waseda University.

1　はじめに

本稿でとりあげる問題は，確率過程を考慮したネットワークデザイン問題を元にした費用配分ゲームである．Stocastic Game の問題を論じているのではないで，まずその点を明記しておく．

まず，予備知識としてネットワークデザイン問題そのものについて簡単に説明しておく．ノードとアークで構成されるあるグラフ（完全グラフなど）を想定する．グラフ上の各アークにはデザイン費用（アーク敷設の固定費用）と単位当たりのルーティング費用（フロー費用），フロー容量という属性がある．そして，グラフのノードペア（品種）に需要が与えられている．この需要を満たすという条件のもとで，最小費用で元のグラフ上にネットワークを構築する．つまり，元のグラフ上のどこアークを敷設するかを決定する問題である．拡張問題としては，敷設されたアークにどの程度のフローを流すかまでを決定する問題である．離散最適化問題の中でも施設配置問題や巡回セールスマン問題に比べ知名度は低いと思われるが，インターネット社会におけるネットワーク構築，ロジスティクスのネットワーク構築に応用をもつ現代社会では重要な最適化問題である．

本稿で取上げる問題は，確率過程の条件を付加した問題である．具体的な通信やコンピュータネットワークへの応用を意識した問題である．ノードはパケットの到着地点である．そして，パケットはある順番処理規則（例えば，FIFO）によって処理され，最終目的ノードに到着するまでにいくつかのノードを経てその各々のノードで処理を受けるという状況をネットワークに対して考慮することが特徴である．ここでは，各パケットのノードでの待ち時間，処理時間は費用換算できるとする．パケットのノードへの到着過程，待ち時間，処理時間に対しては，なんらかの確率過程を考えるのが一般的である．典型的なものは，パケットの到着間隔はポアソン分布に従い，処理時間は指数分布を考えるのが一番典型的なものである．つまり，ここで取上げる元の最適化問題は，待ち行列過程を考慮したネットワークデザイン問題である．この問題を元にした費用配分ゲームを考える．プレイヤーは，ノードペアとする．ノード自身もプレイヤーと考えることが直感的に分かり易いが，定式化からは結論を導くの際してはノードペアの方が適切と筆者が考えるからである．また，グラフ上で，需要に関してはすべてのノードペア集合を想定し，その各々の待ち行列過程を考慮したネットワークデザイン問題の最適値が特性関数値（提携値）とする

この研究は昨年度の京都大学数理解析研究所の「あいまいさと不確実性を含む状況の数理的意思決定」[9] で発表したものの続編である．しかし，読者が本稿を単独で読んで理解できるよう昨年度の考究録の内容を最小限引用する．昨年度が厳密

性を重視した解を考えていたのに対して今回では線形計画ゲームを用いた近似的な解を提案していることが一番大きな違いである．また，視点がネットワークということからはずれるが，ネットワークでない1つだけの待ち行列おける費用配分ゲームの研究自体が，研究発展途上の研究であることが著者のサーベイした範囲で判明したのでそのことについて若干述べる．

このような費用配分ゲームの解を求めるための困難さはゲームの元になる最適化問題の構造に大きく依存する．待ち行列を考慮しないネットワークデザイン問題でさえも，この離散最適化問題は計算の複雑性の理論でのNP-hardな問題であるため，解自身や解の特性を調べるのに大きな困難がともなう可能性があることはいうまでもない．プレイヤーの数がnであるとすると，協力ゲームの解であるShapley値，仁，カーネルなどを求めるためには特性関数値を2^n-1回求めなくてはならない．本稿でとりあげる問題は，待ち行列の要素が加わることで目的関数に非線形性が持ち込まれ一層の困難さを伴う問題となる．この複雑な問題への問題解決のアプローチとして，線形計画ゲームの考えを持ち込むことによって近似的に解を求めることが一番の主眼点である．

2　ネットワークデザイン問題研究の流れ

ベーシックなネットワークデザイン問題については，Wynants [11] が2001年に刊行した著作にこれまでの研究動向がまとめられている．しかし，本稿で取上げる待ち行列過程の条件はめ含まれていない．しかし，ネットワークデザイン問題における待ち行列の考慮は決して目新しいものではなく1970年代には問題提示がなされている．系内滞在時間を最小にするタイプのものでは1973年のFratta et.al [3] がある．一方，系内滞在時間を制約条件にした問題は，1977年にGerla and Kleinrock [5] によって提示されている．本稿では，Gavish and Altinkermer [4] が1990年に示したアークの敷設費用，ルーティング費用，系内滞在時間を費用換算した費用を目的関数に取り込んだモデルを元に考える．

3 記号

N	ノード集合
A	アーク集合
$G(N,A)$	グラフ
K	品種集合, $K \subseteq N \times N$
L	アークのタイプ集合
C_{ij}^l	アーク (i,j) の l タイプでのアーク容量
D	時間の費用換算係数
P^k	品種 k の取りうるパスの集合
δ_{ijp}^k	品種 k のパス p がアーク (i,j) を含む時 1，それ以外の時 0
c_{ij}	アーク (i,j) の単位ルーティング（フロー）費用
f_{ij}^l	アーク (i,j) に l タイプのアークを利用した時のデザイン（敷設）費用
x_{ij}	アーク (i,j) のフロー量変数, ベクトル表現　x
y_{ij}^l	アーク (i,j) のデザイン変数, ベクトル表現　y
z_p^k	品種 k のパス p におけるフロー量, ベクトル表現　z
ρ_{ij}	アーク (i,j) の利用率変数 ($x_{ij}/\sum_{l\in L} C_{ij}^l y_{ij}^l$), ベクトル表現　ρ

4 ネットワークデザイン問題おける系内滞在時間の考え方

待ち行列をネットワーク上で直感的に考えると，先に述べたように各ノード上でバッファを考えた待ち行列ネットワークを思い浮かべるのが一般的であろう．待ち行列ネットワークに関しては様々な研究がなされている．ここでは，基本となるネットワークデザイン問題をベースにして考えるため，直感的取り扱いは行わない．問題を解く上で，恣意的にノードではなくアークでのフローの系内滞在時間として捉え直す．尚，M/M/1 の場合だけを考慮する．上記の記号によって系内滞在時間を表現するとアーク (i,j) での系内滞在時間は，$x_{ij}/(C_{ij}-x_{ij})$ と表現される．

5 定式化

5.1 定式化 1

ここでは，解釈のし易い形での定式化を記述する．

$$\min \sum_{(i,j)\in A} \frac{Dx_{ij}}{\sum_{l\in L} C_{ij}^l y_{ij}^l - x_{ij}} + \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in A}\sum_{l\in L} f_{ij}^l y_{ij}^l \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{p\in P^k} z_p^k = d^k \quad \forall k \in K \tag{2}$$

$$x_{ij} = \sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} \delta_{ij}^k z_p^k \quad \forall (i,j) \in A \tag{3}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq \sum_{l \in L} C_{ij}^l y_{ij}^l \quad \forall (i,j) \in A \tag{4}$$

$$\sum_{l \in L} y_{ij}^l = 1 \quad \forall (i,j) \in A \tag{5}$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k, \forall k \in K \tag{6}$$

$$y_{ij}^l \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A, \forall l \in L \tag{7}$$

(2) は，各品種の需要が満たされることを示す．(3) は, アーク上のフロー量と品種が利用するパス上のフローの変換式である．(4) は，アーク上のフロー量が，使用するアークのタイプの容量以下であること示す.

5.2 定式化 2

定式化 1 は直感的にはわかり易いという利点をもつが，ρ_{ij} を用いることにより解法に結びついた定式化を行うことができる.

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \frac{D\rho_{ij}}{1-\rho_{ij}} + \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{l \in L} f_{ij}^l y_{ij}^l \tag{8}$$

subject to

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} \delta_{ij}^k z_p^k \leq \sum_{l \in L} C_{ij}^l y_{ij}^l \rho_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \tag{9}$$

$$0 \leq \rho_{ij} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A \tag{10}$$

(2),(5)〜(7)

6 本費用配分ゲームの近似的な解の方針

6.1 非線形項の線形化

定式化 1，定式化 2 のどちらで考えても，一番厄介なものは目的関数の第一項目にある非線形項である．しかし，この非線形項は定式化 2 で考察すると非線形項としてはそれほど難しい項ではない．分数によって表現される項は ρ_{ij} に関して凸関数になっている．これを **『区分線形近似』** をすることを考える．すると，この問題は混合整数計画問題に帰着することができる.

6.2 混合整数計画問題から線形計画問題へ

まず，上記の混合整数計画問題を全提携に対して一度解いて (7) の解を決定する．すると，グラフ上のどこにどのようなアークを敷設するかを決定できる．この考え方は，すべてのプレイヤーに逸脱者がいないという仮定による．すると y を定

数として取り扱うことができる．その上で定式化2を考察するととりもなおさずこれは線形計画問題であり，添え字kに注目すればこれは線形計画ゲームの特性関数の形をしていることがわかる．

6.3 線形計画ゲームによる近似解

線形計画ゲームは，様々なよい性質を持っている．元とする線形計画問題が実行可能解を持てばコアは非空であり，その双対問題を解くことによってコアに含まれる解を求めることができる．非線形項の区分線形近似の細かさによって解は動くことになるが，それは実際の適用問題のデータの精度の粗さによって解決できるものであると考える．そもそも，待ち行列をM/M/1だけに制限をおいていることだけでも近似していると言えるからである．

7 本研究成果の意義

7.1 非線形項を線形化しない厳密解の問題点

以前の筆者の研究では，Lagrange緩和を用いて全提携に対してこの非線形混合整数計画問題の厳密解を求め，その上で少なくとも，全体合理性，個人合理性を満たす解，つまりゲーム理論での「配分」となる解を求めることを考えた．実は「配分」を求める部分は独立して考えることができ問題の特性を生かしていなかった苦肉の策であった．さらには，この方法で得られる解が集合解になるため，唯一解に導く方針を考えたが凸多面体上の端点の数えあげアルゴリズムが，大規模問題にはネックになることが判明していた．

7.2 単純化することの意義

区分線形近似は非線形計画問題を取り扱う場合の最後の手段である．しかし，本稿での研究は，現実のコンピュータネットワーク構築の設計を考えた場合，非常に有効であると考える．ここであらわれる非線形項はそれほど重いものではない．簡単にコアにある解を近似的に求めることができる．

8 これからの研究の指針

8.1 限界貢献度を利用した解について

本研究発表での討論の中で,「厳密解を最初に求めておき，限界貢献度での配分解を考えてどうか?」というコメントをいただいた．この方法は，昨年の研究段階で考えていたが，やはり非線形混合整数計画問題を解く回数を一般的なゲームの解に比べて，プレイヤーの増加にしたがう指数的な増加を線形に抑えることができるものの大規模ネットワークにおいては厳しいと感じていた．

8.2 待ち行列ネットワーク研究成果を利用した解について

待ち行列ネットワークの研究は，非常に広く多岐にわたって研究されており．積形式解は美しい形であるため，筆者はその特徴を上手く利用する解を求める計算量の理論の上で効率的なアルゴリズムを構築できないかと悪戦苦闘していた．しかし，現状では他の項との処理の問題などがあり制約式との問題もなかなか解決できず暗礁にのったままである．

8.3 単一待ち行列ゲームについて

この研究をネットワークデザインの観点からのみ捉えていた為，テーマとして気付いていなかったが単一待ち行列ゲームについても十分な研究があまりないと筆者のサーベイしている範囲で分かった．Haviv[6] の Aumann-Shapley メカニズムを用いた研究などがある．Haviv の著書 [7] は，非協力ゲームの立場からの成果である．

●本研究発表は早稲田大学特定課題研究助成費 2002A-063 および科学研究費補助金（基礎研究（B)(2)）課題番号 13430017 の助成を受けた研究である．

参考文献

[1] J.M. Bilbao, *Cooperative On Combinatorial Structures*, Kluwer Academic, 2000.

[2] I. Curiel, *Cooperative Game Theory and Applications*, Kluwer Academic, 1997.

[3] L. Fratta, M. Gerla and L. Kleinrock, The Flow Deviation Method: An Approack to Store -and-foward Communication Network Design, *Networks*, Vol.3, pp.97-133, 1973.

[4] B. Gavish and K. Altinkermer, Backbone Network Design Tools with Economic Tradeoffs, *ORSA Journal on Computing*, Vol.2, pp.236-252, 1990.

[5] M. Gerla and L. Kleinrock, On The Topological Design of Distributed Computer Networks, *IEEE Transactions on Communications*, Vol.25, pp.48-60, 1977.

[6] M. Haviv, The Aumann-Shapley price mechanism for allocation cogestion cost, *Operation Reserch Letters*, Vol.29, pp.211-216, 2001.

[7] M. Haviv, *To Queue Or Not To Queue*, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[8] J. Kuipers, A Polynomial Time Algorithm for Computing the Nucleolus of Convex Games, *Maastricht University, Mathematics Reports in Operations Research and Syetems Theory*, Report M 96-12, pp.1-18, 1996

[9] 毛利裕昭, 確率的要素を考慮したネットワークデザイン問題とその費用配分について, **あいまいさと不確実性を含む数理的意思決定**, 京都大学数理解析研究所考究録 1252, pp.1-6, 2002

[10] 鈴木光男, **新ゲーム理論**, 勁草書房, 1994.

[11] C. Wynants, *Network Synthesis Problems*, Kluwer Academic, 2001.