

Variational Inequality Problems for Monotone Mappings

東京工業大学 情報理工学研究科 数理・計算科学専攻
豊田 昌史 (Toyoda Masashi)

Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

不動点理論においてよく知られている縮小写像の不動点定理は, その証明において, 不動点に収束する点列の構成方法をも示している (例えば [6] を見よ). そこでは, 任意の空間の点 x を初期点として, 写像 T による軌道を表す点列 x, Tx, T^2x, \dots が一意の不動点に収束することが示されている. ところが, 必ずしも縮小でない一般の写像 T においては, この点列が不動点に収束するとは限らない. そのため, 不動点の存在を示す研究とは別に, 不動点へ収束する点列の構成法に関する研究が進められている. 以下に示す非拡大写像の不動点に関する研究も, そのひとつである.

H を実 Hilbert 空間とし, K を H の閉凸部分集合とする. K 上の写像 T が非拡大であるとは,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in K)$$

が成り立つときをいう. T の不動点集合を $F(T)$ と書くことにする. 非拡大写像の不動点に関して, 存在と点列の構成法に関する両面で研究が進められている (例えば, [6, 7] 及びその参考文献を見よ). 不動点に収束する点列のひとつとして, つぎの Mann[5] タイプと呼ばれるものが知られている. 本研究においては, この Mann タイプについて扱う.

定理 1 ([2, 8] 参照). H を実 Hilbert 空間とし, K を H の閉凸部分集合とする. T を K から K への非拡大写像とし $F(T) \neq \emptyset$ とする. $\{x_n\}$ を

つぎのように構成する.

$$\begin{cases} x_0 = x \in K, \\ x_{n+1} = (1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n T x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

ここで $\{\lambda_n\} \subset [a, b]$, $a, b \in (0, 1)$ である. このとき $\{x_n\}$ はある不動点 $z \in F(T)$ に弱収束する.

不動点と関係の深い問題として, 変分不等式問題がある. 変分不等式問題とは, H の閉凸部分集合 K から H への写像 A に対して, つぎのような解 $u_0 \in K$ を見つける問題のことである.

$$\langle Au_0, v - u_0 \rangle \geq 0 \quad (\forall v \in K).$$

以降, このような u_0 全体のことを $VI(K, A)$ と書くことにする. 変分不等式問題は, 凸関数の最小化問題の抽象化である. 実際 f を K 上の凸で微分可能な汎関数とすると,

$$f(u_0) = \min_{v \in K} f(v) \iff u_0 \in VI(K, \nabla f)$$

が成り立つ. また, 変分不等式問題は不動点問題の抽象化にもなっている. 実際, T を K からそれ自身への写像とすると,

$$u_0 \in F(T) \iff u_0 \in VI(K, I - T)$$

が成り立つ. ここで I は H 上の恒等写像である. この変分不等式問題と不動点との関係に着目した, つぎのような問題を考えたい.

上で見たように, 非拡大写像の不動点への収束定理のひとつとして定理 1 がある. また, 変分不等式問題は不動点問題の抽象化である. それならば, 変分不等式問題の解への収束定理を構成し, その系として定理 1 を導出する, ということができないだろうか? 本稿では, この問題への取り組みに関して報告する.

2 主結果

まず問題となるのは, どのような性質をみたす写像 A に関する変分不等式問題 $VI(K, A)$ を扱うか, ということである. それは $A = I - T$ (T は K からそれ自身への非拡大写像) とおくときに満たされる性質でなくて

はならない. そこで, $A = I - T$ が持つ性質について調べてみた. $u, v \in K$ とするとき,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|Au - Av\|^2 &= \frac{1}{2}\|(u - v) - (Tu - Tv)\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|u - v\|^2 + \frac{1}{2}\|Tu - Tv\|^2 - \langle u - v, Tu - Tv \rangle \\ &\leq \|u - v\|^2 - \langle u - v, Tu - Tv \rangle \\ &= \langle u - v, Au - Av \rangle. \end{aligned}$$

である. これは $A = I - T$ が $\frac{1}{2}$ を係数にもつ逆強単調写像であることを示す. 実際, A が逆強単調写像であるとは, ある係数 $\alpha > 0$ が存在して, 任意の $u, v \in K$ に対して

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \alpha \|Au - Av\|^2 \quad (\forall u, v \in K)$$

を満たすことを言う ([3]). このとき更に $\lambda \leq 2\alpha$ ならば, $I - \lambda A$ は K から H への非拡大写像となる. 実際, つぎの計算からそれがわかる.

$$\begin{aligned} \|(I - \lambda A)u - (I - \lambda A)v\|^2 &= \|(u - v) - \lambda(Au - Av)\|^2 \\ &= \|u - v\|^2 - 2\lambda \langle u - v, Au - Av \rangle \\ &\quad + \lambda^2 \|Au - Av\|^2 \\ &\leq \|u - v\|^2 + \lambda(\lambda - 2\alpha) \|Au - Av\|^2. \quad (1) \end{aligned}$$

逆強単調写像 A に関する変分不等式問題を考えることで, つぎのような定理 2 を得ることができる. 定理 2 において $A = I - T$ (T は非拡大写像), $\alpha_n = 0$ とするとき, 定理 1 が導かれる.

定理 2. H を実 Hilbert 空間とし, K を H の閉凸部分集合とする. A を K から H への $\alpha > 0$ をその係数としてもつ逆強単調写像とし, $VI(K, A) \neq \emptyset$ とする. $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_0 = x \in K, \\ y_n = P_K(x_n - \lambda_n Ax_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

と構成する. ここで $\{\lambda_n\} \subset [a, b]$, $a, b \in (0, 2\alpha)$ でありまた, $\{\alpha_n\} \subset [0, c]$, $c \in (0, 1)$ である. このとき $\{x_n\}$ は変分不等式問題のある解 $z \in VI(K, A)$ に弱収束する.

ここで P_K は H から K への上への距離射影である. 距離射影の定義や性質に関しては, 例えば [6] を見よ. ここでは距離射影の持つ

$$\|P_K x - P_K y\|^2 \leq \langle P_K x - P_K y, x - y \rangle \quad (\forall x, y \in K) \quad (2)$$

$$u \in \text{VI}(K, A) \iff u = P_K(u - \lambda Au) \quad (\forall \lambda > 0) \quad (3)$$

等の性質が, 特に用いられる.

証明. $u \in \text{VI}(K, A)$ とする. $I - \lambda_n A$ は非拡大であることと, (3) より $u = P_K(u - \lambda_n Au)$ が成り立つことから,

$$\begin{aligned} \|y_n - u\| &= \|P_K(x_n - \lambda_n Ax_n) - P_K(u - \lambda_n Au)\| \\ &\leq \|(x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au)\| \\ &\leq \|x_n - u\| \end{aligned}$$

を得る. また (1) より

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u\|^2 &= \|\alpha_n(x_n - u) + (1 - \alpha_n)(y_n - u)\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|x_n - u\|^2 + (1 - \alpha_n) \|y_n - u\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|x_n - u\|^2 + (1 - \alpha_n) \{ \|x_n - u\|^2 \\ &\quad + \lambda_n(\lambda_n - 2\alpha) \|Ax_n - Au\|^2 \} \\ &= \|x_n - u\|^2 + (1 - \alpha_n) \lambda_n(\lambda_n - 2\alpha) \|Ax_n - Au\|^2 \\ &\leq \|x_n - u\|^2 + (1 - c) a(b - 2\alpha) \|Ax_n - Au\|^2 \\ &\leq \|x_n - u\|^2 \end{aligned}$$

を得る. それゆえ, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u\|$ が存在し, 更に $Ax_n - Au \rightarrow 0$ が成

り立つ. また $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は有界である. (2) より

$$\begin{aligned}
 \|y_n - u\|^2 &= \|P_K(x_n - \lambda_n Ax_n) - P_K(u - \lambda_n Au)\|^2 \\
 &\leq \langle y_n - u, (x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au) \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \|y_n - u\|^2 + \|(x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au)\|^2 \right. \\
 &\quad \left. - \|(y_n - u) - \{(x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au)\}\|^2 \right\} \\
 &\leq \frac{1}{2} \left\{ \|y_n - u\|^2 + \|x_n - u\|^2 \right. \\
 &\quad \left. - \|(y_n - x_n) + \lambda_n (Ax_n - Au)\|^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \|y_n - u\|^2 + \|x_n - u\|^2 - \|y_n - x_n\|^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2\lambda_n \langle y_n - x_n, Ax_n - Au \rangle - \lambda_n^2 \|Ax_n - Au\|^2 \right\}
 \end{aligned}$$

を得る. よって

$$\|y_n - u\|^2 \leq \|x_n - u\|^2 - \|y_n - x_n\|^2 - 2\lambda_n \langle y_n - x_n, Ax_n - Au \rangle - \lambda_n^2 \|Ax_n - Au\|^2$$

を得る. 結局

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - u\|^2 &\leq \alpha_n \|x_n - u\|^2 + (1 - \alpha_n) \|y_n - u\|^2 \\
 &\leq \|x_n - u\|^2 - (1 - \alpha_n) \|y_n - x_n\|^2 \\
 &\quad - 2\lambda_n (1 - \alpha_n) \langle y_n - x_n, Ax_n - Au \rangle \\
 &\quad - \lambda_n^2 (1 - \alpha_n) \|Ax_n - Au\|^2 \\
 &\leq \|x_n - u\|^2 - (1 - c) \|y_n - x_n\|^2 \\
 &\quad - 2\lambda_n (1 - \alpha_n) \langle y_n - x_n, Ax_n - Au \rangle \\
 &\quad - \lambda_n^2 (1 - \alpha_n) \|Ax_n - Au\|^2
 \end{aligned}$$

が成り立つ. また $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - u\|^2$ であり, $Ax_n - Au \rightarrow 0$ であるから $y_n - x_n \rightarrow 0$ を得る. さらに (1) より

$$\begin{aligned}
 0 &\leq a(2\alpha - b) \|Ax_n - Ay_n\|^2 \\
 &\leq \lambda_n (2\alpha - \lambda_n) \|Ax_n - Ay_n\|^2 \\
 &\leq \|x_n - y_n\|^2 - \|(I - \lambda_n A)x_n - (I - \lambda_n A)y_n\|^2 \\
 &\leq \|x_n - y_n\|^2
 \end{aligned}$$

であり,これから $Ax_n - Ay_n \rightarrow 0$ を得る. $\{x_n\}$ は有界なので, ある部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在して, ある K の元 z に弱収束する. このとき $z \in \text{VI}(K, A)$ である (詳しくは [9] を見よ).

いま $\{x_{n_j}\}$ を $\{x_{n_i}\}$ 以外のある部分列で $x_{n_j} \xrightarrow{w} z'$ をみたすものとする. このとき, 上と同様に $z' \in \text{VI}(K, A)$ である. $z = z'$ を示す. いま $z \neq z'$ とする. Hilbert 空間は Opial 条件 をみたす (例えば [6] を見よ) ことから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| &= \liminf_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z\| \\ &< \liminf_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z'\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z'\| = \liminf_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - z'\| \\ &< \liminf_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - z\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \end{aligned}$$

を得る. これは矛盾である. ゆえに $z = z'$ である. よって $x_n \xrightarrow{w} z \in \text{VI}(K, A)$ である. \square

3 おわりに

今回の研究では, (不動点定理で言うところの) Mann タイプと呼ばれる点列に関して, 変分不等式問題を扱った. 一方近年, 凸関数の最小化問題や変分不等式問題を (不動点定理で言うところの) Baillon タイプの点列で扱う研究がなされつつある [1, 4]. Baillon の定理も非拡大写像を扱っており, 逆強単調写像と関係が深い. 今回の研究を踏まえた上で, 変分不等式問題における Baillon タイプの点列に関して調べてみたいと考えている.

参考文献

- [1] Y. I. Alber, *On average convergence of the iterative projection methods*, Taiwanese J. Math. **6** (2002), 323–341.
- [2] W. G. Dotson, *On the Mann iterative process*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970) 65–73.
- [3] F. Liu and M. Z. Nashed, *Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates*, Set-valued Anal. **6** (1998), 313–344.

- [4] T. L. Magnanti and G. Perakis, *The orthogonality theorem and the strong- f -monotonicity condition for variational inequality algorithms*, SIAM J. Optim. **7** (1997), 248–273.
- [5] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.
- [6] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, 2000.
- [7] 高橋 渉『凸解析と不動点近似』横浜図書, 2000.
- [8] W. Takahashi and G.-E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Japonica **48** (1998) 1–9.
- [9] M. Toyoda, *Studies on nonexpansive mappings and monotone mappings in infinite dimensional spaces*, Doctor Thesis, Tokyo Institute of Technology, 2002.