

応募者数が一般化された一様分布の下での Gusein-Zade 問題

愛知大学経営学部 川合 益代 (Masuyo Kawai), 玉置 光司 (Mitsushi Tamaki)
Faculty of Business Administration, Aichi University

1 はじめに

最も単純な秘書問題は、以下のように記述できる。ある雇用者が 1 人の秘書を採用するために面接を行い、これに応募してきた n 人に毎時 1 人ずつ面接を行う。雇用者は、全応募者の中で最良 (best) の応募者を採用したいと考えており、実際に採用した応募者が最良のとき成功とみなす。このときの成功確率を最大にする政策とその下での成功確率を求める問題が古典的秘書問題である。ただし、雇用者は、最良の応募者から順に $1, 2, \dots, n$ と順位付けすることができ、面接を行ったら直ちにその応募者を採用するかまたは採用せずに次の応募者を面接するかを決定しなければならない。採用するか否かの意思決定は、応募者の相対順位 (今まで面接した中での順位) にのみ依存して行い、一度不採用にした応募者は、後で採用することができない。もし $(n-1)$ 番目の応募者まで採用しないならば、必ず最後の応募者を採用しなければならないものとする。ここでは、相対順位 1 の応募者を候補者と呼ぶことにする。この問題において n が十分に大きい場合の最適政策は、最初の $e^{-1}n$ 人の応募者を採用せず、それ以降に出現する最初の候補者を採用することである。この政策下での成功確率もまた e^{-1} に近づくことが知られている。ここで、我々の問題における一般化された一様分布とは、区間 $[m, n]$ 上の一様分布において $m=1$ の場合は既に Presman and Sonin [4] により研究されており、 $m=n$ の場合は古典的秘書問題に他ならない。このように我々の問題は、古典的秘書問題と従来考えられていた一様分布の問題を特殊な場合として包含するものであり、この意味でこの一様分布を一般化された一様分布と呼ぶ。この分布における最良選択問題は、既に川合、玉置 [2] により解かれた。

この論文では、応募者の中で 1 人だけ採用することができ、採用した者が最良 (best) または 2 番目に良い (2nd best) とき、成功とみなす。このときの応募者数は未知であるが $[1, n]$ 上の一様分布に従う場合は Kawai and Tamaki [3] により解かれた。ここでは、相対順位 1 (2) の応募者を候補者 1 (2) と呼び、区別する必要がない場合は単に候補者と呼ぶ。また、応募者数が既知である Gusein-Zade [1] の拡張として応募者数 N が確率変数で区間 $[m, n]$ 上の一様分布に従うものとして問題を考察する。ただし、 m, n は、既知の正整数で $m \leq n$ を満足する。この分布においても、最適政策は、最初の $(s_1 - 1)$ 人の応募者を採用せず、 s_1 以降に出現する最初の候補者 1 を採用する。ただし、もし候補者 1 が出現しないならば、 s_2 以降に出現する最初の候補者を採用する閾値ルール (threshold rule) となることが示された。

2 定式化

応募者数 N が有限な確率変数で、分布 $p_r = P\{N = r\}, 1 \leq r \leq n$ をもつ場合の最適方程式は以下のように与えられる。また、 $\pi_r = \sum_{k=r}^n p_k$ とおく。

$$f_i(r) = \max\{f_i^A(r), f_i^R(r)\}, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leq r \leq n$$

$$\begin{cases} f_1^A(r) = \frac{r}{\pi_r} \sum_{k=r}^n \frac{p_k(2k-r-1)}{k(k-1)}, \\ f_2^A(r) = \frac{r(r-1)}{\pi_r} \sum_{k=r}^n \frac{p_k}{k(k-1)}, \\ f^R(r) = \frac{r(r-1)}{\pi_r} \sum_{k=r+1}^n \frac{\pi_k[f_1(k)+f_2(k)]}{k(k-1)(k-2)}. \end{cases} \quad (1)$$

ここで,

$f_i(r)$: r 番目の応募者が候補者 $i, i=1, 2$ のとき, 以後最適にふるまって成功する確率

$f_i^A(r)$: r 番目の応募者が候補者 $i, i=1, 2$ のとき, その人を採用して成功する確率

$f^R(r)$: r 番目の応募者が候補者のとき, その人を採用せず以後最適にふるまって成功する確率

3 応募者数 N が $[m, n]$ 上の一様分布に従うケース

これ以降は, 応募者数 N が $[m, n]$ 上の一様分布に従うものとして問題を考察する. このとき, 分布 p_k は以下のようになる.

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{n-m+1}, & m \leq k \leq n \\ 0, & 1 \leq k < m \end{cases}$$

これより,

$$f_1^A(r) = \begin{cases} \frac{2r}{n-r+1} \sum_{k=r}^n \frac{1}{k} - \frac{r}{n}, & m \leq r \leq n \\ \frac{2r}{n-m+1} \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} - \frac{r(r-1)}{n(m-1)}, & 1 \leq r < m \end{cases} \quad (2)$$

$$f_2^A(r) = \begin{cases} \frac{r}{n}, & m \leq r \leq n \\ \frac{r(r-1)}{n(m-1)}, & 1 \leq r < m \end{cases} \quad (3)$$

$$f^R(r) = \begin{cases} \frac{r(r-1)}{n-r+1} \sum_{k=r+1}^n \frac{(n-k+1)[f_1(k)+f_2(k)]}{k(k-1)(k-2)}, & m \leq r \leq n \\ r(r-1) \left[\sum_{k=r+1}^m \frac{f_1(k)+f_2(k)}{k(k-1)(k-2)} + \frac{1}{n-m+1} \sum_{k=m+1}^n \frac{(n-k+1)[f_1(k)+f_2(k)]}{k(k-1)(k-2)} \right], & 1 \leq r < m \end{cases} \quad (4)$$

補題 1 (a) $f_i^A(r), i=1, 2, 1 \leq r \leq n$ は, r について非減少関数である.

(b) $f_1^A(r) \geq f_2^A(r), 1 \leq r \leq n$.

(証明) (a) $f_1^A(r)$ については, $m \leq r \leq n, 1 \leq r < m$ の各々において, r について差分をとることで簡単に得られる. また, $f_2^A(r)$ については, 自明である.

(b) $m \leq r \leq n, 1 \leq r < m$ の各々において, 差分 $f_1^A(r) - f_2^A(r)$ をとることで得られる.

補題 2 a s_2 を以下のように定義する.

$$s_2 = \min \begin{cases} 1 \leq r < m : \frac{3(n-r+1)}{2n} - \sum_{k=r}^n \frac{1}{k} \geq 0, \\ m \leq r \leq n : \frac{3(r-1)(n-m+1)}{2n(m-1)} - \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \geq 0 \end{cases}$$

このとき, $s_2 \leq r$ に対して次式が成立する.

$$(i), f_1(r) = f_1^A(r), \quad (ii), f_2(r) = f_2^A(r).$$

(証明) $m \leq r \leq n$ において, (i),(ii) は, $r = n$ のとき, $f_1^A(n) = f_2^A(n) = 1$ かつ $f^R(n) = 0$ より成立している. (i),(ii) の成立を r に関する帰納法で示す. $r+1, r+2, \dots, n$ での成立を仮定すると, (3),(4) より,

$$f_2^A(r) - f^R(r) = \frac{2r}{n-r+1} \left[\frac{3(n-r+1)}{2n} - \sum_{k=r}^n \frac{1}{k} \right].$$

上式の [] 内を $g(r)$ とおく. すなわち, $g(r) = \frac{3(n-r+1)}{2n} - \sum_{k=r}^n \frac{1}{k}$ とおくと, 差分 $g(r) - g(r-1) = \frac{1}{r-1} - \frac{3}{2n}$ から $g(r)$ は unimodal であり, $g(n) = \frac{1}{2n} > 0$ かつ $g(m) = \frac{3(n-m+1)}{2n} - \sum_{k=m}^n \frac{1}{k}$ より, $g(m) < 0$ のとき, $m < r < s_2$ において必ず 1 回符号変化が起こる. このことより, $s_2 = \min\{m \leq r \leq n : g(r) \geq 0\}$ とおくと $r \geq s_2$ である限り $g(r) \geq 0$ すなわち $f_2^A(r) \geq f^R(r)$ であることがわかる. これより, (ii) が示された. (i) は補題 1 (b) より直ちに得られる.

一方, $g(m) \geq 0$ のときは, 以下のようになる.

$1 \leq r < m$ において, (i),(ii) の成立を r に関する帰納法で示す. $r = m$ のとき $f_1(m) = f_1^A(m), f_2(m) = f_2^A(m)$ は前述の議論より成立している. $r+1, r+2, \dots, m$ の成立を仮定すると, (3),(4) より,

$$f_2^A(r) - f^R(r) = \frac{2r}{n-m+1} \left[\frac{3(r-1)(n-m+1)}{2n(m-1)} - \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \right].$$

上式の [] 内を $h(r)$ とおく. すなわち, $h(r) = \frac{3(r-1)(n-m+1)}{2n(m-1)} - \sum_{k=m}^n \frac{1}{k}$ とおくと, $h(r)$ は r について増加関数であり, $h(m) \geq 0$ かつ $h(1) < 0$ より $1 < r < s_2$ のとき必ず 1 回符号変化が起こる. $m \leq r \leq n$ のケースと同様な議論により (i),(ii) は成立する.

補題 2 b s_1 を以下のように定義する.

$$s_1 = \min \begin{cases} -2 \sum_{j=r}^{s_2-1} \frac{1}{j} \left(\sum_{k=j+1}^n \frac{1}{k} - \frac{3}{2} \right) + \frac{2r-3s_2+1}{n} + 1 \geq 0, & m \leq r \leq s_2 \leq n \\ 2 \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \sum_{j=r}^{m-1} \frac{1}{j} + 2 \sum_{j=m}^{s_2-1} \frac{1}{j} \left(\sum_{k=j+1}^n \frac{1}{k} - \frac{3}{2} \right) + \frac{3s_2-2r-1}{n} + \frac{2(r-1)}{m-1} - 1 \leq 0, & 1 \leq r \leq m \leq s_2 \\ \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \left(\sum_{j=r}^{s_2-1} \frac{1}{j} - \frac{(1-s_2)(n-m)}{m-1} \right) - (n-m+1) \left(\frac{2r-s_2-1+2(1-s_2)(n-m+1)}{2n(m-1)} \right) \leq 0 & 1 \leq r \leq s_2 \leq m \end{cases}$$

このとき, $s_1 < s_2$ であるならば, $s_1 \leq r \leq s_2 - 1$ に対して次式が成立する.

$$(i), f_1(r) = f_1^A(r), \quad (ii), f_2(r) = f^R(r).$$

(証明) s_1 には, $s_1 \neq 1$ と $s_1 = 1$ の 2 つの場合が考えられる. 前者は $f^R(1) > f_1^A(1)$ を, 後者は $f_1^A(1) \geq f^R(1)$ を意味する. 以下で, $f^R(1) - f_1^A(1) > 0$ を満足する s_1 を導出する. 一方, $f^R(1) - f_1^A(1) \leq 0$ を満足する s_1 は $s_1 = 1$ となる. ここでは, 補題 2 a より, $s_2 \leq m$ のケースと $m \leq s_2$ のケースがある.

$m \leq r \leq n$ において s_2 の定義より, 明らかに次式が成立する.

$$\begin{aligned} f_2(s_2 - 1) &= f^R(s_2 - 1), \\ f_1^A(s_2 - 1) &= \frac{2(s_2 - 1)}{n - s_2 + 2} \sum_{k=s_2-1}^n \frac{1}{k} - \frac{s_2 - 1}{n} \\ &> \frac{2(s_2 - 1)}{n - s_2 + 2} \sum_{k=s_2-1}^n \frac{1}{k} - \frac{2(s_2 - 1)}{n} \\ &= f^R(s_2 - 1). \end{aligned}$$

したがって, (i),(ii) は, $r = s_2 - 1$ のとき成立している. (i),(ii) の成立を r に関する帰納法で示す. $r + 1, r + 2, \dots, s_2 - 1$ での (i),(ii) の成立を仮定すると, $m \leq s_2$ のケースにおいて, (2),(4) より,

$$f_1^A(r) - f^R(r) = \frac{r}{n - r + 1} \left[-2 \sum_{j=r}^{s_2-1} \frac{1}{j} \left(\sum_{k=j+1}^n \frac{1}{k} - \frac{3}{2} \right) + \frac{2r - 3s_2 + 1}{n} + 1 \right].$$

ここで, 上式の []内を $u(r)$ とおく. すなわち, $u(r) = -2 \sum_{j=r}^{s_2-1} \frac{1}{j} \left(\sum_{k=j+1}^n \frac{1}{k} - \frac{3}{2} \right) + \frac{2r - 3s_2 + 1}{n} + 1$ である. さらに, $u(r)$ の挙動を調べる. 差分 $u(r) - u(r-1) = \frac{2}{r-1} \left(\sum_{k=r}^n \frac{1}{k} - \frac{3}{2} \right) + \frac{2}{n}$ より, $u(r)$ は unimodal であり, $u(n) > 0$ かつ $u(m) = -2 \sum_{j=m}^{s_2-1} \frac{1}{j} \left(\sum_{k=j+1}^n \frac{1}{k} - \frac{3}{2} \right) + \frac{2m - 3s_2 + 1}{n} + 1$ より $u(m) < 0$ のとき, $m < r < s_1$ で必ず 1 回符号変化が起こる. このことより, $s_1 = \min\{m \leq r \leq n : u(r) \geq 0\}$ とおくと $r \geq s_1$ である限り $u(r) > 0$ すなわち $f_1^A(r) \geq f^R(r)$ であることがわかる. これより, (i) が示された. (ii) は補題 1 (b) より直ちに得られる.

次に $u(m) \geq 0$ のとき, (1) $m \leq s_2$ と (2) $s_2 \leq m$ のケースが考えられる.

(1) $m \leq s_2$ のケースにおいて, 前ケースと同様な手法のより,

$$f_1^A(r) - f^R(r) = -\frac{r}{n - m + 1} \left[2 \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \sum_{j=r}^{m-1} \frac{1}{j} + 2 \sum_{j=m}^{s_2-1} \frac{1}{j} \left(\sum_{k=j+1}^n \frac{1}{k} - \frac{3}{2} \right) + \frac{3s_2 - 2r - 1}{n} + \frac{2(r-1)}{m-1} - 1 \right].$$

ここで, 上式の []内を $v(r)$ とおく. すなわち, $v(r) = 2 \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \sum_{j=r}^{m-1} \frac{1}{j} + 2 \sum_{j=m}^{s_2-1} \frac{1}{j} \left(\sum_{k=j+1}^n \frac{1}{k} - \frac{3}{2} \right) + \frac{3s_2 - 2r - 1}{n} + \frac{2(r-1)}{m-1} - 1$ である. さらに, $v(r)$ の挙動を調べる. 差分 $v(r) - v(r-1) = -2 \left(\frac{1}{r-1} \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m-1} \right)$ より, $v(r) < v(r-1)$ であり, また, $u(m) \geq 0$ より $f_1^A(m) - f^R(m) = -\frac{2m}{n-m+1} v(m) \geq 0$ なので, $v(m) < 0$ かつ $v(1) > 0$ のとき, $1 < r < s_1$ で必ず 1 回符号変化が起こる. このことより $s_1 = \min\{1 \leq r \leq m : v(r) < 0\}$ とおくと $r \geq s_1$ である限り $v(r) < 0$ すなわち $f_1^A(r) \geq f^R(r)$ であることがわかる. これより, (i) が示された. (ii) は補題 1 (b) より直ちに得られる. また, $v(1) < 0$ のときは符号変化は起こらず, $s_1 = 1$ となる.

(2) $s_2 \leq m$ のケースにおいても前ケースと同様の手法により,

$$f_1^A(r) - f^R(r) = -\frac{2r}{n - m + 1} \left[\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \left(\sum_{j=r}^{s_2-1} \frac{1}{j} - \frac{(1-s_2)(n-m)}{m-1} \right) - (n-m+1) \left(\frac{2r - s_2 - 1 + 2(1-s_2)(n-m+1)}{2n(m-1)} \right) \right]$$

ここで, 上式の []内を $w(r)$ とおく. すなわち, $w(r) = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \left(\sum_{j=r}^{s_2-1} \frac{1}{j} - \frac{(1-s_2)(n-m)}{m-1} \right) - (n-m+1) \times \left(\frac{2r - s_2 - 1 + 2(1-s_2)(n-m+1)}{2n(m-1)} \right)$ である. さらに, $w(r)$ の挙動を調べる. $w(r) - w(r-1) = -\frac{1}{r-1} \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} - \frac{n-m+1}{n(m-1)} < 0$ より $w(r) < w(r-1)$ であり, $u(m) \geq 0$ より $f_1^A(m) - f^R(m) = -\frac{2m}{n-m+1} w(m) \geq 0$ なので, $w(m) < 0$ である. これ以降は, 前述の $v(r)$ のケースと同様の議論により証明される.

補題 2 c $1 \leq r < s_1$ に対して次式が成立する.

(i), $f_1(r) = f^R(r)$, (ii), $f_2(r) = f^R(r)$.

(証明) $r = s_1 - 1$ のとき, (i) は s_1 の定義より, (ii) は (i) と補題 1 (b) より成立している. (i),(ii) の成立を r に関する帰納法で示す. $r + 1$ での成立を仮定すると, ここでも (1) $m \leq s_1$ と (2) $s_1 \leq m$ のケースがある.

(1) $m \leq s_1$ のケース
 $m \leq r \leq n$ において,

$$\begin{aligned} f^R(r) - f_1^A(r) &= \frac{n-r}{n-r+1} f^R(r+1) - f_1^A(r) \\ &\geq \frac{n-r}{n-r+1} f_1^A(r+1) - f_1^A(r) \quad (\text{仮定より}) \\ &= \frac{2}{n-r+1} \left[\sum_{k=r+1}^n \frac{1}{k} + \frac{r}{n} - \frac{3}{2} \right] \end{aligned}$$

上式の [] 内を $k(r)$ とおくと, 差分 $k(r) - k(r-1) = -\frac{1}{r} + \frac{1}{n} < 0$ より, r に関して減少関数であることがわかる.

$1 \leq r \leq m$ において,

$$f^R(r) = \frac{1}{r+1} [f^R(r+1) + f^R(r+1) + (r-1)f^R(r+1)] = f^R(r+1)$$

であり, $f_1^A(r)$ は増加関数より $f^R(r) - f_1^A(r)$ は減少関数となる.

これより, (i) は成立する. (ii) も補題 1 より直ちに得られる.

(2) $s_1 \leq m$ のケース

$r = s_1 - 1$ のとき, (i) は s_1 の定義より, (ii) は (i) と補題 1 より成立している. (i),(ii) の成立を r に関する帰納法で示す. $r + 1$ の成立を仮定すると, $f^R(r) = f^R(r+1)$ であり, $f_1^A(r), f_2^A(r)$ は各々増加関数なので, 自明である.

補題 3 $s_1 \leq s_2, s_1 \neq 1$

(証明) $s_1 = s_2 = s$ と仮定すると,
 $m \leq r \leq n$ において, (4) より,

$$f^R(s-1) = \frac{2(s-1)}{n-s+2} \sum_{k=s-1}^n \frac{1}{k} - \frac{2(s-1)}{n}.$$

一方, (2) より,

$$f_1^A(s-1) = \frac{2(s-1)}{n-s+2} \sum_{k=s-1}^n \frac{1}{k} - \frac{s-1}{n}.$$

これより,

$$f_1^A(s-1) > f^R(s-1).$$

同様に, $1 \leq r < m$ において, (4) より,

$$f^R(s-1) = \frac{2(s-1)}{m-1} \left[\frac{(s-1)(n-m) - n + 2m - 1}{n-m+1} \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} - \frac{(s-2)(n-m+1)}{n} \right].$$

一方, (2) より,

$$f_1^A(s-1) = \frac{2(s-1)}{n-m+1} \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} - \frac{(s-1)(s-2)}{n(m-1)}.$$

$$f_1^A(s-1) > f^R(s-1).$$

もし仮定が真, すなわち, $s_1 = s_2$ ならば, $(f_1(s), f_2(s)) = (f_1^A(s), f_2^A(s))$ かつ $(f_1(s-1), f_2(s-1)) = (f^R(s-1), f^R(s-1))$ でなければならない. これは, 矛盾する. よって, $s_1 \leq s_2$ である.

定理 最適政策は, 閾値 (s_1, s_2) の閾値ルールとなる. すなわち, 正整数 s_1, s_2 が存在して, 最初の $(s_1 - 1)$ 人の応募者を採用せず, s_1 以降に出現する最初の候補者 1 を採用する. ただし, もし候補者 1 が出現しないならば, s_2 以降に出現する最初の候補者を採用することである.

補題 4 最適政策下での成功確率 V は以下のように与えられる.

$$V = \begin{cases} \frac{s_1}{n-m+1} \left[2 \sum_{j=s_1}^{s_2-1} \frac{1}{j} \sum_{k=j+1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=s_1}^{s_2-1} \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=s_2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{3s_2 - s_1}{n} - 2 \right], & 1 \leq m \leq s_1 \leq s_2 \leq n \\ s_1 \left[\frac{2}{n-m+1} \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \left(\sum_{j=s_1}^{s_2-1} \frac{1}{j} + \frac{s_2(n-m) - n + 2m - 1}{m-1} \right) + \frac{s_1 - s_2 + 2(1-s_2)(n-m+1)}{n(m-1)} \right], & 1 \leq s_1 \leq s_2 \leq m \leq n \\ \frac{s_1}{n-m+1} \left[2 \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \sum_{j=s_1}^{m-1} \frac{1}{j} + 2 \sum_{j=m}^{s_2-1} \frac{1}{j} \sum_{k=j+1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=m}^{s_2-1} \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=s_2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{3s_2 - s_1}{n} + \frac{s_1 - 1}{m-1} - 1 \right], & 1 \leq s_1 \leq m \leq s_2 \leq n \end{cases}$$

(証明) 最適政策により以下の 3 ケースが考えられるが, 3 ケースとも同様な手法により成功確率を導出できるので, ここでは, (a) $1 \leq m \leq s_1 \leq s_2 \leq n$ のみ導出する.

$$(a) 1 \leq m \leq s_1 \leq s_2 \leq n \quad (b) 1 \leq s_1 \leq s_2 \leq m \leq n \quad (c) 1 \leq s_1 \leq m \leq s_2 \leq n$$

はじめに, $f^R(r)$ と $f^R(r+1)$ の関係は, 以下のような再帰関係式で表記できる.

$$f^R(r) = \begin{cases} \frac{n-r}{(r+1)(n-r+1)} [f_1(r+1) + f_2(r+1) + (r-1)f^R(r+1)], & m \leq r \leq n \\ \frac{1}{r+1} [f_1(r+1) + f_2(r+1) + (r-1)f^R(r+1)], & 1 \leq r < m \end{cases}$$

これより, $1 \leq m < s_1 < s_2 < n$ において, 各々の $f^R(r)$ と $f^R(r+1)$ の関係は以下ようになる.

$$f^R(r) = \begin{cases} \frac{2}{n-r+1} \sum_{k=r+1}^n \frac{1}{k} + \frac{(r-1)(n-r)}{(r+1)(n-r+1)} f^R(r+1), & s_2 \leq r \leq n \\ \frac{1}{n-r+1} \sum_{k=r+1}^n \frac{2k-r-2}{k(k-1)} + \frac{r(n-r)}{(r+1)(n-r+1)} f^R(r+1), & s_1 \leq r < s_2 \\ \frac{n-r}{n-r+1} f^R(r+1), & m \leq r < s_1 \\ f^R(r+1), & 1 \leq r < m \end{cases}$$

これより, 成功確率は以下のように再帰的に計算できる.

ここで、計算の簡略化のために $F(r) = (n-r+1)f^R(r)$ とおくと、各々以下のようになる。

$$F(r) = \begin{cases} 2 \sum_{k=r+1}^n \frac{1}{k} + \frac{r-1}{r+1} F(r+1), & s_2 \leq r \leq n \\ \sum_{k=r+1}^n \frac{2k-r-2}{k(k-1)} + \frac{r}{r+1} F(r+1), & s_1 \leq r < s_2 \end{cases}$$

$s_2 \leq r \leq n$ のとき、

$$\begin{aligned} F(n-1) &= 2 \sum_{k=n}^n \frac{1}{k} + \frac{n-2}{n} F(n) \\ &\dots \\ F(s_2) &= 2s_2 \left(\sum_{k=s_2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{s_2}{n} - 1 \right). \end{aligned}$$

$s_1 \leq r < s_2$ のとき、

$$\begin{aligned} F(s_2-1) &= \sum_{k=s_2}^n \frac{2k-s_2-1}{k(k-1)} + \frac{s_2-1}{s_2} F(s_2) \\ &\dots \\ F(s_1) &= s_1 \left[2 \sum_{j=s_1}^{s_2-1} \frac{1}{j} \sum_{k=j+1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=s_1}^{s_2-1} \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=s_2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{3s_2-s_1}{n} - 2 \right]. \end{aligned}$$

よって、

$$f^R(s_1) = \frac{s_1}{n-s_1+1} \left[2 \sum_{j=s_1}^{s_2-1} \frac{1}{j} \sum_{k=j+1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=s_1}^{s_2-1} \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=s_2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{3s_2-s_1}{n} - 2 \right].$$

$m \leq r < s_1$ のとき、

$$\begin{aligned} f^R(s_1-1) &= \frac{n-s_1+1}{n-s_1+2} f^R(s_1) \\ &\dots \\ f^R(m) &= \frac{n-s_1+1}{n-m+1} f^R(s_1). \end{aligned}$$

$1 \leq r < m$ のとき、

$$f^R(1) = \frac{s_1}{n-m+1} \left[2 \sum_{j=s_1}^{s_2-1} \frac{1}{j} \sum_{k=j+1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=s_1}^{s_2-1} \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=s_2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{3s_2-s_1}{n} - 2 \right].$$

参考文献

- [1] Gusein-Zade, S. M. The problem of choice and the optimal stopping rule for a sequence of independent trials, *Theo.Prob.Appl.* **11**, 472-476. (1966)
- [2] 川合 益代, 玉置 光司, 応募者数が一般化された一様分布に従う秘書問題, 京都大学数理解析研究所 講究録 1194, p129-134. (2000)
- [3] M. Kawai, M. Tamaki. Choosing either the best or the second best when the number of applicants is random, to appear, *Computers & Mathematics with Applications*.
- [4] Presman, E. L. and Sonin, I. M. The best choice problem for a random number of objects, *Theor.Probab.Appl.* **17**, 657-668. (1972)