<table>
<thead>
<tr>
<th>項目</th>
<th>内容</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>タイトル</td>
<td>安次重一、岩下登志也: エリプティカル分布下におけるホッテリングの$T^2$統計の非null分布 (非null統計理論)</td>
</tr>
<tr>
<td>著者</td>
<td>井上達紀、岩下登志也</td>
</tr>
<tr>
<td>引用</td>
<td>数理解析研究所講究録 (2003), 1308: 1-15</td>
</tr>
<tr>
<td>発行日</td>
<td>2003-02</td>
</tr>
<tr>
<td>URL</td>
<td><a href="http://hdl.handle.net/2433/42842">http://hdl.handle.net/2433/42842</a></td>
</tr>
<tr>
<td>型</td>
<td>Departmental Bulletin Paper</td>
</tr>
<tr>
<td>版本</td>
<td>publisher</td>
</tr>
<tr>
<td>サイト</td>
<td>京都大学大学院学術情報リポジトリ (Kyoto University Research Information Repository)</td>
</tr>
</tbody>
</table>
An Asymptotic Nonnull Distribution of Hotelling's $T^2$-statistic 
under Elliptical Distributions

早稲田大学・アジア太平洋研究科 井上 達紀 (Tatsuki Inoue)
Graduate School of Asia-Pacific Study, Waseda University

明星大学・一般教育 自然科学 岩下 登志也 (Toshiya Iwashita)
Natural Sciences Division, General Education, Meisei University

要旨
本稿では確率母集団上での Hotelling の $T^2$ 統計量の局所対立仮説の元での統計量の分布の $O(N^{-2})$
の漸近展開式を導く。この導出には、Lévy's の反転公式を利用した標本平均ベクトルと Wishart 行列
の同時特性関数に対する漸近有効 (valid) な岩下・瀬尾 (2001) の方法を使用する。

1. はじめに

$X$ を $p$ 次元確率行列とする。$X$ の密度関数を $f(x; \mu, \Lambda)$ で表し、期待値 $E[X] = \mu$ 共分散行列
Cov[$X$] = $\gamma \Lambda$ とする。ここで、$\mu \in \mathbb{R}^p$, $\Lambda$ は $p \times p$ の正定値行列であり、$\gamma > 0$ は定数である。

確率密度関数 $f(x; \mu, \Lambda)$ が正規分布の場合、すなわち

$$f(x; \mu, \Lambda) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\gamma \Lambda|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)'(\gamma \Lambda)^{-1}(x - \mu) \right\},$$

である場合 ($\gamma = 1$), 仮説検定

帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ 対立仮説 $K: \mu \neq \mu_0$。

において、Hotelling(1931) は $X$ からの無作為標本 $X_1, \ldots, X_N$ からなる標本平均ベクトル $\overline{X} = N^{-1} \sum_{k=1}^{N} X_k$ と標本共分散行列 $S = (N - 1)^{-1} \sum_{k=1}^{N} (X_k - \overline{X})(X_k - \overline{X})'$ から構成される検定統計量

$$T^2 = N (\overline{X} - \mu_0)' S^{-1} (\overline{X} - \mu_0),$$

に対する正確な分布を与えている。
近似理論においては、正規・非正規のもので数々の研究があり、正規性のもとでは、伊藤 (1956)、塩谷 (1956, 1971) によって、$T^2$ の近似分布が与えられている。また、確率密度関数 $f(x; \mu, \Lambda)$ が非負関数 $g$、正規化定数 $K_p$ を用いて以下のような形式

$$f(x; \mu, \Lambda) = K_p|\Lambda|^{-1/2}g((x - \mu)'\Lambda^{-1}(x - \mu)),$$ (1.1)

で表される場合に、岩下 (1995) は、帰無仮説と局所対立仮説 $K_1: \mu = \mu_0 + N^{-1/2}r, \in \mathbb{R}^p - \{0\}$ のもとでの $T^2$ の近似展開を得ている。より一般的な分布では、狩野 (1995), 藤原 (1997) がそれぞれ独立な方法で Edgeworth 型の展開による $T^2$ の近似展開式を求めるている。

近年では、岩下・瀬尾 (2001) が Lévy's の反転公式を利用した高次近似展開公式を示している。この方法は確率列列 $Z_i: m_i \times n_i = \left(z_{i,j}^{(i)}\right), i = 1, 2$ に対して、

$$T_i = T_i(X_1, \ldots, X_N) = E[T_i(X_1, \ldots, X_N)] + \frac{1}{\sqrt{N}}Z_i,$$ (1.2)

であるような統計量 $T_1, T_2$ をパラメータとするスカラ関数 $G(T_1, T_2)$ に対する近似展開式で、$T_1, T_2$ の独立性は仮定していない。彼らはこの方法により、楕円母集団のもとで、帰無仮説 $H_0$ が真となる場合の $T^2$ 統計量の $O(N^{-2})$ までの近似展開式を求めている。

本稿の目的は、岩下・瀬尾 (2001) の方法を用いて、$f(x; \mu, \Lambda)$ が、(1.1) 式のように表される場合の $T^2$ 統計量の局所対立仮説 $K_1$ の元での $O(N^{-2})$ までの近似展開式を与えることである.

2. 局所対立仮説のもとでの $T^2$ 統計量の近似展開

$X, X_1, \ldots, X_N$ を式 (1.1) を密度関数とする楕円母集団からの独立同一な分布とする。この場合、$X$ の特性関数は、$\psi(t) = \exp\{it'\mu\}\Psi(t'\Lambda t)$ と表され、平均ベクトルと共分散行列が存在するならば、それぞれ $E[X] = \mu, Cov[X] = \gamma\Lambda \equiv \Sigma$ と書ける。ここで $i = \sqrt{-1}, t \in \mathbb{R}^p$. また、$\gamma = -2\Psi'(0)$ である (例えば Kelker (1970) を参照)。

いま、ベクトル $U = \sqrt{N}\Sigma^{-1/2}(X - \mu)$ とし、$W = N^{-1}q_{k=1}^{N}(X_k - \mu)(X_k - \mu)'$ を用いて、行列 $V = \sqrt{N}\Sigma^{-1/2}(W - \Sigma)\Sigma^{-1/2}$ とおく。また、$E[|Y|^2] < \infty$ と仮定する ($Y = X - \mu$)。このとき、$U$ と $V$ の同時特性関数、および、$U$ の周辺特性関数は、それぞれ以下のように表すことができる。

$$\Phi_1(\xi, \Theta) = E[\exp\{i\xi'U + itr(\Theta V)\}]$$

$$= e^{-itr(-i\sqrt{N}\Theta)}E\left[\exp\{iN^{-1/2}[\xi'\Sigma^{-1/2}Y + tr(\Theta \Sigma^{-1/2}YY'\Sigma^{-1/2})]\}\right]^N$$

$$= e^{-itr(-i\sqrt{N}\Theta)}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{i}{\sqrt{N}}\right)^k E\left[\left[\xi'\Sigma^{-1/2}Y + tr(\Theta \Sigma^{-1/2}YY'\Sigma^{-1/2})\right]^k\right]\right]^N$$
ここで、etr(·) = exp{tr(·)}, ξ = (ξ₁, ξ₂, ..., ξₚ) ∈ Rₚ, また、Θ = (½(1 + δₐβ)θₐβ) は対称行列であり、
δₐβ は Kronecker のデルタである. また、式中の係数は以下のようである.

\[ f₁ = \frac{a³ - 3ab + 3c}{3}, \]
\[ f₂ = \frac{1}{36}(2a⁶ - 12a⁴b - 9a⁴ + 12a³c + 18a²b² + 36a²b - 36abc - 36ac - 18b² + 18c² + 36d), \]
\[ f₃ = \frac{1}{1620}(10a⁹ - 90a⁷b - 135a⁷ + 90a⁶c + 270a⁵b² + 945a⁵b + 324a⁵ - 540a⁴bc - 945a⁴c - 270a³b³ - 1890a³b² - 1620a³b + 270a³c² + 540a³d + 810a²b²c + 3240a²bc + 1620a²c + 810ab³ + 1620ab² - 810abc² - 1620abd - 1620ac² - 1620ad - 810b²c - 1620bc + 270c³ + 1620cd + 1620e), \]
\[ f₄ = \frac{1}{8}\left[\frac{4Ψ''(0)}{γ^2} - 1\right](ξ'ξ)^2, \]
\[ f₅ = \frac{1}{24}\left[\frac{6Ψ''(0)}{γ^2} + \frac{4Ψ(3)(0)}{γ^3} - 1\right](ξ'ξ)^3 + \frac{1}{128}\left[\frac{4Ψ''(0)}{γ^2} - 1\right]^2(ξ'ξ)^4, \]
\[ a = \text{tr}Θ, \quad b = -\frac{1}{2}\left[ξ'ξ + \frac{4Ψ''(0)}{γ^2} Z(2)(Θ)\right], \]
\[ c = -\frac{1}{6}\left[\frac{12Ψ'(0)}{γ^2}[2ξ'Θξ + (ξ'ξ)\text{tr}Θ] - \frac{8Ψ'(0)}{γ³} Z(3)(Θ)\right], \]
\[ d = \frac{1}{24}\left[\frac{12Ψ''(0)}{γ^2}(ξ'ξ)^2 \right. \]
\[ - \frac{48Ψ(3)(0)}{γ³}[8ξ'Θξ + 4ξ'Θξ(\text{tr}Θ) + 2(ξ'ξ)\text{tr}Θ² + (ξ'ξ)(\text{tr}Θ)^2] \]
\[ + \frac{16Ψ(4)(0)}{γ⁴} Z(4)(Θ)\right], \]
\[ e = \frac{1}{120}i\left[\frac{120Ψ(3)(0)}{γ³}[4(ξ'ξ)(ξ'Θξ) + (ξ'ξ)^2\text{tr}Θ] \right. \]
\[ + \frac{160Ψ(4)(0)}{γ⁴}\left[48ξ'Θ³ξ + 8(ξ'ξ)\text{tr}Θ³ + (ξ'ξ)(\text{tr}Θ)^³ + 24(ξ'Θξ)(\text{tr}Θ)^² + 12(ξ'Θξ)\text{tr}Θ² + 6(ξ'ξ)\text{tr}Θ²\text{tr}Θ + 6(ξ'Θξ)(\text{tr}Θ)^² \right] \]
\[ + \frac{32Ψ(5)(0)}{γ⁵} Z(5)(Θ)\right]. \]
局所対立仮説 \( K_i : \mu = \mu_0 + N^{-\frac{1}{2}}\epsilon, \epsilon \in \mathbb{R}^p - \{0\} \) のもとでは、Hotelling の \( T^2 \) 統計量は次のように書き表される。

\[
T^2 = N(\bar{X} - \mu + \mu - \mu_0)'S^{-1}(\bar{X} - \mu + \mu - \mu_0) \\
= \left(1 - \frac{1}{N}\right)(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'\left(I_p + \frac{1}{\sqrt{N}}V - \frac{1}{N}UU'\right)^{-1}(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon) \\
equiv T^2_\epsilon.
\]

この \( T^2_\epsilon \) を展開すると,

\[
T^2_\epsilon = (U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon) \\
- \frac{1}{\sqrt{N}}(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'A(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon) \\
+ \frac{1}{N}(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'B(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon) \\
- \frac{1}{N\sqrt{N}}(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'C(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon) \\
+ \frac{1}{N^2}(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'D(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon) + o_p(N^{-2}),
\]

を得る。ただし、\( A, B, C, D \) はそれぞれ以下のようである。

\[
A = V, \quad B = V^2 - I_p + UU', \quad C = V^3 - V + VUU' + UU'V, \\
D = V^4 - V^2UU' + UU'V^2 + VUU'V + (UU')^2 - (UU').
\]

したがって、その特性関数は以下のように書き表される。

\[
\exp(itT^2_\epsilon) = \exp(it(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)) \\
\times \left[1 + (it) \left[- \frac{1}{\sqrt{N}}(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'A(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon) \\
+ \frac{1}{N}(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'B(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon) \\
- \frac{1}{N\sqrt{N}}(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'C(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon) \\
+ \frac{1}{N^2}(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'D(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)\right] \\
+ \frac{(it)^2}{2} \left[ \frac{1}{N}((U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'A(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon))^2 \\
- \frac{2}{N\sqrt{N}}((U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'A(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)) \\
\times ((U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'B(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)) \\
+ \frac{1}{N^2}((U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'B(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon))^2 \right]
\]
\[ + 2((U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'A(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)) \times ((U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'C(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon))] \]
\[ + \frac{(it)^3}{6} \left[ - \frac{1}{N\sqrt{N}}((U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'A(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon))^3 \right. \]
\[ + \frac{3}{N^2}((U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'A(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon))^2 \times ((U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'B(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon))] \]
\[ + \frac{(it)^4}{24} \cdot \frac{1}{N^2}((U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'A(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon))^4 + o_p(N^{-2}) \]
\[ \equiv \exp(it(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)) \]
\[ + \sum_{j=1}^{4} \sum_{r} N^{-\frac{1}{2}j} q_{r}^{(j)} \exp(it(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)) \]
\[ \times L_{r}^{(j)}(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)M_{r}^{(j)}(V). \] (2.5)

なお、式中 \( L_{r}^{(j)}(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon) \) と \( M_{r}^{(j)}(V) \) は、要素 \( U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon \) と \( V \) からなる単項式である。この \( T_{2}^{2} \) の特性能関数を具体的に計算するには、岩下・瀬尾 (2001) の次の結果を利用する。

系 2.1. 確率行列 \( X : m_1 \times n_1 = (x_{\alpha\beta}) \), \( Y : m_2 \times m_2 = (y_{\alpha\beta}) = Y' \) に対して、\( f(X, Y) \) を \( R^{m_1n_1} \times R^{(1/2)m_2(m_2+1)} \) 上で連続で、かつ積分可能な関数とする。また、関数

\[ H(X, Y) = \ell(X) \cdot \prod_{\alpha \leq \beta}^{m_2} y_{\alpha\beta}^{k_{\alpha\beta}} \equiv \ell(X)M(Y), \]

\( \ell(X) \) は \( X \) をパラメータとする連続スカラ関数であり、

\[ \int_{R^{m_1n_1}} \int_{R^{(1/2)m_2(m_2+1)}} |H(X, Y)f(X, Y)|(dY)(dX) < \infty, \]

であると仮定する。

このとき、積分

\[ I = \int_{R^{m_1n_1}} \int_{R^{(1/2)m_2(m_2+1)}} H(X, Y)f(X, Y)(dY)(dX) \]
\[ = \int_{R^{m_1n_1}} \int_{R^{(1/2)m_2(m_2+1)}} \ell(X)M(Y)f(X, Y)(dY)(dX), \] (2.6)

は次のように書き表すことができる。

\[ I = \int_{R^{m_1n_1}} \left\{ \ell(X)M((-i)\partial)\varphi(X, \Theta) \right|_{\Theta=0} \right\}(dX) \]
\[ = \int_{R^{m_1n_1}} \left\{ H(X, (-i)\partial)\varphi(X, \Theta) \right|_{\Theta=0} \right\}(dX). \] (2.7)
\[ \varphi(X, \Theta) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{m_1n_1} \lim_{h_{11}, \ldots, h_{1n_1}} \lim_{h_{21}, \ldots, h_{2m_2}} \int_{\mathfrak{D}_U} \left\{ \prod_{\alpha=1}^{m_1} \prod_{\beta=1}^{n_1} \left( 1 - \exp(-i\xi_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) \right) \exp(-i\xi_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}) \right\} \phi(-, \Theta)(d\Xi), \] (2.8)

\[ \phi(\Xi, \Theta) = \int_{R^{m_1n_1}} \int_{R^{(1/2)m_2(m_2+1)}} e^{i\text{tr}(\Xi'X) + i\text{tr}(\Theta Y)} f(X, Y)(dY)(dX). \] (2.9)

\( \mathfrak{D}_U = [-U, U] \times \cdots \times [-U, U] \subset R^{m_1n_1}, \partial : m_2 \times m_2 = (\partial/\partial \theta_{\alpha\beta}) \) であり、\( \Theta : m_2 \times m_2 = (\frac{1}{2}(1+\delta_{\alpha\beta}) \theta_{\alpha\beta}) = \Theta', \delta_{\alpha\beta} \) は Kronecker のデルタである。また、\( \Xi : m_1 \times n_1 = (\xi_{\alpha\beta}) \) である。

もし \( -\infty < \theta_{\alpha\beta} < \infty, (\alpha = 1, \ldots, m_2, \beta = 1, \ldots n_2) \) に対して、\( \int_{R^{m_1n_1}} |\phi(\Xi, \Theta)|(d\Xi) < \infty \) であるならば、

\[ \varphi(X, \Theta) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{m_1n_1} \int_{R^{m_1n_1}} \exp\{-i\text{tr}(\Xi'X)\} \phi(\Xi, \Theta)(d\Xi), \] (2.10)

かつ、

\[ I_2 = \int_{R^{m_1n_1}} \left\{ \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{m_1n_1} H(X, (-i)\partial) \right. \right. \int_{R^{m_1n_1}} \exp\{-i\text{tr}(\Xi'X)\} \phi(\Xi, \Theta)(d\Xi) \bigg|_{\Theta=0} \left. \right\} (dX), \] (2.11)

である。

次に、(2.1) 式と (2.2) 式で定義される \( \Phi_1(\xi, \Theta) \) と \( \Phi_2(\xi) \) を使って

\[ \varphi_1(u, \Theta) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^p \int_{\Re^p} \exp(-i\xi'u) \Phi_1(\xi, \Theta)(d\xi), \] (2.12)

\[ \varphi_2(u) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^p \int_{\Re^p} \exp(-i\xi'u) \Phi_2(\xi)(d\xi), \] (2.13)

とすると、系 2.1 を使うことによって以下の式を得る。

\[ \zeta(t) \equiv \mathbb{E}[\exp(itT_2)] \]

\[ = \mathbb{E} \left[ \exp(it(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)) \right. \right. \]

\[ + \sum_{j=1}^{4} \sum_r N^{-\frac{1}{2}j} q_r^{(j)} \exp(it(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)) \]

\[ \times L_r^{(j)}(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon) M_r^{(j)}(V) \bigg] + o(N^{-2}) \]

\[ = \int_{\Re^p} \exp(it(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)) \varphi_2(u)(du) \]

\[ + \int_{\Re^p} \left[ \sum_{j=1}^{4} \sum_r N^{-\frac{1}{2}j} q_r^{(j)} \exp(it(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)'(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}}\epsilon)) \right. \]
\[
\times L_D^{(j)}(U + \Sigma^{-\frac{1}{2}} \epsilon)M_D^{(j)}((-i)\partial)e_1(u, \Theta) \bigg|_{\Theta=0}
\]

\[
= C_p(t; \omega^2) + \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{4} a_j C_{p+2j}(t; \omega^2)
+ \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{8} b_j C_{p+2j}(t; \omega^2) + o(N^{-2}),
\]

(2.14)

ここで、\( C_k(t; \omega^2) \) は、自由度 \( k \) の非心パラメータ \( \omega^2 = \epsilon' \Sigma^{-1} \epsilon \) の非心カイニ乗分布の特性関数であり、各係数は以下のようである。

\[
a_0 = \frac{1}{8} \kappa \left( \omega^4 - 2 \omega (p + 2) \right) - \frac{p^2}{4},
\]

\[
a_1 = \frac{1}{4} \kappa \left( \omega^4 - 4 \omega^2 (p + 2) (p + 2) + \frac{1}{2} (\omega^2 - p) \right),
\]

\[
a_2 = \frac{1}{8} \kappa \left( -9 \omega^4 + 12 (p + 2) \omega^2 - 2 (p + 2) \right)
+ \frac{1}{4} \left( \omega^4 - 2 (p + 3) \omega^2 + p (p + 2) \right),
\]

\[
a_3 = \kappa \left( \omega^4 - \frac{1}{2} (p + 2) \omega^2 \right) + \frac{1}{2} (-\omega^2 + p + 2) \omega^2,
\quad a_4 = -\frac{1}{4} (\kappa - 1) \omega^4,
\]

\[
b_0 = \frac{1}{128} \kappa^2 \left( \omega^8 - 16 \omega^6 - 4 p (p + 2) \omega^4 + 32 (p + 2) (p + 4) \omega^2
+ 4 p (p + 2) ((p - 6) p - 32) \right)
+ \frac{1}{32} \kappa \left( -2 \omega^6 - p^2 \omega^4 + 12 (p + 2) (p + 4) \omega^2
+ 2 p (p + 2) ((p - 8) p - 28) \right)
+ \frac{1}{48} \beta \left( \omega^6 - 6 (p + 2) (p + 4) \omega^2 + 8 p (p + 2) (p + 4) \right)
+ \frac{1}{96} \beta \left( \omega^6 - 8 (p + 2) (p + 4) \omega^2 + 8 p (p + 2) (p + 4) \right)
+ \frac{1}{48} \beta \left( \omega^6 - 12 (p + 2) (p + 4) \omega^2 + 8 p (p + 2) (p + 4) \right)
+ \frac{1}{32} \kappa \left( \omega^8 - 2 (p - 16) \omega^6 + 8 (p + 2) ((p - 2) p - 16) \omega^2
- 4 p (p^2 (p + 4) - 8) \right)
+ \frac{1}{16} \kappa \left( -8 \omega^6 - ((p - 23) p - 100) \omega^4 + 4 (p - 8) (p + 2) (p + 3) \omega^2
- 2 p (p + 2) ((p - 1) p - 8) \right)
+ \frac{1}{16} \beta \left( 3 \omega^6 - 8 (p + 4) \omega^4 + 6 (p + 2) (p + 4) \omega^2 + \frac{1}{8} (p^2 - 4) (p - \omega^2) \right),
\]

\[
b_1 = \frac{1}{64} \kappa^2 \left( -7 \omega^8 - 4 (p - 16) \omega^6 + 8 (p^2 (7 p + 32) + 24) \omega^4
- 8 (p + 2) (p (7 p + 40) + 60) \omega^2 + 4 p (p + 2) ((p - 3) p + 32) + 44) \right)
+ \frac{1}{32} \kappa \left( \omega^8 - 2 (p - 18) \omega^6 + 2 (p (4 p - 19) - 96) \omega^4
- 8 (p + 2) (p (p + 3) + 10) \omega^2 + 4 p (p + 2) (5 p + 22) \right)
\]
\[
\begin{align*}
\frac{1}{16} \beta & \left( -5 \omega^6 - 4(p + 4) \omega^4 + 18(p + 2)(p + 4) \omega^2 - 8p(p + 2)(p + 4) \right) \\
\frac{1}{16} \kappa & \left( -5(p + 4) \omega^6 + (p(9p + 47) + 12) \omega^4 - \frac{19}{8} (p + 2)(p + 4) \omega^2 + \frac{1}{3} p(p + 2)(p + 4) \right) \\
\beta & \left( \frac{15 \omega^6}{8} - \frac{13}{4}(p + 4) \omega^4 + (p + 2)(p + 4) \omega^2 \right) \\
\frac{1}{8} \omega^2 & \left( -\omega^6 + (3p + 25) \omega^4 - (p + 4)(3p + 25) \omega^2 + (p + 2)(p + 4)(p + 6) \right),
\end{align*}
\]

\[
\begin{align*}
b_3 = & \frac{1}{32} \kappa^2 \left( -5 \omega^8 + 2(23p + 104) \omega^6 - 4(p(19p + 158) + 336) \omega^4 + 4(p + 2)(p(9p + 80) + 180) \omega^2 - 4p(p + 2)(p + 4)(p + 6) \right) \\
\frac{1}{16} \kappa & \left( -5(p + 6) \omega^6 + (p(9p + 47) + 12) \omega^4 - \frac{19}{8} (p + 2)(p + 4) \omega^2 + \frac{1}{3} p(p + 2)(p + 4) \right) \\
\beta & \left( \frac{15 \omega^6}{8} - \frac{13}{4}(p + 4) \omega^4 + (p + 2)(p + 4) \omega^2 \right) \\
\frac{1}{8} \omega^2 & \left( -\omega^6 + (3p + 25) \omega^4 - (p + 4)(3p + 25) \omega^2 + (p + 2)(p + 4)(p + 6) \right),
\end{align*}
\]

\[
\begin{align*}
b_4 = & \frac{1}{128} \kappa^2 \left( -109 \omega^8 - 40(9p + 50) \omega^6 + 4(p(79p + 758) + 1776) \omega^4 - 80(p + 2)(p + 4)(p + 6) \omega^2 + 4p(p + 2)(p + 4)(p + 6) \right) \\
\frac{1}{32} \kappa & \left( -12 \omega^8 + 2(25p + 101) \omega^6 - (p(59p + 378) + 560) \omega^4 + 12(p + 2)(p + 4)(2p + 5) \omega^2 - 2p(p + 2)(p + 4)(p + 6) \right) \\
\beta & \left( \frac{15 \omega^6}{8} - \frac{13}{4}(p + 4) \omega^4 + (p + 2)(p + 4) \omega^2 \right) \\
\frac{1}{32} \kappa & \left( \omega^8 - 4(p + 13) \omega^6 + 4(p(p + 29) + 97) \omega^4 - 4(p + 2)(p + 4)(p + 13) \omega^2 + p(p + 2)(p + 4)(p + 6) \right),
\end{align*}
\]

\[
\begin{align*}
b_5 = & \frac{1}{16} \kappa^2 \left( -19 \omega^8 + (37p + 218) \omega^6 - 18(p + 4)(p + 6) \omega^4 + 2(p + 2)(p + 4)(p + 6) \omega^2 \right) \\
\frac{1}{16} \kappa & \left( 14 \omega^8 - (35p + 162) \omega^6 + 6(p + 4)(4p + 17) \omega^4 - 4(p + 2)(p + 4)(p + 6) \omega^2 \right) \\
\beta & \left( (p + 4) \omega^4 - \frac{11 \omega^6}{8} \right) \\
\frac{1}{8} \omega^2 & \left( -\omega^6 + (3p + 25) \omega^4 - (p + 4)(3p + 25) \omega^2 + (p + 2)(p + 4)(p + 6) \right),
\end{align*}
\]

\[
\begin{align*}
b_6 = & \frac{1}{32} \kappa^2 \left( 25 \omega^8 - 28(p + 6) \omega^6 + 6(p + 4)(p + 6) \omega^4 \right) \\
\frac{1}{32} \kappa & \left( -27 \omega^8 + 4(10p + 53) \omega^6 - 12(p + 4)(p + 6) \omega^4 \right) \\
\beta & \omega^6 + \frac{1}{48} \left( 9 \omega^8 - 2(9p + 61) \omega^6 + 9(p + 4)(p + 6) \omega^4 \right),
\end{align*}
\]
\begin{equation}
\begin{align*}
b_7 &= \frac{1}{8} \kappa^2 \left( -2 \omega^2 + p + 6 \right) \omega^6 + \frac{1}{8} \kappa \left( 3 \omega^2 - 2 (p + 6) \right) \omega^6 \\
&\quad + \frac{1}{8} \left( -\omega^2 + p + 6 \right) \omega^6, \\
b_8 &= \frac{1}{32} (\kappa - 1)^2 \omega^8.
\end{align*}
\end{equation}

したがって，\( T^2_e \) 統計量の渐近展开式は \( x > 0 \) に対して，

\[
\Pr[T^2_e < x] = G_p(x; \delta) + \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{4} a_j G_{p+2j}(x; \delta) + \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{8} a_j G_{p+2j}(x; \delta) + o(N^{-2}),
\]
となる。ここで，\( G_k(x; \delta) \) は，自由度 \( k \) 非心パラメータ \( \omega^2 = \epsilon' \Sigma^{-1} \epsilon \) の非心カイ二乗分布の分布関数である。

3. 数値実験

確率変数 \( X \) に対して \( \tau_0(x) = \Pr[X < x] \) をモンテカルロシミュレーションから得られた経験分布関数とし，\( \tau_i(x) \) \((i = 1, 2)\) を \( O(N^{-i}) \) の渐近展开式から得られた分布関数とする。ここでは二つの極円分布について実験し，そのパラメータを変化させる。

まず，以下のような確率密度関数をもつ混合正規分布を扱う。

\[
f(x; 0, I_p) = (1 - \epsilon) N_p(x|0, I_p) + \epsilon N_p(x|0, \sigma^2 I_p), (0 \leq \epsilon \leq 1)
\]

ここで，\( \epsilon \) は混合パラメータであり，\( \sigma^2 \) は混合分散である。また，\( N_p(x|\mu, \Sigma) \) は平均 \( \mu \)，共分散行列 \( \Sigma \) の \( p \) 次元の正規密度関数である。確率密度関数より特性パラメータは以下のようである。

\[
\kappa = \frac{1 + \epsilon (\sigma^4 - 1)}{(1 + \epsilon (\sigma^2 - 1))^2} - 1, \quad \beta = \frac{1 + \epsilon (\sigma^6 - 1)}{(1 + \epsilon (\sigma^2 - 1))^3} - 1.
\]

経験分布関数は区間 \([l, u] \) を 1000 個に分割し，10\(^7\) 個の \( T^2 \) 統計量をシミュレーションで求め，得られた統計量の各々の区間内に含まれる個数を数えることにより構成する。ここで \( l \) は，渐近展開式から得られた分布関数が十分小さい値，例えば 10\(^{-5}\) とすることになる近似値 \( \tau_2(l) \approx 10^{-5} \) であり，逆に \( u \) は \( \tau_2(u) \approx 1 - 10^{-5} \) を満たす近似値をあらかじめ数値的解法で得るものとする。混合分布の数値実験において変化させるパラメータは，標本数 \( N \)，次元数 \( p \)，非心パラメータ \( \omega^2 \) ，混合分散 \( \sigma^2 \) ，混合比 \( \epsilon \) であり，

\[
d_1 = \max_{l \leq x \leq u} |\tau_1(x) - \tau_0(x)|, \quad d_2 = \max_{l \leq x \leq u} |\tau_2(x) - \tau_0(x)| \leq 1 - d_2/d_1
\]

Table 1. は混合分布 (3.15) の近似での比較結果である。およそも本稿で得られた \( O(N^{-2}) \) の渐近式の方が \( O(N^{-1}) \) の渐近式の方より経験分布との絶対差は小さいく，近似が改善されているように思える。しかし，混合分散が極端に大きく，混合比が小さい場合は絶対差が逆転している。
Figure 1. 式 (3.15) 混合分布の元での漸近分布 τ2(縦) と 経験分布 τ0(太)

Figure 2. 式 (3.15) 混合分布の元での漸近分布 τ1(細) と 経験分布 τ0(太)

Figure 1. と Figure 2. は、条件 \((N, p, \omega^2, \sigma^2, \epsilon) = (11, 3, 1, 16, 0.2)\) の元での経験分布と 漸近分布をプロットした例であり、Figure 3. はその差をプロットしたものである。同条件で \(N = 60\) としたものが、Figure 4. である。

次に、確率密度関数は

\[
f(x; 0, I_p) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}p\right)}{(\pi \nu)^{\frac{1}{2}p} \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)} \left(1 + \nu^{-1}x'x\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+p)},
\]

であるような自由度 \(\nu\) の多変量 \(t\) 分布についても同様に数値実験をおこなう。この場合、

\[
k = \frac{2}{\nu - 4}, \quad \beta = \frac{2(3\nu - 10)}{(\nu - 4)(\nu - 6)},
\]

であり、パラメータ \(N, p, \omega^2\)、自由度 \(\nu\) を変化させる。

Table 2. は、Table 1. と同様、多変量 \(t\) 分布について絶対差の比を求めたものである。表中、自由度 \(\nu = 7\) の場合、(標本数が多くなれば若干解消されるものの) \(O(N^{-2})\) の漸近式は極端に悪い。これは、モーメント条件を満たしていないので、漸近展開そのものが有効でなく、このような結果になったと思われる。Figure 5. は、その一例として、条件 \((N, p, \omega^2, \nu) = (13, 4, 1, 7)\) の場合をプロットしたものであり、Figure 6. は、自由度 \(\nu = 13\) 以外は Figure 5. と同条件の場合をプロットしたものである。

また、Figure 7. と 8. は、それぞれ \(1 - d_2/d_1\) が Table 2. のなかで最小・最大となるものである。このように二つのタイプの楕円分布を パラメータを変化させ、数値実験をしたすべての場合で、\(O(N^{-2})\) の漸近式の方が \(O(N^{-1})\) の漸近式より経験分布への収束がはやい。
Figure 3: 混合分布：\((N, p, \omega^2, \sigma^2, \varepsilon) = (11, 3, 1, 16, 0.2)\)，\(\tau_2(x) - \tau_0(x)\)：细，\(\tau_1(x) - \tau_0(x)\)：太

Figure 4: 混合分布：\((N, p, \omega^2, \sigma^2, \varepsilon) = (60, 3, 1, 16, 0.2)\)，\(\tau_2(x) - \tau_0(x)\)：细，\(\tau_1(x) - \tau_0(x)\)：太

Figure 5: 多变量 \(t\) 分布：\((N, p, \omega^2, \nu) = (13, 4, 1, 7)\)，\(\tau_2(x) - \tau_0(x)\)：细，\(\tau_1(x) - \tau_0(x)\)：太

Figure 6: 多变量 \(t\) 分布：\((N, p, \omega^2, \nu) = (13, 4, 1, 13)\)，\(\tau_2(x) - \tau_0(x)\)：细，\(\tau_1(x) - \tau_0(x)\)：太

Figure 7: 多变量 \(t\) 分布：\((N, p, \omega^2, \nu) = (7, 2, 2, 7)\)，\(\tau_2(x) - \tau_0(x)\)：细，\(\tau_1(x) - \tau_0(x)\)：太

Figure 8: 多变量 \(t\) 分布：\((N, p, \omega^2, \nu) = (30, 4, 0, 9)\)，\(\tau_2(x) - \tau_0(x)\)：细，\(\tau_1(x) - \tau_0(x)\)：太
References


Table 1: 混合分布 (3.15) の元での $1 - d_2/d_1$ ($d_2$ = 経験分布と $O(N^{-2})$ の漸近分布の絶対差の最大値)。

<table>
<thead>
<tr>
<th>$\sigma^2$</th>
<th>$\varepsilon$</th>
<th>$p$</th>
<th>$\omega^2$</th>
<th>$N = 7$</th>
<th>$N = 11$</th>
<th>$N = 13$</th>
<th>$N = 30$</th>
<th>$N = 60$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0.58 (0.0225)</td>
<td>2</td>
<td>0.53 (0.0296)</td>
<td>0.67 (0.0839)</td>
<td>0.72 (0.0052)</td>
<td>0.87 (0.0004)</td>
<td>0.77 (0.0002)</td>
<td>0.70 (0.0002)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.50 (0.0381)</td>
<td>0.65 (0.0114)</td>
<td>0.70 (0.0072)</td>
<td>0.86 (0.0007)</td>
<td>0.78 (0.0003)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.45 (0.0762)</td>
<td>2</td>
<td>0.52 (0.0863)</td>
<td>0.60 (0.0235)</td>
<td>0.66 (0.0145)</td>
<td>0.84 (0.0013)</td>
<td>0.80 (0.0004)</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.40 (0.1000)</td>
<td>2</td>
<td>0.50 (0.0287)</td>
<td>0.64 (0.0180)</td>
<td>0.82 (0.0017)</td>
<td>0.81 (0.0005)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.32 (0.1908)</td>
<td>2</td>
<td>0.51 (0.0500)</td>
<td>0.59 (0.0338)</td>
<td>0.80 (0.0029)</td>
<td>0.90 (0.0004)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.31 (0.2036)</td>
<td>2</td>
<td>0.50 (0.0629)</td>
<td>0.57 (0.0392)</td>
<td>0.79 (0.0035)</td>
<td>0.89 (0.0005)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.54 (0.0221)</td>
<td>2</td>
<td>0.52 (0.0298)</td>
<td>0.67 (0.0083)</td>
<td>0.71 (0.0052)</td>
<td>0.86 (0.0005)</td>
<td>0.66 (0.0003)</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.50 (0.0394)</td>
<td>2</td>
<td>0.52 (0.0117)</td>
<td>0.66 (0.0074)</td>
<td>0.85 (0.0007)</td>
<td>0.79 (0.0003)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.43 (0.0748)</td>
<td>2</td>
<td>0.42 (0.0236)</td>
<td>0.66 (0.0145)</td>
<td>0.83 (0.0013)</td>
<td>0.82 (0.0004)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.40 (0.1027)</td>
<td>2</td>
<td>0.50 (0.0296)</td>
<td>0.63 (0.0185)</td>
<td>0.82 (0.0017)</td>
<td>0.84 (0.0004)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.30 (0.2051)</td>
<td>2</td>
<td>0.50 (0.0464)</td>
<td>0.56 (0.0401)</td>
<td>0.79 (0.0035)</td>
<td>0.90 (0.0004)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.29 (0.2261)</td>
<td>2</td>
<td>-0.26 (0.1148)</td>
<td>-0.16 (0.0498)</td>
<td>-0.14 (0.0357)</td>
<td>-0.02 (0.0049)</td>
<td>0.14 (0.0009)</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>-1.08 (0.2455)</td>
<td>-0.56 (0.0905)</td>
<td>-0.37 (0.0609)</td>
<td>0.38 (0.0064)</td>
<td>0.71 (0.0009)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>-1.72 (0.4445)</td>
<td>-0.82 (0.1611)</td>
<td>-0.55 (0.1084)</td>
<td>0.38 (0.0118)</td>
<td>0.72 (0.0016)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.31 (0.1883)</td>
<td>4</td>
<td>0.30 (0.0554)</td>
<td>0.58 (0.0339)</td>
<td>0.80 (0.0028)</td>
<td>0.90 (0.0004)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.29 (0.2261)</td>
<td>4</td>
<td>0.30 (0.0211)</td>
<td>0.60 (0.0139)</td>
<td>0.82 (0.0013)</td>
<td>0.86 (0.0003)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.14 (0.1212)</td>
<td>2</td>
<td>0.11 (0.0303)</td>
<td>0.11 (0.0187)</td>
<td>0.70 (0.0012)</td>
<td>0.83 (0.0002)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.12 (0.0316)</td>
<td>0</td>
<td>0.12 (0.1529)</td>
<td>0.48 (0.0498)</td>
<td>0.78 (0.0030)</td>
<td>0.88 (0.0004)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.17 (0.2315)</td>
<td>2</td>
<td>0.13 (0.2279)</td>
<td>0.28 (0.0828)</td>
<td>0.34 (0.0375)</td>
<td>0.71 (0.0025)</td>
<td>0.72 (0.0006)</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.21 (0.3534)</td>
<td>2</td>
<td>0.23 (0.2939)</td>
<td>0.40 (0.1004)</td>
<td>0.46 (0.0655)</td>
<td>0.74 (0.0059)</td>
<td>0.87 (0.0007)</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.57 (0.0221)</td>
<td>2</td>
<td>0.54 (0.0259)</td>
<td>0.68 (0.0069)</td>
<td>0.73 (0.0043)</td>
<td>0.87 (0.0004)</td>
<td>0.69 (0.0002)</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.51 (0.0316)</td>
<td>2</td>
<td>0.54 (0.0138)</td>
<td>0.66 (0.0088)</td>
<td>0.71 (0.0055)</td>
<td>0.86 (0.0005)</td>
<td>0.72 (0.0003)</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.45 (0.0737)</td>
<td>2</td>
<td>0.43 (0.0786)</td>
<td>0.61 (0.0205)</td>
<td>0.67 (0.0124)</td>
<td>0.85 (0.0010)</td>
<td>0.79 (0.0004)</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.41 (0.0872)</td>
<td>2</td>
<td>0.41 (0.0358)</td>
<td>0.59 (0.0235)</td>
<td>0.65 (0.0144)</td>
<td>0.84 (0.0012)</td>
<td>0.79 (0.0004)</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.32 (0.1846)</td>
<td>2</td>
<td>0.31 (0.1904)</td>
<td>0.53 (0.0491)</td>
<td>0.60 (0.0297)</td>
<td>0.81 (0.0024)</td>
<td>0.90 (0.0003)</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0.30 (0.2011)</td>
<td>2</td>
<td>0.30 (0.0535)</td>
<td>0.58 (0.0325)</td>
<td>0.81 (0.0027)</td>
<td>0.90 (0.0003)</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>
Table 2: 多変量 t 分布 (3.16) の元での $1 - d_2/d_1$ ($d_2 = \text{経験分布と } O(N^{-2}) \text{ の漸近分布の絶対差の最大値}$).

<table>
<thead>
<tr>
<th>$\nu$</th>
<th>$p$</th>
<th>$\omega^2$</th>
<th>$N = 7$</th>
<th>$N = 11$</th>
<th>$N = 13$</th>
<th>$N = 30$</th>
<th>$N = 60$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0</td>
<td>-4.15</td>
<td>(0.3271)</td>
<td>-3.38 (0.1240)</td>
<td>-3.00 (0.0857)</td>
<td>-0.20 (0.0120)</td>
<td>0.54 (0.0023)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>1</td>
<td>-4.84</td>
<td>(0.4609)</td>
<td>-3.77 (0.1990)</td>
<td>-3.30 (0.1504)</td>
<td>-0.77 (0.0584)</td>
<td>-0.15 (0.0473)</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>-5.43</td>
<td>(0.6290)</td>
<td>-3.90 (0.2752)</td>
<td>-3.32 (0.2097)</td>
<td>-0.68 (0.0866)</td>
<td>-0.14 (0.0725)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>3</td>
<td>0</td>
<td>-2.83</td>
<td>(0.5783)</td>
<td>-2.50 (0.2220)</td>
<td>-2.31 (0.1548)</td>
<td>-0.70 (0.0227)</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>-3.81</td>
<td>(0.9076)</td>
<td>-3.05 (0.3797)</td>
<td>-2.70 (0.2814)</td>
<td>-0.96 (0.0944)</td>
<td>-0.22 (0.0699)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>1</td>
<td>-2.36</td>
<td>(1.0397)</td>
<td>-2.13 (0.4194)</td>
<td>-1.98 (0.3026)</td>
<td>-1.05 (0.0756)</td>
<td>-0.37 (0.0438)</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>-2.79</td>
<td>(1.2521)</td>
<td>-2.37 (0.5104)</td>
<td>-2.16 (0.3714)</td>
<td>-0.99 (0.1045)</td>
<td>-0.29 (0.0687)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0</td>
<td>0.29</td>
<td>(1.009)</td>
<td>0.41 (0.0342)</td>
<td>0.47 (0.0222)</td>
<td>0.72 (0.0026)</td>
<td>0.35 (0.0028)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>-0.30</td>
<td>(0.0937)</td>
<td>-0.36 (0.0486)</td>
<td>-0.42 (0.0415)</td>
<td>-0.18 (0.0309)</td>
<td>-0.04 (0.0319)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>-0.45</td>
<td>(0.1279)</td>
<td>-0.46 (0.0694)</td>
<td>-0.50 (0.0600)</td>
<td>-0.17 (0.0478)</td>
<td>-0.04 (0.0501)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0</td>
<td>0.35</td>
<td>(0.1863)</td>
<td>0.53 (0.0528)</td>
<td>0.57 (0.0347)</td>
<td>0.83 (0.0028)</td>
<td>0.46 (0.0028)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>0.32</td>
<td>(0.2037)</td>
<td>0.41 (0.0746)</td>
<td>0.40 (0.0560)</td>
<td>0.10 (0.0267)</td>
<td>-0.05 (0.0257)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.30</td>
<td>(0.2229)</td>
<td>0.33 (0.0934)</td>
<td>0.32 (0.0725)</td>
<td>-0.01 (0.0421)</td>
<td>-0.05 (0.0427)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0</td>
<td>0.57</td>
<td>(0.0237)</td>
<td>0.70 (0.0066)</td>
<td>0.74 (0.0042)</td>
<td>0.41 (0.0022)</td>
<td>0.10 (0.0015)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.53</td>
<td>(0.0308)</td>
<td>0.37 (0.0194)</td>
<td>0.23 (0.0183)</td>
<td>-0.05 (0.0189)</td>
<td>-0.01 (0.0207)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.50</td>
<td>(0.0403)</td>
<td>0.27 (0.0288)</td>
<td>0.13 (0.0278)</td>
<td>-0.06 (0.0298)</td>
<td>-0.01 (0.0326)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>13</td>
<td>3</td>
<td>0.44</td>
<td>(0.0768)</td>
<td>0.62 (0.0206)</td>
<td>0.67 (0.0129)</td>
<td>0.66 (0.0027)</td>
<td>0.23 (0.0019)</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.41</td>
<td>(0.0995)</td>
<td>0.57 (0.0318)</td>
<td>0.55 (0.0254)</td>
<td>-0.01 (0.0268)</td>
<td>-0.01 (0.0298)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0</td>
<td>0.32</td>
<td>(0.1901)</td>
<td>0.53 (0.0504)</td>
<td>0.59 (0.0310)</td>
<td>0.77 (0.0035)</td>
<td>0.45 (0.0024)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>0.31</td>
<td>(0.2018)</td>
<td>0.52 (0.0569)</td>
<td>0.58 (0.0363)</td>
<td>0.39 (0.0141)</td>
<td>0.04 (0.0160)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.29</td>
<td>(0.2174)</td>
<td>0.50 (0.0651)</td>
<td>0.56 (0.0426)</td>
<td>0.24 (0.0237)</td>
<td>0.00 (0.0273)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0</td>
<td>0.56</td>
<td>(0.0230)</td>
<td>0.70 (0.0062)</td>
<td>0.74 (0.0039)</td>
<td>0.64 (0.0010)</td>
<td>0.22 (0.0007)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.54</td>
<td>(0.0279)</td>
<td>0.68 (0.0082)</td>
<td>0.66 (0.0064)</td>
<td>0.04 (0.0075)</td>
<td>0.01 (0.0084)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.51</td>
<td>(0.0347)</td>
<td>0.65 (0.0108)</td>
<td>0.57 (0.0101)</td>
<td>-0.00 (0.0121)</td>
<td>-0.00 (0.0134)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0</td>
<td>0.44</td>
<td>(0.0754)</td>
<td>0.62 (0.0197)</td>
<td>0.67 (0.0122)</td>
<td>0.79 (0.0014)</td>
<td>0.55 (0.0008)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.41</td>
<td>(0.0923)</td>
<td>0.58 (0.0267)</td>
<td>0.64 (0.0172)</td>
<td>0.22 (0.0105)</td>
<td>0.02 (0.0121)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>0</td>
<td>0.32</td>
<td>(0.1876)</td>
<td>0.53 (0.0489)</td>
<td>0.59 (0.0298)</td>
<td>0.79 (0.0028)</td>
<td>0.73 (0.0009)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>0.31</td>
<td>(0.1956)</td>
<td>0.52 (0.0526)</td>
<td>0.58 (0.0326)</td>
<td>0.70 (0.0051)</td>
<td>0.15 (0.0063)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>0.30</td>
<td>(0.2080)</td>
<td>0.51 (0.0583)</td>
<td>0.57 (0.0365)</td>
<td>0.56 (0.0090)</td>
<td>0.07 (0.0110)</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>