数理解析研究所講究録 1308 巻 2003 年 114-121

1標本, 2標本モデルにおける頑健な信頼区間

横浜市立大学大学院総合理学研究科数理科学
白石高章 (Taka-aki Shiraishi)
Department of Mathmatical Sciences,
Yokohama-City University

1 序

1標本モデルにおいて, 位置母数に関して, Huber (1964, 1981) の M 推定に基づいた頑健な区間推定法を提案する. その区間推定の漸近理論を論述する. さらに, その漸近理論により, 小標本の場合のブートストラップ法を考察する. 2標本モデルにおいて, Siraishi (1996) の M 推定に基づいた頑健な区間推定法を提案し, 1標本モデルの場合と同様の漸近理論とブートストラップ法を論述する.

2 1標本モデルの区間推定

2.1 モデル

$(X_1, \cdots, X_n)$ を連続分布関数 $F(\frac{x-\mu}{\sigma})$ をもつ母集団からの大きさ n の無作為標本とする. さらに, $F(x)$ の密度関数 $f(x) \equiv F'(x)$ は $f(-x) = f(x)$ を満たす0について対称な関数とし, 一般性を失うことなく $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = 1$ と仮定する. すなわち $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立で各 X_i は μ について対称な同一の連続分布関数 $F(\frac{x-\mu}{\sigma})$ をもつ. μ と σ^2 は, それぞれ X_i の平均と分散であるが未知パラメータとする.

2.2 漸近線形性

$$W(\Delta, \omega) \equiv \sum_{i=1}^{n} \{\Psi(\frac{X_i - \mu - \Delta/\sqrt{n}}{\rho e^{\omega/\sqrt{n}}}) - \Psi(\frac{X_i - \mu}{\rho})\}/\sqrt{n} + d(\Psi)\Delta/\sigma + e(\Psi)\omega,$$

$$W'(\Delta,\omega) \equiv \sum_{i=1}^{n}\{\Psi(\frac{X_i-\mu-\Delta/\sqrt{n}}{\rho e^{\omega/\sqrt{n}}})-\Psi(\frac{X_i-\mu}{\rho})\}/\sqrt{n}+d(\Psi)\Delta/\sigma$$

とおく, ただし,

$$d(\Psi) \equiv -\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\sigma x/\rho)f'(x)dx, \quad e(\Psi) \equiv -\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\sigma x/\rho)\{1+\frac{xf'(x)}{f(x)}\}f(x)dx$$

とする.

定理 1.1 Shiraishi, T. (1996) の条件 (c.1), (c.2) の下で, $\forall C_1,\ C_2,\ \epsilon>0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}P\{\sup_{|\Delta|<C_1,|\omega|<C_2}|W(\Delta,\omega)|>\epsilon\}=0. \qquad \square$$

$\Psi(\cdot)$ が奇関数ならば, $e=0$ より

系 1.2 $\Psi(\cdot)$ が奇関数ならば, 定理 1.1 の条件の下で, $\forall C_1,\ C_2,\ \epsilon>0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}P\{\sup_{|\Delta|<C_1,|\omega|<C_2}|W'(\Delta,\omega)|>\epsilon\}=0. \qquad \square$$

を得る.

系 1.3 $\Psi(\cdot)$ が奇関数ならば, 定理 1.1 の条件の下で, $\forall C_1,\ C_2,\ C_3,\ \epsilon>0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}P\{\sup_{|\Delta_1|<C_1,|\Delta_2|<C_2,|\omega|<C_3}|W'(\Delta_1+\Delta_2,\omega)|>\epsilon\}=0. \qquad \square$$

2.3 M 推定量

ここで紹介する M 手法では, 検定統計量と推定量を求めるために使われる関数 $\psi(\cdot)$ を

$$\psi(x) \equiv \max(\min(x,b),-b) = \begin{cases} -b & (x<-b) \\ x & (-b\le x\le b) \\ b & (x>b) \end{cases}$$

で定義し, b は, $F(x)$ が正規分布の ε 近傍
$U_\varepsilon \equiv \{F(x)=(1-\varepsilon)\Phi(x)+\varepsilon H(x):\Phi(x)$ は標準正規分布の分布関数, $H(x)$ は $h(x)=H'(x)$ とするときすべての x に対して $h(-x)=h(x)$ を満たすある分布関数 $\}$ の中にあるときの近似的に最良な手法を与えるように決められる. b と ε の関係は, $\varphi(x)$ と $\Phi(x)$ をそれぞれ N(0,1) の密度関数と分布関数として,

$$\frac{2\varphi(b)}{b}-2\Phi(-b)=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \tag{2.1}$$

である. 具体的な数値は次の表のとおりである.

表 1 ε を与えたときの最良な b の値

ε	0	0.005	0.01	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
b	∞	2.160	1.945	1.717	1.399	1.140	0.980	0.862	0.766

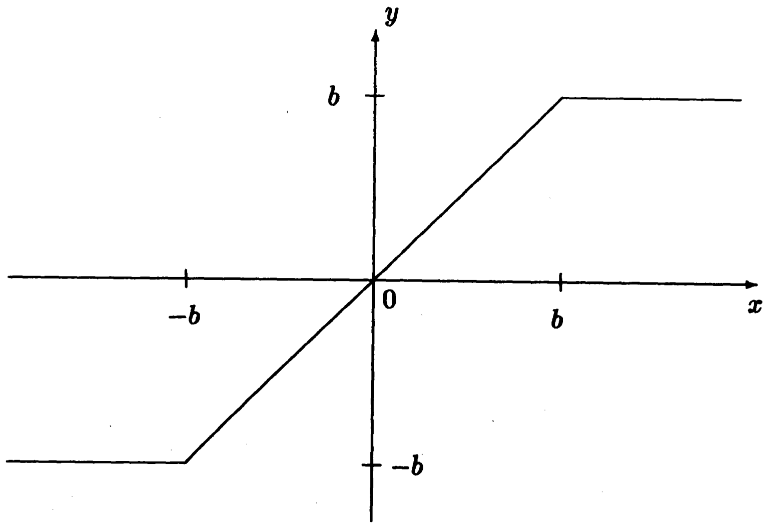

図 1　関数 $\psi(x)$

$$T_M(\mu) \equiv \sum_{i=1}^{n} \psi(\frac{X_i - \mu}{\hat{\sigma}_n}) = 0$$

の解 $\hat{\mu}_n$ を μ の点推定量で M 推定量と呼ばれている, ただし,

$$\hat{\sigma}_n \equiv \frac{1}{\Phi^{-1}(0.75)}(|X_1 - \mathrm{med}(X)|, \cdots, |X_n - \mathrm{med}(X)| \text{ の中央値}),$$

$$\mathrm{med}(X) \equiv (X_1, \cdots, X_n \text{ の中央値}).$$

$\hat{\sigma}_n$ は $\frac{\sigma F^{-1}(0.75)}{\Phi^{-1}(0.75)}$ の一致推定量で 前節の ρ を $\rho \equiv \frac{\sigma F^{-1}(0.75)}{\Phi^{-1}(0.75)}$ とおく.
系 1.2 より

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \psi(\frac{X_i - \hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_n})/\sqrt{n} \approx \sum_{i=1}^{n} \psi(\frac{X_i - \mu}{\rho})/\sqrt{n} - \sqrt{n}d(\psi)(\hat{\mu}_n - \mu)/\sigma$$

ただし, $A_n \approx B_n$ は $A_n - B_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ を意味する.

$$\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu) \approx (\sigma/d(\psi)) \sum_{i=1}^{n} \psi(\frac{X_i - \mu}{\rho})/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathrm{L}} N(0, c(\psi, f)\sigma^2/d^2(\psi)) \tag{2.2}$$

ただし, $c(\psi, f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(\sigma x/\rho) f(x) dx$.

2.4 区間推定

$$\hat{\eta}_n \equiv \{T_M(\hat{\mu}_n - \Delta/\sqrt{n}) - T_M(\hat{\mu}_n + \Delta/\sqrt{n})\}/(2\sqrt{n}\Delta)$$

とおくと, 系 1.3 より,

$$\hat{\eta}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} d(\psi)/\sigma \tag{2.3}$$

さらに,

$$\hat{c}_n(\psi,f) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi^2(\frac{X_i-\hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_n})$$

とおけば, $\Psi=\psi^2$ で定理 1.1 を適用することにより,

$$\sum_{i=1}^{n}\psi^2(\frac{X_i-\hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_n})/\sqrt{n} \approx \sum_{i=1}^{n}\psi^2(\frac{X_i-\mu}{\rho})/\sqrt{n}-\sqrt{n}d(\psi^2)(\hat{\mu}_n-\mu)/\sigma-\sqrt{n}e(\psi^2)(\log\hat{\sigma}_n-\log\rho)$$

により,

$$\hat{c}_n(\psi,f) \approx \sum_{i=1}^{n}\psi^2(\frac{X_i-\mu}{\rho})/n \xrightarrow{\mathrm{P}} c(\psi,f). \tag{2.4}$$

(1.2)-(1.4) より

補題 1.4

$$\frac{\sqrt{n}\hat{\eta}_n}{\sqrt{\hat{c}_n(\psi,f)}}(\hat{\mu}_n-\mu) \xrightarrow{\mathrm{L}} N(0,1).$$

定理 1.5

$$(\hat{\mu}_n-\frac{\sqrt{\hat{c}_n(\psi,f)}z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\hat{\eta}_n},\ \hat{\mu}_n+\frac{\sqrt{\hat{c}_n(\psi,f)}z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\hat{\eta}_n})$$

は $1-\alpha$ 漸近信頼区間である. □

2.5 ブートストラップ区間推定

標本 $X_1,\cdots,X_n$ の実現値 $x_1,\cdots,x_n$ から, 経験分布関数

$$\hat{G}_n(x) \equiv \frac{1}{n}\#\{x_i : x_i \le x, 1 \le i \le n\}$$

を構成し, X_i の従う分布関数を $\hat{G}_n(x)$ で推定する. $\hat{G}_n(x)$ に従う大きさ n の標本を B 組抽出し, それらを $\boldsymbol{X}^*(b) \equiv (X_1^*(b),\cdots,X_n^*(b))$ $(b=1,\cdots,B)$ とおく. $X_1^*(b),\cdots,X_n^*(b)$ は互いに独立に復元抽出される. $b=1,\cdots,B$ に対して $\boldsymbol{X}^*(b)$ を基に M 推定量 $\breve{\mu}_n^*(b)$ と (5.12) の統計量 $\breve{SD}_n^*(b)$ を計算し, $M(b) \equiv \frac{\breve{\mu}_n^*(b)-\breve{\mu}_n}{\breve{SD}_n^*(b)}$ とおく. $\{M(b) : b=1,\cdots,B\}$ の標本 $100\cdot(\frac{\alpha}{2})$ パーセント点と標本 $100\cdot(1-\frac{\alpha}{2})$ パーセント点をそれぞれ $W_{\alpha/2}$, $W_{1-\alpha/2}$ とするとき,

$$(\breve{\mu}_n+\breve{SD}_nW_{\alpha/2},\ \breve{\mu}_n+\breve{SD}_nW_{1-\alpha/2})$$

が M による信頼係数 $1-\alpha$ のブートストラップ信頼区間である.

標本 100α パーセント点：標本の小さい方から 100α パーセントの点 $(\frac{1}{n+1} \le \alpha \le \frac{n}{n+1})$, 標本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ を小さい方から並べ替えたものを $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$ とする. すなわち, $x_{(1)}$ と $x_{(n)}$ は $x_1,x_2,\cdots,x_n$ の最小値と最大値である.

$$z_\alpha = (1-c)x_{(j)} + cx_{(j+1)}$$

ただし, $j=[(n+1)\alpha]$, $c=(n+1)\alpha-[(n+1)\alpha]$, $[y]$ は y を越えない最大の整数を表す. すなわち, j は $(n+1)\alpha$ の整数部分を表し, c は $(n+1)\alpha$ の小数部分を表す.

3　2標本モデルの設定

$(X_1,\cdots,X_{n_1})$ を連続分布関数 $F(\frac{x-\mu_1}{\sigma})$ をもつ母集団からの大きさ n_1 の無作為標本, $(Y_1,\cdots,Y_{n_2})$ を連続分布関数 $F(\frac{x-\mu_2}{\sigma})$ をもつ母集団からの大きさ n_1 の無作為標本とする. すなわち, $X_1,\cdots,X_{n_1},Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ は互いに独立で, 各 X_i は同一の分布関数 $F(\frac{x-\mu_1}{\sigma})$ をもち, 各 Y_j は同一の分布関数 $F(\frac{x-\mu_2}{\sigma})$ をもつとする. さらに, 一般性を失うことなく $\int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)=0$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2dF(x)=1$ を仮定する. このとき,

$$E(X_i)=\mu_1,\quad E(Y_j)=\mu_2,\quad V(X_i)=V(Y_j)=\sigma^2$$

が成り立ち, μ_1, μ_2 はそれぞれ X_i と Y_j の平均で, σ^2 は共通の分散となる. これらは未知パラメータとする.

表 2　重要な非対称分布

ワイブル分布 $W(\alpha,\beta)$ 密度関数： $f(x\|\boldsymbol{\theta})=\beta\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\beta x^{\alpha})\quad(0<x<\infty)$ $\Theta=\{\boldsymbol{\theta}=(\alpha,\beta):0<\alpha,\ \beta<\infty\}$ 分布関数： $F(x\|\boldsymbol{\theta})=1-\exp(-\beta x^{\alpha})$ 平均, 分散： $E(X)=(\frac{1}{\beta})^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)$, $V(X)=(\frac{1}{\beta})^{\frac{2}{\alpha}}\{\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1)-\Gamma^2(\frac{1}{\alpha}+1)\}$
対数正規分布 $LN(\mu,\sigma)$ 密度関数： $f(x\|\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\quad(0<x<\infty)$ $\Theta=\{\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma):-\infty<\mu<\infty,0<\sigma<\infty\}$ 平均, 分散： $E(X)=\exp(\mu+\frac{\sigma^2}{2})$, $V(X)=\exp(2\mu+2\sigma^2)-\exp(2\mu+\sigma^2)$ 一般に $E(X^n)=\exp(n\mu+\frac{n^2\sigma^2}{2})$
指数分布 $EX(\lambda)$ 密度関数： $f(x\|\boldsymbol{\theta})=\lambda e^{-\lambda x}\quad(0<x<\infty)$ $\Theta=\{\boldsymbol{\theta}=\lambda:0<\lambda<\infty\}$. 分布関数： $F(x\|\boldsymbol{\theta})=1-e^{-\lambda x}$ 平均, 分散, 歪度, 尖度： $E(X)=\lambda$, $V(X)=\lambda^2$, $\ell_1=2$, $\ell_2=6$

3.1　漸近線形性

$n\equiv n_1+n_2$ とする.

$$W_1(\Delta_1+\Delta_2,\omega)\equiv\frac{\sqrt{n}}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\{\Psi(\frac{X_i-\mu_1-(\Delta_1+\Delta_2)/\sqrt{n}}{\rho e^{\omega/\sqrt{n}}})-\Psi(\frac{X_i-\mu_1}{\rho})\}+d(\Psi)(\Delta_1+\Delta_2)/\sigma+e(\Psi)\omega,$$

$$W_2(\Delta_1-\frac{n_1}{n_2}\Delta_2,\omega)\equiv\frac{\sqrt{n}}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\{\Psi(\frac{Y_j-\mu_2-(\Delta_1-\frac{n_1}{n_2}\Delta_2)/\sqrt{n}}{\rho e^{\omega/\sqrt{n}}})-\Psi(\frac{Y_j-\mu_2}{\rho})\}+d(\Psi)(\Delta_1-\frac{n_1}{n_2}\Delta_2)/\sigma+e(\Psi)\omega,$$

$$W(\Delta_1,\Delta_2,\omega)\equiv W_1(\Delta_1+\Delta_2,\omega)-W_2(\Delta_1-\frac{n_1}{n_2}\Delta_2,\omega)$$

とおく, ただし,

$$d(\Psi)\equiv-\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\sigma x/\rho)f'(x)dx,\quad e(\Psi)\equiv-\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\sigma x/\rho)\{1+\frac{xf'(x)}{f(x)}\}f(x)dx$$

とする.

$$\lim_{n\to\infty}n_1/n=\lambda$$

と仮定する.

補題 2.1　Shiraishi, T. (1996) の条件 (c.1), (c.2) の下で, $\forall C_1,\ C_2,\ C_3,\ \epsilon>0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}P\{\sup_{|\Delta_1|<C_1,|\Delta_2|<C_2,|\omega|<C_3}|W_1(\Delta_1+\Delta_2,\omega)|>\epsilon\}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}P\{\sup_{|\Delta_1|<C_1,|\Delta_2|<C_2,|\omega|<C_3}|W_2(\Delta_1-\frac{n_1}{n_2}\Delta_2,\omega)|>\epsilon\}=0.\qquad\square$$

定理 2.2　正則条件の下で, $\forall C_1,\ C_2,\ C_3,\ \epsilon>0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}P\{\sup_{|\Delta_1|<C_1,|\Delta_2|<C_2,|\omega|<C_3}|W(\Delta_1,\Delta_2,\omega)|>\epsilon\}=0.\qquad\square$$

3.2 頑健推定量

$$\bar{X}\equiv\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i,\ \bar{Y}\equiv\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}Y_j$$

とおき, $Z_1,\cdots,Z_n$ を

$$Z_i=\begin{cases}X_i-\bar{X} & (i=1,\cdots,n_1)\\ Y_{i-n_1}-\bar{Y} & (i=n_1+1,\cdots,n)\end{cases}\tag{3.1}$$

で定義する.

$$\tilde{\mu}=\frac{1}{n}(n_1\bar{X}+n_2\bar{Y})$$

とおき, $\breve{\sigma}_n\equiv\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\cdot n}\sum_{i=1}^{n}|Z_i|$ とおき,

$$T_M(\theta)\equiv\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\psi(\frac{X_i-\tilde{\mu}-\theta}{\breve{\sigma}_n})-\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\psi(\frac{Y_j-\tilde{\mu}+(\frac{n_1}{n_2})\cdot\theta}{\breve{\sigma}_n})$$

とおく. $T_M(\theta)=0$ の解を $\breve{\theta}_n$ とし, $\breve{\delta}_n=(1+\frac{n_1}{n_2})\cdot\breve{\theta}_n$ を $\delta\equiv\mu_1-\mu_2$ の点推定量とする.
$\breve{\sigma}_n$ は $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|dF(x)$ の一致推定量で 前節の ρ を $\rho\equiv\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|dF(x)$ とおく.
定理 2.2 より

$$0=\sqrt{n}T_M(\breve{\theta}_n)\approx\frac{\sqrt{n}}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\{\psi(\frac{X_i-\mu_1}{\rho})-\bar{\psi}\}-\frac{\sqrt{n}}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\{\psi(\frac{Y_j-\mu_2}{\rho})-\bar{\psi}\}-\sqrt{n}d(\psi)(\breve{\delta}_n-\delta)/\sigma$$

ただし, $\bar{\psi} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\frac{\sigma x}{\rho}) dF(x)$ とする.

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\breve{\delta}_n - \delta) &\approx (\sigma/d(\psi))[\frac{\sqrt{n}}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\{\psi(\frac{X_i-\mu_1}{\rho}) - \bar{\psi}\} - \frac{\sqrt{n}}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\{\psi(\frac{Y_j-\mu_2}{\rho}) - \bar{\psi}\}] \\ &\xrightarrow{\mathrm{L}} N(0, c'(\psi, f)\sigma^2/\{\lambda(1-\lambda)d^2(\psi)\}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし, $c'(\psi, f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\{\psi(\sigma x/\rho) - \bar{\psi}\}^2 f(x) dx$.

3.3 区間推定

$$\breve{\eta}_n \equiv \sqrt{n}\{T_M(\breve{\theta}_n - \Delta/\sqrt{n}) - T_M(\breve{\theta}_n + \Delta/\sqrt{n})\}/\{2(1+\frac{n_1}{n_2})\Delta\}$$

とおくと, 定理 2.2 を使って, (1.3) と同様に

$$\breve{\eta}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} d(\psi)/\sigma \tag{3.3}$$

さらに,

$$\breve{c}_n(\psi, f) \equiv \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n_1}\{\psi(\frac{X_i - \bar{X}}{\breve{\sigma}_n}) - \bar{\psi}(X,Y)\}^2 + \sum_{j=1}^{n_2}\{\psi(\frac{Y_j - \bar{Y}}{\breve{\sigma}_n}) - \bar{\psi}(X,Y)\}^2]$$

$$\bar{\psi}(X,Y) \equiv \frac{1}{n}\{\sum_{i=1}^{n_1}\psi(\frac{X_i - \bar{X}}{\breve{\sigma}_n}) + \sum_{j=1}^{n_2}\psi(\frac{Y_j - \bar{Y}}{\breve{\sigma}_n})\}$$

とおけば, (1.4) と同様に,

$$\breve{c}_n(\psi, f) \xrightarrow{\mathrm{P}} c'(\psi, f). \tag{3.4}$$

(1.2)-(1.4) より

補題 2.3

$$\frac{\sqrt{n_1 n_2}\breve{\eta}_n}{\sqrt{n\breve{c}_n(\psi, f)}}(\breve{\delta}_n - \delta) \xrightarrow{\mathrm{L}} N(0, 1).$$

定理 2.4

$$(\breve{\delta}_n - \frac{\sqrt{n\breve{c}_n(\psi, f)}z_{\alpha/2}}{\sqrt{n_1 n_2}\breve{\eta}_n}, \breve{\delta}_n + \frac{\sqrt{n\breve{c}_n(\psi, f)}z_{\alpha/2}}{\sqrt{n_1 n_2}\breve{\eta}_n})$$

は $1-\alpha$ 漸近信頼区間である. □

3.4 ブートストラップ区間推定

標本 $X_1, \cdots, X_{n_1}$ の実現値 $x_1, \cdots, x_{n_1}$ と $Y_1, \cdots, Y_{n_2}$ の実現値 $y_1, \cdots, y_{n_2}$ から, それぞれの経験分布関数

$$\hat{G}_{1n}(x) \equiv \frac{1}{n_1}\#\{x_i : x_i \leq x, 1 \leq i \leq n_1\} = \frac{1}{n_1}\{x \text{ 以下となる } x_i \text{の個数}\},$$

$$\hat{G}_{2n_2}(x) \equiv \frac{1}{n_2}\#\{y_j : y_j \le x, 1 \le j \le n_2\} = \frac{1}{n_2}\{x \text{ 以下となる } y_j \text{の個数}\}$$

を構成し, X_i と Y_j の従うそれぞれの分布関数をこの 2 つの経験分布関数で推定する. $\hat{G}_{1n_1}(x)$ に従う大きさ n_1 の標本を B 組抽出し, それらを $\boldsymbol{X}^*(b) \equiv (X_1^*(b), \cdots, X_{n_1}^*(b))$ $(b = 1, \cdots, B)$ とおく. $X_1^*(b), \cdots, X_{n_1}^*(b)$ は互いに独立に復元抽出される. すなわち, $P(X_i^*(b) = x_1) = P(X_i^*(b) = x_2) = \cdots = P(X_i^*(b) = x_{n_1}) = \frac{1}{n_1}$. 同様に $\hat{G}_{2n_2}(x)$ に従う大きさ n_2 の標本を B 組抽出し, それらを $\boldsymbol{Y}^*(b) \equiv (Y_1^*(b), \cdots, Y_{n_2}^*(b))$ $(b = 1, \cdots, B)$ とおく. $b = 1, \cdots, B$ に対して $\boldsymbol{Z}^*(b)$ を基に M 推定量 $\breve{\delta}_n^*(b)$ と (6.6) の統計量 $\breve{SD}_n^*(b)$ を計算し, $M(b) \equiv \frac{\breve{\delta}_n^*(b) - \breve{\delta}_n}{\breve{SD}_n^*(b)}$ とおく. $\{M(b) : b = 1, \cdots, B\}$ の 標本 $100 \cdot (\frac{\alpha}{2})$ パーセント点と標本 $100 \cdot (1 - \frac{\alpha}{2})$ パーセント点をそれぞれ $W_{\alpha/2}, W_{1-\alpha/2}$ とするとき,

$$(\breve{\delta}_n + \breve{SD}_n W_{\alpha/2},\ \breve{\delta}_n + \breve{SD}_n W_{1-\alpha/2})$$

が M 推定量による信頼係数 $1 - \alpha$ のブートストラップ信頼区間である.

参考文献

1. Davison, A. C. and Hinkley, D. V. (1997). Bootstrap Methods and their Application. Cambridge University Press.
2. Hájek, J., Šidák, Z. and Sen, P. K. (1999). Theory of Rank Tests, 2nd Edition. Academic Press.
3. Huber, P. J. (1964). Robust estimation of a location parameter. Ann. Math. Statist. 35, p73-101.
4. Huber, P. J. (1981). Robust Statistics. Wiley.
5. Shiraishi, T. (1990). R-estimators and confidence regions in one-way MANOVA. J. Statist. Plan. Infer., 24, p203-214.
6. Shiraishi, T. (1996). On scale-invariant M-statistics in multivariate k samples. J. Japan Statist. Soc., 26, p241-253.
7. Shiraishi, T. (1998). Studentized robust statistics in multivariate randomized block design. J. Nonparametric Statist., 10, p95-110.
8. 白石高章 (2002). 一標本モデルにおける分布探索による統計的推測論. 鹿児島大学シンポジウム予稿集.
9. 白石高章 (2003). 『統計科学——パラメトリック・ノンパラメトリック・セミパラメトリックの基礎から Esoft, Excel によるデータ解析まで』 日本評論社.
10. 前園宜彦 (2001). 『統計的推測の漸近理論』 九州大学出版会.