数理解析研究所講究録 1308 巻 2003 年 122-131

Second Order Asymptotic Optimality of Estimators under Universal Domination Criterion

大阪府立大学 総合科学部　高木 祥司（Yoshiji Takagi）
College of Integrated Arts and Sciences
Osaka Prefecture University

1. はじめに

推定量の良さを比較する問題を，漸近２次最適性理論にもとづいて考える．その際，推定量の優劣は，当然，損失関数の選択に依存することになる．したがって，異なる損失関数のもとでは，優劣の逆転現象が起こることもありうるだろう．ここでは，一般的な損失関数の族を考え，その集合上で推定量の良さを比較するという，ユニバーサルな最適理論について考えていこう．(Hwang (1985), Brown and Hwang (1989)).

2．リスク差と損失係数

確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立同分布で，密度 $f(x;\theta)$ にしたがっているとする．フィッシャー情報量 $I = I(\theta)$ は，すべての θ に対して連続で，$I(\theta) > 0$ であると仮定する．また，記号 μ_{ijk} は次のように定義する．

$$\mu_{ijk} = E_\theta\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^i\left(\frac{f''}{f}\right)^j\left(\frac{f'''}{f}\right)^k\right].$$

ここで，f', f'', f''' は，それぞれ，θ での $1, 2, 3$ 階導関数を表している．

任意の損失関数 $\ell(z)$ は，$\ell(0) = 0$ であり，0 に対して対称，さらに，$|z|$ に対して広義単調増加であるとする．

この研究においては，損失関数 $\ell(z)$ のもとでの，パラメータ θ の任意の推定量 T_n に対するリスク関数として，

$$R_\ell(\theta; T_n) = E\left[\ell(\sqrt{n}\sqrt{I}(T_n - \theta))\right]$$

を採用する．ここで，このタイプの損失関数の特徴として，損失関数が適用される前に，推定量がフィッシャー情報量によって標準化されていることに注意しよう．

いま，推定量 T_n を一般に言う1次有効な推定量としたときに，一般的な正則条件のもと，リスク $R_\ell(\theta;T_n)$ の漸近展開は次のように与えられる：

$$\begin{aligned}R_\ell(\theta;T_n) = &\int_{-\infty}^{\infty}\ell(y)\phi(y)dy\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{\kappa_{21}}{\sqrt{n}}+\frac{\kappa_{22}}{n}+\frac{\kappa_{11}^2}{n}\right\}(y^2-1)\ell(y)\phi(y)dy\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\kappa_{42}}{24n}+\frac{\kappa_{21}^2}{8n}+\frac{\kappa_{11}\kappa_{31}}{6n}\right\}(y^4-6y^2+3)\ell(y)\phi(y)dy\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\kappa_{31}^2}{72n}(y^6-15y^4+45y^2-15)\ell(y)\phi(y)dy+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

ここで，記号 κ_{ij} は，$\sqrt{n}\sqrt{I}(T_n-\theta)$ の r 次のキュムラント $C_r(\theta)$ から，次で導かれる：

$$C_r(\theta)=\kappa_{r0}+\frac{\kappa_{r1}}{\sqrt{n}}+\frac{\kappa_{r2}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad \text{for } r=1,2,3,4.$$

また、$\phi(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数である．

今，2つの推定量 $\tilde{\theta}_d=\hat{\theta}_{ML}+d(\hat{\theta}_{ML})/n$ と $\tilde{\theta}_c=\hat{\theta}_{ML}+c(\hat{\theta}_{ML})/n$ を2次オーダーで比較しよう．ここで，$\hat{\theta}_{ML}$ はMLEである．$\tilde{\theta}_d$ に対するキュムラントを κ_{ij} で，$\tilde{\theta}_c$ に対するキュムラントを $\tilde{\kappa}_{ij}$ で表すと，κ_{ij} と $\tilde{\kappa}_{ij}$ の間に次の関係が成り立つ：

$$\kappa_{11}^2-\tilde{\kappa}_{11}^2=\sqrt{I}(d-c)\left\{\sqrt{I}d+\sqrt{I}c-\frac{\mu_{110}}{I\sqrt{I}}\right\},$$

$$\kappa_{21}=\tilde{\kappa}_{21}=0,\quad \kappa_{22}-\tilde{\kappa}_{22}=2(d'-c'),\quad \kappa_{31}=\tilde{\kappa}_{31}=\frac{\mu_{300}-3\mu_{110}}{I\sqrt{I}},$$

$$\kappa_{31}\kappa_{11}-\tilde{\kappa}_{31}\tilde{\kappa}_{11}=\sqrt{I}(d-c)\frac{\mu_{300}-3\mu_{110}}{I\sqrt{I}},\qquad \kappa_{42}=\tilde{\kappa}_{42}.$$

ここで，d' と c' は，d と c の θ での導関数である．したがって，2つの推定量 $\tilde{\theta}_d$

と $\tilde{\theta}_c$ のリスク差 $\Delta_\ell(\theta;\tilde{\theta}_d,\tilde{\theta}_c)$ は，次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
&\Delta_\ell(\theta;\tilde{\theta}_d,\tilde{\theta}_c)\\
&= R_\ell(\theta;\tilde{\theta}_d) - R_\ell(\theta;\tilde{\theta}_c)\\
&= \frac{1}{n}\left\{(d'-c') + \frac{I(d-c)}{2}\left(d+c-\frac{\mu_{110}}{I^2}\right) - \frac{I(d-c)}{2}\frac{\mu_{300}-3\mu_{110}}{I^2}\right\}\\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{\infty}(y^2-1)\ell(y)\phi(y)dy\\
&\quad + \frac{1}{n}\frac{I(d-c)}{6}\frac{\mu_{300}-3\mu_{110}}{I^2}\int_{-\infty}^{\infty}(y^4-6y^2+3)\ell(y)\phi(y)dy + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

今，損失関数に依存する２つの量 A_ℓ と B_ℓ を次のように定義する：

$$
A_\ell = \int_{-\infty}^{\infty}(y^2-1)\ell(y)\phi(y)dy, \qquad B_\ell = \int_{-\infty}^{\infty}(y^4-3y^2)\ell(y)\phi(y)dy.
$$

ここで，$A_\ell, B_\ell > 0$ となることに注意しよう．さらに，k_ℓ を $k_\ell = B_\ell/A_\ell$ とおくことにする．このとき、２つの推定量の漸近２次比較問題においては，リスク差 $\Delta_\ell(\theta;\tilde{\theta}_d,\tilde{\theta}_c)$ の符号に興味があることより，リスク差の２次項の変形である

$$
\Delta_\ell^{(2)}(\theta;\tilde{\theta}_d,\tilde{\theta}_c) = Ig^2 + Ig\left(2c + \frac{(2-k_\ell)\mu_{110}}{I^2} + \frac{(k_\ell/3-1)\mu_{300}}{I^2}\right) + 2g'
$$

を評価すればよいこととなる．ここで，$g = d-c$ で，g' は，g の θ での導関数である．

このようにリスク差が表現された結果は，漸近（１次）有効な２つの推定量をリスクの２次項で比較する問題において，損失関数が及ぼす影響についての重要かつ驚くべき特徴を示してることに注意しよう．すなわち，２つの推定量の優劣は，損失関数 ℓ の選択に対して，それを代表するある値 k_ℓ の値のみで決まるということである．極言すれば，漸近２次最適性理論は，この k_ℓ によって特徴付けられると言ってもいいだろう．実際，２つの推定関数 ℓ_1 と ℓ_2 が同じ k_ℓ の値を持つならば，これらの損失関数に基づく推定問題は，漸近２次最適性理論のもとでまったく同じになる．この重要な量 k_ℓ を以下では「損失係数」と呼ぶことにしよう．

いま，いくつかの基本的な損失関数について，それらの損失係数を計算してみよう．まず，損失関数 $\ell_1 = |z|^p$ $(p>0)$ を考えよう．このとき，$A_{\ell_1} = 2pq, B_{\ell_1} = 2p(p+1)q$

を得る．ここで，$q = \int_0^\infty x^p \phi(x)dx$ である．したがって，損失係数 $k_{\ell_1} = B_{\ell_1}/A_{\ell_1} = p+1$ を得る．

次に，$0-1$ 損失関数

$$\ell_2(z) = \begin{cases} 1 & |z| \geq r \\ 0 & |z| < r, \end{cases}$$

を考える．このとき，$A_{\ell_2} = 2r\phi(r), B_{\ell_2} = 2r^3\phi(r)$ となって，$k_{\ell_2} = B_{\ell_2}/A_{\ell_2} = r^2$ を得る．

結果として，2 乗損失は，$r = \sqrt{3}$ での $0-1$ 損失と同等であることがわかった．同様に，絶対損失は，$r = \sqrt{2}$ での $0-1$ 損失と同等になる．

ここで，損失係数の統計学的意味を考えてみよう．上の例から，関数値の広がりが大きいほど，損失係数は大きくなっていることがわかる．そうした傾向は，k_ℓ の定義での分子項が影響している．一方，分母項は，一種の標準化を表している．実際，c を正の定数とすると，ℓ と $c\ell$ の損失係数は同じになり，これは，分母項の役割を示している．つまり，損失係数は，標準化のもとでの関数値の広がり程度を表す指標であると言えるだろう．

次に損失係数の重要な特徴を注意しておこう．それは，一般的な損失関数の族を考えたとき，損失係数は，0 から ∞ までのすべての実数値を取りうるということである．実際，上の $0-1$ 損失において，任意の正数 k に対して，$r = \sqrt{k}$ とすれば，その損失係数は k となることがわかる．

3． 2つの推定量のユニバーサルな比較

損失係数の概念を用いることによって，2 つの推定量の優劣についての統計的定義を与えることができる．

定義 1　損失係数 $k_\ell = k$ をもつ損失関数の族を考える．推定量 δ のリスクが次の形をもつとする：

$$R_\ell(\theta;\delta) = r_\ell^{(1)}(\theta;\delta) + \frac{1}{n} r_\ell^{(2)}(\theta;\delta) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

今，2 つの推定量 δ_1, δ_2 に対して，すべての θ で

$$r_\ell^{(1)}(\theta;\delta_1) = r_\ell^{(1)}(\theta;\delta_2)$$

が成り立っているとする．このとき，もしすべての θ で，

$$r_\ell^{(2)}(\theta;\delta_1) \leq r_\ell^{(2)}(\theta;\delta_2)$$

となり，かつ，ある θ で不等号が成り立つならば，推定量 δ_1 は，損失係数 k に対して，2次で，推定量 δ_2 をドミネイトするという．そのとき，そのドミネーションを記号 $\delta_1 \gg_k \delta_2$ で表す．また，お互いにドミネーションが起こらないとき，それを $\delta_1 \approx_k \delta_2$ で表す．

このとき，損失係数は任意の正値をとることから，ユニバーサルな最適性についての次の定義を得る．

定義 2　すべての $k\ (0 < k < \infty)$ に対して，

$$\delta_1 \gg_k \delta_2$$

が成立するならば，推定量 δ_1 は，2次で，ユニバーサルに，推定量 δ_2 をドミネイトするという．それを，記号 $\delta_1 \gg \delta_2$ で表す．

ユニバーサルな最適性問題のもとで，2つの推定量 δ_1, δ_2 を比較しよう．このとき，損失係数の変化に応じて，比較結果は次の6つに分類される．
(i) すべての $k \in R^+ = (0,\infty)$ に対して，$\delta_1 \gg_k \delta_2$ が成り立つ．
(ii) ある集合 $K \subset R^+$ において，$k \in K$ で $\delta_1 \gg_k \delta_2$，$k \in K^c$ で $\delta_1 \approx_k \delta_2$ となる．
(iii) ある集合 $K_1 \subset R^+$，ある集合 $K_2 \subset R^+$ と，集合 $K_3 = R^+ - K_1 - K_2$ において，$k \in K_1$ で $\delta_1 \gg_k \delta_2$，$k \in K_2$ で $\delta_2 \gg_k \delta_1$，$k \in K_3$ で $\delta_1 \approx_k \delta_2$ となる．
(iv) すべての $k \in R^+$ に対して，$\delta_1 \approx_k \delta_2$ となる．
(v) ある集合 $K \subset R^+$ において，$k \in K$ で $\delta_2 \gg_k \delta_1$，$k \in K^c$ で $\delta_1 \approx_k \delta_2$ となる．
(vi) すべての $k \in R^+$ に対して，$\delta_2 \gg_k \delta_1$ が成り立つ．

いま，2つの推定量 δ_1, δ_2 のどちらかを選択するという問題に直面したとしよう．そのとき，次のような判断を下すのが適切であろう．
(1) (i) または (ii) ならば，δ_1 を選ぶ．
(2) (v) または (vi) ならば，δ_2 を選ぶ．
(3) (iv) ならば，どちらを選んでも差しつかえないだろう．

(4) (iii) ならば，できればどちらも選びたくない．

これらの結果をもとに，2つの推定量のユニバーサルな比較について，次のような定義を与えることができるだろう．

定義 3

(1) (i) または (ii) が起こったとき，推定量 δ_1 は，推定量 δ_2 に対して，漸近2次においてユニバーサルに優れている，または，推定量 δ_2 は，推定量 δ_1 に対して，漸近2次においてユニバーサルに非許容的であるという．同様に，(v) または (vi) が起こったとき，推定量 δ_2 は，推定量 δ_1 に対して，漸近2次においてユニバーサルに優れている，または，推定量 δ_1 は，推定量 δ_2 に対して，漸近2次においてユニバーサルに非許容的であるという．

(2) (i) または (ii) または (iv) が起こったとき，推定量 δ_1 は，推定量 δ_2 に対して，漸近2次においてユニバーサルに許容的であるという．同様に，(iv) または (v) または (vi) が起こったとき，推定量 δ_2 は，推定量 δ_1 に対して，漸近2次においてユニバーサルに許容的であるという．

注意　一般の決定理論において，非許容性の否定は，許容性である．しかし，ユニバーサル基準に対するここでの定義は，そうではない．このような非標準的な定義を採用した理由は，ユニバーサル基準において特徴的な状況である (iii) を，許容的あるいは非許容的に分類することが不適切であるように思えたからである．

4．例

ここで，いくつかの例を考えることにしよう．ここでは，よく知られた3つのバイアス修正推定量，つまり，MLE そのもの $\hat{\theta}_{ML}$，MLE の漸近不偏な推定量 $\hat{\theta}_E$，MLE の漸近中央値不偏な推定量 $\hat{\theta}_{(m)}$ の良さを調べてみる．比較する推定量は，族 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta} = \left\{ \tilde{\theta}_{ML} = \hat{\theta}_{ML} + \frac{1}{n}\left(\alpha\frac{\mu_{110}}{I^2} + \beta\frac{\mu_{300}}{I^2}\right)\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{ML}} \;\Bigg|\; \alpha, \beta \in R \right\}$$

に属しているとしよう．ここで，上の3つの推定量は，この族に属していることに注意しよう．実際，$\hat{\theta}_{ML}, \hat{\theta}_E, \hat{\theta}_{(m)}$ は，それぞれ，$(\alpha,\beta) = (0,0), (\alpha,\beta) = (1/2,0), (\alpha,\beta) = (0,1/6)$ に対応している．

例 1　2 次元正規モデル $N(\eta_\theta, I_2)$ を考える．ここで，$\eta_\theta^t = (\theta, \theta^2/2)$ で，I_2 は，2×2 の単位行列である．このモデルにおいて，

$$I_\theta = 1 + \theta^2 \quad \mu_{110} = \theta \quad \mu_{300} = 0$$

が成り立つ．また，族 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$ は，

$$\mathcal{T}_{\alpha,0} = \left\{ \tilde{\theta}_\alpha = \hat{\theta}_{ML} + \frac{1}{n} \frac{\alpha\mu_{110}}{I^2} \bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{ML}} \;\middle|\; \alpha \in R \right\}$$

となる．

まず，このモデルでは，$\hat{\theta}_{ML}$ と $\hat{\theta}_{(m)}$ は同じ推定量になることを注意しよう．いま，$\hat{\theta}_{ML}$ を任意の推定量 $\tilde{\theta}_\alpha \in \mathcal{T}_{\alpha,0}$ と比較する．そのとき，

$$\Delta_\ell^{(2)}(\theta; \tilde{\theta}_\alpha, \hat{\theta}_{ML}) = \frac{(\alpha^2 - 4\alpha - k\alpha)\theta^2 + 2\alpha}{I^3}$$

を得る．いま，$I > 0$ だから，定義域 $\theta \in (-\infty, \infty)$ 上での $\Delta(\theta) = (\alpha^2 - 4\alpha - k\alpha)\theta^2 + 2\alpha$ の符号を評価すれば十分である．

まず，$\alpha > 4$ の場合を考えよう．このとき，$k \leq \alpha - 4$ となるような任意の k に対して，$\Delta(\theta)$ はすべての θ で正となる．このことは，$k \leq \alpha - 4$ に対して，$\hat{\theta}_{ML} \gg_k \tilde{\theta}_\alpha$ が成立することを意味している．一方，$k > \alpha - 4$ に対して，$\Delta(\theta)$ の値域は，$(-\infty, 2\alpha]$ となり，ゆえに，この範囲の k に対して，$\hat{\theta}_{ML} \approx_k \tilde{\theta}_\alpha$ となる．結果として，この比較はケース (ii) の状況になっている．つまり，$\alpha > 4$ に対して，MLE $\hat{\theta}_{ML}$ は，$\tilde{\theta}_\alpha$ に対して，2 次でユニバーサルに優れているといえる．

次に，$0 < \alpha \leq 4$ の場合を考える．このとき，すべての k に対して，$\Delta(\theta)$ の値域は，$(-\infty, 2\alpha]$ となり，したがって，2 つの推定量の関係は，(iv) の形になる．

最後に，$\alpha < 0$ の場合は，すべての k に対して，$\Delta(\theta)$ の値域は，$[2\alpha, \infty)$ となり，したがって，2 つの推定量の関係は，(iv) の形になる．

ここで，重要な一つの結果に注目しておかねばならない．それは，$\mathcal{T}_{\alpha,0}$ に属するすべての推定量に対して，MLE は，2 次ユニバーサル許容性をもつということである．

まったく同様の方法にしたがって，$\hat{\theta}_E$ を任意の推定量 $\tilde{\theta}_\alpha \in \mathcal{T}_{\alpha,0}$ と比較することができる．リスク差の評価式は，

$$\Delta_\ell(\theta; \tilde{\theta}_\alpha, \hat{\theta}_E) = \left\{ \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 - (3+k)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \right\} \frac{\theta^2}{I^3} + \frac{2\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{I^3}$$

となり，したがって，$\alpha > 7/2$ に対して，MLE の不偏修正は，関係 (ii) をもち，$\alpha \leq 7/2$ $(\alpha \neq 1/2)$ に対しては，関係 (iv) をもつ．ゆえに，MLE の不偏修正は，$\mathcal{T}_{\alpha,0}$ に属するすべての推定量に対して，2 次ユニバーサル許容性をもつということもわかる．

例 2　平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$，分散共分散行列 Σ をもつ 2 次元正規分布を考える．ここで，

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$I_\theta = \frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2}, \quad \mu_{110} = 0, \quad \mu_{300} = -\frac{2\theta(\theta^2+3)}{(1-\theta^2)^3}$$

となり，したがって，族 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$ は，

$$\mathcal{T}_{0,\beta} = \left\{ \tilde{\theta}_\beta = \hat{\theta}_{ML} + \frac{1}{n}\frac{\beta\mu_{300}}{I^2}\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{ML}} \;\Big|\; \beta \in R \right\}$$

となる．

このモデルでは，$\hat{\theta}_{ML}$ と $\hat{\theta}_E$ は同じ推定量になることを注意しよう．いま，$\hat{\theta}_{ML}$ を任意の推定量 $\tilde{\theta}_\beta \in \mathcal{T}_{0,\beta}$ と比較する．そのとき，リスク差の評価式は，

$$\Delta_\ell^{(2)}(\theta; \tilde{\theta}_\beta, \hat{\theta}_{ML}) = \left(\beta^2 - \beta + \frac{\beta k}{3}\right)\frac{\mu_{300}^2}{I^3} + 2\beta\left(\frac{\mu_{300}}{I^2}\right)'$$

となる．ここで，関係式 $I' = 2\mu_{110} - \mu_{300}$ と $\mu_{110} = 0$ を使うと，

$$\left(\frac{\mu_{300}}{I^2}\right)' = \frac{\mu_{300}'}{I^2} + \frac{2\mu_{300}^2}{I^3}$$

となって，したがって，

$$\Delta_\ell^{(2)}(\theta; \tilde{\theta}_\beta, \hat{\theta}_{ML}) = \left(\beta^2 + 3\beta + \frac{\beta k}{3}\right)\frac{\mu_{300}^2}{I^3} + 2\beta\frac{\mu_{300}'}{I^2}$$

を得る．さらに，

$$\mu_{300}' = \frac{-6\theta^4 - 36\theta^2 - 6}{(1-\theta^2)^4}$$

だから，結局，

$$\Delta_\ell^{(2)}(\theta; \tilde{\theta}_\beta, \hat{\theta}_{ML}) = \frac{4\theta^2(\theta^2+3)^2}{(1+\theta^2)^3}\left(\beta^2 + \frac{\beta k}{3}\right) - 12\beta\frac{(1-\theta^2)^2}{(1+\theta^2)^2} \tag{1}$$

が成立する．

まず，$\beta>0$ の場合を考えよう．$\theta=0$ で，(1) の値は，-12β となる．したがって，$\tilde{\theta}_\beta$ は，すべての k において，$\theta=0$ で，$\hat{\theta}_{ML}$ よりよい．次に，

$$\lim_{\theta^2\to 1}\frac{4\theta^2(\theta^2+3)^2}{(1+\theta^2)^3}=8,\qquad \lim_{\theta^2\to 1}\frac{(1-\theta^2)^2}{(1+\theta^2)^2}=0 \tag{2}$$

に注目しよう．これより，(1) の値が k に関係なく正となるような，±1 に近いある $\tilde{\theta}$ が存在することがわかる．このことは，この $\tilde{\theta}$ で，$\hat{\theta}_{ML}$ は，すべての k において，$\tilde{\theta}_\beta$ よりよいことを示している．したがって，すべての k で，$\hat{\theta}_{ML}\approx_k\tilde{\theta}_\beta$ が成立し，2つの推定量の比較は，関係 (iv) となることがわかる．

次に，$\beta<0$ の場合を考えよう．$\theta=0$ での (1) の値より，$\hat{\theta}_{ML}$ は，すべての k において，$\tilde{\theta}_\beta$ よりよくなる．したがって，$\hat{\theta}_{ML}$ と $\tilde{\theta}_\beta$ の関係については，(i),(ii),(iv) のいずれかになることがわかる．ここで，$k=-\beta$ ととると，(5) は，すべての $\theta\in(-1,1)$ で正となる．このことは，2つの関係が，(i),(ii),(iii) のいずれかであることを示している．さらに，$k=-4\beta$ ととると，(2) より，(1) は ±1 に十分近い $\tilde{\theta}$ で負となることがわかる．以上の結果より，(i) は起こらないことになり，2つの推定量の関係は (ii) となることがわかった．

最後に，中央値不偏な修正を考える．そのとき，リスク差の評価量は，

$$\Delta_\ell^{(2)}(\theta;\tilde{\theta}_\beta,\hat{\theta}_{(m)})=$$
$$\frac{4\theta^2(\theta^2+3)^2}{(1+\theta^2)^3}\left\{\left(\beta-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\beta-\frac{1}{6}\right)(k+1)\right\}-12\left(\beta-\frac{1}{6}\right)\frac{(1-\theta^2)^2}{(1+\theta^2)^2} \tag{3}$$

となる．

$\beta>1/6$ のとき，$\theta=0$ で，(3) は負となり，また，すべての k で，±1 に近い $\tilde{\theta}$ で正となる．したがって，上と同様にして，すべての k で，$\hat{\theta}_{(m)}\approx_k\tilde{\theta}_\beta$ となることがわかる．

$-1/6\le\beta<1/6$ に対しては，$\theta=0$ で，(3) は正となり，また，すべての k で，±1 に近い $\tilde{\theta}$ で負となる．したがって，この場合も，すべての k で，$\hat{\theta}_{(m)}\approx_k\tilde{\theta}_\beta$ となることがわかる．

$\beta<-1/6$ の場合，$\theta=0$ で，(3) は正となる．いま，$k=-\beta/2-1/12$ ととると，すべての $\theta\in(-1,1)$ で，(3) は，±1 に近い $\tilde{\theta}$ で正となる．さらに，$k=-4\beta-1/2$

に対して，±1 に近い $\tilde{\theta}$ で負となる．したがって，上と同様に考えて，２つの推定量の関係は，(ii) となる．

以上より，３つの推定量 $\hat{\theta}_{ML}, \hat{\theta}_E, \hat{\theta}_{(m)}$ は，いずれも，$\mathcal{T}_{0,\beta}$ に属するすべての推定量に対して，２次ユニバーサル許容性をもつことがわかる．

5. まとめと考察

この研究では，２つの推定量を，ユニバーサルな漸近２次最適性のもとで比較した．さらにいくつかの例題をあげて，よく知られた推定量が，競争する推定量に対してユニバーサルな許容性をもつかどうかを検証した．さらなる興味としては，そうした推定量が，一般的な推定量族に対してユニバーサルに許容的であるかどうかである．この問題に関しても，肯定的な結果が得られている．つまり，例１と例２において，３つの推定量はいずれも，推定量族 $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$ に対して，漸近２次ユニバーサル許容的であることが示される．さらに，漸近２次ユニバーサル許容的となるような推定量の族を構成することが出来ることも注意しよう．(Takagi (2002)).

References

Brown, L. D. and Hwang, J. T (1989). Universal domination and stochastic domination: u-admissibility and u-inadmissibility of the least squared estimator. *Ann. Statist.* **17** 252–267.

Hwang, J. T. (1985). Universal domination and stochastic domination: Estimation simultaneously under a broad class of loss functions. *Ann. Statist.* **13** 295–314.

Takagi, Y. (2002). Second order asymptotic optimality of estimators under universal domination criterion. *DMIS Research Report of Osaka Prefecture University* 02-1.