

差の状態フィードバックの ホップ分岐解への影響について

(The effects of the state difference feedback
on solutions at a Hopf bifurcation point)

静岡大学・工学部 宮崎 倫子 (Rinko Miyazaki)
Faculty of Engineering,
Shizuoka University

1 序文

次の n 次元の常微分方程式系を考えよう.

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, u; \lambda).$$

ここで, $\lambda \in \mathbf{R}$ はパラメータ, $u \in \mathbf{R}^m$ ($m \in \mathbf{N}$) は制御入力とする. $u = \mathbf{0}$ のとき, 方程式系 (1) が不安定な定常状態を持つと仮定する. この不安定定常状態を安定化する一つの方法として, 差の状態フィードバックが知られている. すなわち, 制御入力 u として,

$$u(t) = -K(x(t) - x(t - \tau))$$

を与えるものである. この方法は, 不安定定常状態が未知であるような場合に特に有効である. 例えば, カオスシステムには無数の不安定周期軌道が存在するが, それを解析的もしくは数値的に求めることは非常に困難である. しかし, Pyragas [4] が, 差の状態フィードバックを用いることにより, 安定化可能であることを数値的に示し, カオス制御の分野では, 様々な応用がなされているようである. また, 理論的な解析も近年になって徐々になされつつある [1-3, 5].

本研究は, 差の状態フィードバックが元の系に与える影響を解析的に調べることを目的としている. 現段階では, 完全なる解決には至っていないが, まず手始めとして, 平衡点がホップ分岐を経る際に, 元の系に与える影響について研究中である. 本稿では, その際に得られた線形化方程式に関する結果について報告する.

スカラー制御入力 u をもつ 2 次元の非線形方程式系

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = A(\lambda)x + F(x, u; \lambda)$$

を考える. ここで, $\lambda \in \mathbf{R}$ はパラメータ, $A(\lambda)$ は 2×2 行列, $F: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ は C^3 級関数で,

$$F(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \lambda) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial}{\partial x} F(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \lambda) = \mathbf{0}, \quad b := \frac{\partial}{\partial u} F(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \lambda) \neq \mathbf{0}$$

を満たし, b は λ に無関係であると仮定する. さらに, $u = 0$ のとき, すなわち

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = A(\lambda)x + F(x, 0; \lambda)$$

は, $\lambda = 0$ において, ホップ分岐が生じると仮定する. このとき, 行列 A として,

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

を考えれば十分であることに注意しよう。

さて、方程式系 (2) に対する制御入力として、次のような差の状態フィードバック採用する。

$$u(t) = -\mathbf{k}^T(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau)).$$

すなわち、次の時間遅れを持つ微分方程式系を考える。

$$(4) \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A(\lambda)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), -\mathbf{k}^T(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau)); \lambda).$$

ここで、 $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^2$ はゲイン係数で、 \mathbf{k}^T は \mathbf{k} の転置を表すものとする。

2 主結果 (線形化方程式)

(4) 式を平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のまわりで線形化すると、

$$(5) \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau))$$

を得る。(5) 式に対する特性方程式は、

$$p(z) := \det [zI - A + (1 - e^{-\tau z})\mathbf{b}\mathbf{k}^T]$$

で与えられる。ここで、 I は、 2×2 単位行列である。また、フィードバックを印加する前の方程式について、その特性方程式を $p_0(z)$ で表すこととする。すなわち、

$$p_0(z) := \det [zI - A] = (z - \lambda)^2 + 1.$$

(5) 式の特性根に対して、次の 2 つの集合を考える。

$$\Lambda := \{z: p(z) = 0 \text{ かつ } \operatorname{Re} z > 0\}, \quad \Lambda_0 := \{z: p(z) = 0 \text{ かつ } \operatorname{Re} z = 0\}.$$

特性方程式の右辺をさらに計算すると、

$$p(z) = p_0(z) + (1 - e^{-\tau z}) \{ \mathbf{k}^T \mathbf{b}(z - \lambda) + \det [\mathbf{k} \ \mathbf{b}] \}, \quad p_0(z) := (z - \lambda)^2 + 1,$$

を得る。

補題 2.1. $\lambda = 0$ のとき、 $\{\pm i\} \subset \Lambda_0$ である。さらに、 $c := \det [\mathbf{k} \ \mathbf{b}]$ 、 $d := \mathbf{k}^T \mathbf{b}$ に対して、

$$(6) \quad \begin{pmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau c - d \\ \tau d \end{pmatrix} \neq - \begin{pmatrix} d \\ 2 \end{pmatrix}$$

が成り立つと仮定する。このとき、 $\lambda = 0$ で $z = i$ または $z = -i$ を通る、 $p(z) = 0$ の根は、 $\lambda = 0$ の近傍で λ に関して微分可能で、

$$(7) \quad \operatorname{Re} \frac{dz}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \frac{d^2 + \tau c - d + 4 + d(\tau c - 2d + 2\tau) \cos \tau + (4d + \tau d^2 - 2\tau c) \sin \tau}{\{d + (\tau c - d) \cos \tau + \tau d \sin \tau\}^2 + \{2 - (\tau c - d) \sin \tau + \tau d \cos \tau\}^2}$$

証明. $\lambda = 0$ のとき, $p_0(\pm i) = 0$, $1 - e^{-\tau(\pm i)} = 0$ であるから, $\{\pm i\} \subset \Lambda_0$ は明らかに成り立つ.

次に, $\lambda = 0$ で $z = i$ を通る $p(z) = 0$ の根 z を λ をパラメータとして考えよう.

$$\frac{\partial}{\partial z} p(z) = 2(z - \lambda) + \tau e^{-\tau z} \{d(z - \lambda) + c\} + d(1 - e^{-\tau z})$$

より, $\lambda = 0$, $z = i$ を代入すると,

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} p(z) \right|_{\substack{\lambda=0 \\ z=i}} = 2i + e^{-i\tau} (i\tau d + \tau c - d) + d = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}^T \left\{ \begin{pmatrix} d \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau c - d \\ \tau d \end{pmatrix} \right\}$$

を得る. したがって, 条件 (6) が成り立つときには, 陰関数定理より, z は $\lambda = 0$ の近傍で λ に関して微分可能であり,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} p(z) \right\} \frac{dz}{d\lambda} = - \frac{\partial}{\partial \lambda} p(z) = 2(z - \lambda) + d(1 - e^{-\tau z})$$

が成り立つ. $\lambda = 0$, $z = i$ のとき,

$$\begin{pmatrix} d + (\tau c - d) \cos \tau + \tau d \sin \tau & -\{2 - (\tau c - d) \sin \tau + \tau d \cos \tau\} \\ 2 - (\tau c - d) \sin \tau + \tau d \cos \tau & d + (\tau c - d) \cos \tau + \tau d \sin \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \frac{dz}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \\ \operatorname{Im} \frac{dz}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d - \cos \tau \\ 2 + d \sin \tau \end{pmatrix}$$

が成り立つことに注意して計算すると, (7) が得られる. □

注意 2.1. $d = 0$, $\tau = 2\pi$ のときには, (6) が成り立つことは明らかであり, このとき,

$$\operatorname{Re} \left. \frac{dz}{d\lambda} \right|_{\substack{\lambda=0 \\ z=i}} = \frac{c\pi + 2}{2(c\pi)^2 + 2} > 0$$

である.

計算を簡単化するため, 以下では次の仮定を設ける.

$$(H1) \quad \mathbf{k}^T \mathbf{b} = 0.$$

定理 2.1. (H1) を仮定し, $|\lambda|$ は十分小さな値とする. もし,

$$(C1) \quad \left| \det \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \right| \leq \frac{2|\lambda|}{\tau}$$

が成り立てば, 方程式 (5) の特性根について, 以下のことが成り立つ:

(i) $\lambda < 0$ のとき $\Lambda \cup \Lambda_0 = \emptyset$.

(ii) $\lambda > 0$ のとき $\Lambda_0 = \emptyset$ かつ Λ は重複度もこめてちょうど 2 個の要素を持つ.

証明. 仮定 (H1) のもとでは, $c := \det \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ とおくと,

$$p(z) = p_0(z) + c(1 - e^{-\tau z})$$

である. $R > 0$ に対して, \mathbf{C} 内の領域 $D := \{z \in \mathbf{C} : |z| < R, \operatorname{Re} z > 0\}$ を考えよう. 以下で, 十分大きな任意の R に対して, 領域 D の境界 ∂D 上において,

$$(8) \quad |p(z) - p_0(z)| < |p_0(z)| \quad \text{すなわち,} \quad |c| |1 - e^{-\tau z}| < |p_0(z)|$$

が成り立つことを示そう。そうすれば、Rouche の定理より、領域 D 内において、 $p(z)$ と $p_0(z)$ の零点の数が等しくなる。また、 ∂D において $p(z)$ は零点をもち得ないことも明らかである。したがって、(8) を示せば、定理の証明が完了する。

$$\gamma_1 := \left\{ z: z = Re^{i\theta}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \quad \gamma_2 := \{ z: z = i\omega, -R < \omega < R \}$$

とおく。まず、 $z \in \gamma_1$ の場合を考える。 $R > \sqrt{\lambda^2 + 1}$ に対して、

$$|z - (\lambda \pm i)| \geq \begin{cases} R - \sqrt{\lambda^2 + 1}, & (\lambda \geq 0) \\ \sqrt{\lambda^2 + (R-1)^2}, & (\lambda < 0) \end{cases}$$

が成り立つことに注意すると、

$$p_0(z) = |z - (\lambda + i)||z - (\lambda - i)| \geq \begin{cases} (R - \sqrt{\lambda^2 + 1})^2, & (\lambda \geq 0) \\ \lambda^2 + (R-1)^2, & (\lambda < 0) \end{cases}$$

が得られる。一方、

$$|1 - e^{-\tau z}| = \sqrt{(1 - e^{-\tau R \cos \theta})^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{\tau R \sin \theta}{2} \right)} < \sqrt{5}$$

であるから、 R を十分大きくとれば、(8) が成り立つことは明らかである。

次に、 $z \in \gamma_2$ の場合を考える。

$$|p_0(i\omega)|^2 = (-\omega^2 + \lambda^2 + 1)^2 + 4\lambda^2\omega^2 = (\omega^2 + \lambda^2 - 1)^2 + 4\lambda^2$$

および

$$|1 - e^{-i\tau\omega}|^2 = \{1 - \cos(\tau\omega)\}^2 + \sin^2(\tau\omega) = 4 \sin^2 \left(\frac{\tau\omega}{2} \right)$$

であるから、 $-R < \omega < R$ に対して、

$$h(\omega) := (\omega^2 + \lambda^2 - 1)^2 + 4\lambda^2 - 4c^2 \sin^2 \left(\frac{\tau\omega}{2} \right) > 0$$

が成り立つことを示せばよい。 $\omega \neq 0$ のとき、 $|\sin(\frac{\tau\omega}{2})| < |\frac{\tau\omega}{2}|$ に注意すると、 $\omega \neq 0$ に対して、

$$\begin{aligned} h(\omega) &> (\omega^2 + \lambda^2 - 1)^2 + 4\lambda^2 - c^2\tau^2\omega^2 \\ &= \omega^4 + 2 \left\{ (\lambda^2 - 1) - \frac{(c\tau)^2}{2} \right\} \omega^2 + (\lambda^2 - 1)^2 + 4\lambda^2 \\ &= \left\{ \omega^2 + (\lambda^2 - 1) - \frac{(c\tau)^2}{2} \right\}^2 - \left\{ (\lambda^2 - 1) - \frac{(c\tau)^2}{2} \right\}^2 + (\lambda + 1)^2 \\ &= \left\{ \omega^2 + (\lambda^2 - 1) - \frac{(c\tau)^2}{2} \right\}^2 + 4 \left\{ \lambda^2 - \left(\frac{c\tau}{2} \right)^2 \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{c\tau}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

を得る。ゆえに、条件 (C1) のもとでは $\omega \neq 0$ のとき、 $h(\omega) > 0$ となる。 $\omega = 0$ のときには、 $\lambda \neq 0$ より $h(\omega) > 0$ が成り立つことは明らかである。 \square

定理 2.1 の条件 (C1) は、ホップ分岐が起こる瞬間 ($\lambda = 0$) においては、仮定 (H1) も考慮すると、必然的に $k = 0$ となり、制御を施すことができなくなる。以下では、ゲイン係数 k が λ に無関係に取れるような場合について考えよう。そこで新たに、次の仮定を設ける。

$$(H2) \quad \left| \det \begin{bmatrix} k & b \end{bmatrix} \right| \leq \frac{2\sqrt{3\sqrt{1+\theta_2^2}}}{\tau^2}.$$

ここで、 θ_2 について、 θ_k ($k=1, 2, \dots$) は次式で与えられたときの $k=2$ の場合の値である。

$$\tan \theta_k = \theta_k, \quad (2k-1)\pi < \theta_k < (2k-\frac{1}{2})\pi.$$

ちなみに、

$$\theta_1 \approx 1.43029\pi, \quad \theta_2 \approx 3.47089\pi$$

である。また、 $\tau = 2\pi$ のときには、仮定 (H2) は $\frac{2\sqrt{3\sqrt{1+\theta_2^2}}}{\tau^2} \approx 0.290359$ となる。

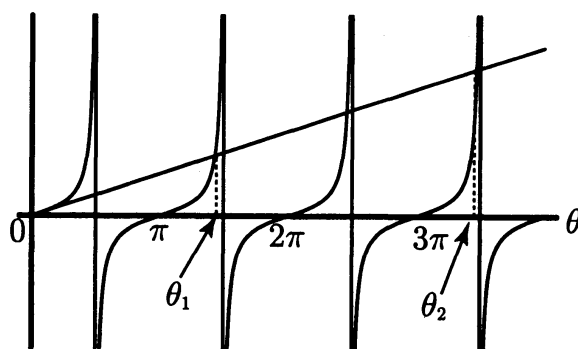


図 1

定理 2.2. $\tau = 2\pi$ のとき、(H1) および (H2) を仮定し、 $|\lambda|$ は十分小さな値とする。このとき、方程式 (5) の特性根について、以下のことが成り立つ：

- (i) $\lambda < 0$ のとき $\Lambda \cup \Lambda_0 = \emptyset$.
- (ii) $\lambda = 0$ のとき $\Lambda = \emptyset$ かつ $\Lambda_0 = \{\pm i\}$.
- (iii) $\lambda > 0$ のとき $\Lambda_0 = \emptyset$ かつ Λ は重複度もこめてちょうど 2 個の要素を持つ。

証明. (i) と (iii) を証明するには、定理 2.1 の証明から、 $-R < \omega < R$ に対して、 $h(\omega) > 0$ を示せばよい。また、(5) 式の特性根の共役複素数もまた特性根であるから、 $\omega \geq 0$ で考えれば十分である。以下では、 $m := c^2\tau^4$, ($c = \det \begin{bmatrix} k & b \end{bmatrix}$, $\tau = 2\pi$) とおく。 h を ω で微分すると、

$$\begin{aligned} h(\omega) &= (\omega^2 + \lambda^2 - 1)^2 + 4\lambda^2 - 2\frac{m}{\tau^4} + 2\frac{m}{\tau^4} \cos(\tau\omega), \\ h'(\omega) &= 4\omega(\omega^2 + \lambda^2 - 1) - 2\frac{m}{\tau^3} \sin(\tau\omega), \\ h''(\omega) &= 4(3\omega^2 + \lambda^2 - 1) - 2\frac{m}{\tau^2} \cos(\tau\omega), \\ h'''(\omega) &= 2\frac{m}{\tau} \left\{ \frac{12}{m}(\tau\omega) + \sin(\tau\omega) \right\}, \end{aligned}$$

となる。

ここで、図 2 のように、 xy 平面上の右半平面において、直線 $l: y = -\frac{12}{m}x$ と曲線 $C: y = \sin x$ を考える。これらが第 4 象限で接するのは、 $(2k-1)\pi < x < (2k-\frac{1}{2})\pi$ ($k=1, 2, \dots$) に対して、

$$\sin x = -\frac{12}{m}x, \quad \cos x = -\frac{12}{m}$$

が成り立つとき、すなわち、

$$\tan x = x, \quad (2k-1)\pi < x < \left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi$$

が成り立つときであり、このような x は、各 k に

対して、一意に決まり、 $x = \theta_k$ である。このときの m を m_k とすると、 $m_k = -\frac{12}{\cos \theta_k} = 12\sqrt{1+\theta_k^2}$ となる。また、 $m < m_1$ のときには、直線 l と曲線 C は、 $x > 0$ において、交点を持たず、 l が C の下側に存在する。 $m_1 < m < m_2$ のときには、 l と C は、 $\pi < x < 2\pi$ において 2 つだけ交点を持つ。以下では、そ

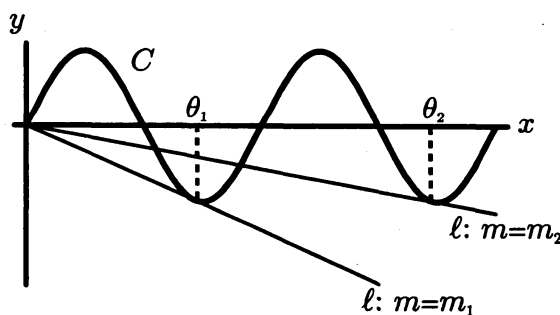


図 2

の x 座標を $\nu_1 < \nu_2$ とする. 以上のことを踏まえて, まず, $h'(\omega)$ の増減について, 2つの場合 (I), (II) に分けて考えよう.

(I) $0 < m \leq 12\sqrt{1+\theta_1^2}$ のとき. $h'''(\omega) \geq 0$ である. したがって, $h''(\omega)$ は単調増加である. 一方, $|\lambda|$ は十分小さい値を考えているので, $h''(0) = 4(\lambda^2 - 1) - 2\frac{m}{\tau^2} < 0$ となることと, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} h''(\omega) = +\infty$ より, $\omega_2 > 0$ が存在して, h' に関する以下の増減表が得られる.

(9)	ω	0	ω_2
	h''	-	+
	h'	\searrow	$\nearrow +\infty$

(II) $12\sqrt{1+\theta_1^2} < m \leq 12\sqrt{1+\theta_2^2}$ のとき. このとき, h'' に関する増減表は以下のとおり.

ω	0	ν_1/τ	ν_2/τ
h'''	+	0	+
h''	\nearrow	\searrow	$\nearrow +\infty$

h'' の極小値 $h''(\frac{\nu_2}{\tau})$ の値を評価しよう. まず, ν_2 を m をパラメータとして考える. ν_2 は $m \sin x + 12x = 0$ の解で, しかも, 今考えている m の範囲においては, $m \cos \nu_2 + 12 > 0$ を満たしているので, 陰関数定理より,

$$\frac{d\nu_2}{dm} = -\frac{\sin \nu_2}{m \cos \nu_2 + 12} > 0.$$

ゆえに, $m = 12\sqrt{1+\theta_1^2} (= m_1)$ のとき $\nu_2 = \theta_1 < \frac{3\pi}{2}$ から m の増加に伴い ν_2 も増加し, $m = 12\sqrt{1+\theta_2^2} (= m_2)$ で, 区間 $(\frac{3\pi}{2}, \pi)$ のある値に至る. この値を ν_2^* とおく. ちなみに, $\nu_2^* \approx 1.82463\pi$ である. また, $\nu_2 = \frac{3\pi}{2}$ となる m を m^* とおく. 一方,

$$h''\left(\frac{\nu_2}{\tau}\right) = \frac{2}{\tau^2}(6\nu_2^2 - m \cos \nu_2) + 4(\lambda^2 - 1)$$

より,

$$\frac{d}{dm} h''\left(\frac{\nu_2}{\tau}\right) = \frac{2}{\tau^2}(12\nu_2 + m \sin \nu_2) \frac{d\nu_2}{dm} - \frac{2}{\tau^2} \cos \nu_2 = -\frac{2}{\tau^2} \cos \nu_2$$

を得る. したがって, 以下の増減表が得られる.

m	m_1	m^*	m_2
ν_2'		+	
ν	θ_1	$\nearrow \frac{3\pi}{2}$	$\nearrow \nu_2^*$
$\frac{d}{dm} h''\left(\frac{\nu_2}{\tau}\right)$	+	0	-
$h''\left(\frac{\nu_2}{\tau}\right)$	\nearrow		\searrow

$m_1 \cos \theta_1 = -12$ より, $m = m_1, \nu_2 = \theta_1$ のとき,

$$h''\left(\frac{\nu_2}{\tau}\right) = \frac{2}{\tau^2}(6\theta_1^2 + 12) + 4(\lambda^2 - 1) = \frac{4}{\tau^2}\{3(\theta_1^2 + 2) - \tau^2\} + 4\lambda^2.$$

$\sin \nu_2^* = -\frac{12}{m_2} \nu_2^*$ に注意すると,

$$m_2 \cos \nu_2^* = \sqrt{m_2^2 - (12\nu_2^*)^2} = 12\sqrt{1 + \theta_2^2 - \nu_2^{*2}}$$

が成り立つので, $m = m_2, \nu_2 = \nu_2^*$ のとき,

$$h''\left(\frac{\nu_2}{\tau}\right) = \frac{2}{\tau^2}\left(6\nu_2^{*2} - 12\sqrt{1 + \theta_2^2 - \nu_2^{*2}}\right) + 4(\lambda^2 - 1)$$

$$= \frac{4}{\tau^2} \left\{ 3 \left(\nu_2^{*2} - 2\sqrt{1 + \theta_1^2 - \nu_2^{*2}} \right) - \tau^2 \right\} + 4\lambda^2.$$

ゆえに,

$$(10) \quad \tau < \sqrt{3(\theta_1^2 + 2)} \approx 2.59715\pi \quad \text{かつ} \quad \tau < \sqrt{3 \left(\nu_2^{*2} - 2\sqrt{1 + \theta_1^2 - \nu_2^{*2}} \right)} \approx 2.07752\pi$$

が成り立つとき, 極小値 $h''(\frac{\omega}{\tau}) > 0$ となる. 実際, $\tau = 2\pi$ は, (10) を満たしている. したがって, この場合にも (I) で得られた増減表 (9) が得られる.

$h'(0) = 0$ に注意すると, $\omega > 0$ に対して, $h'(\omega) = 0$ となる $\omega > 0$ は唯一存在し, これを ω_1 とおく. そして, $\omega = \omega_1$ において, $h(\omega)$ は最小値をとる. したがって, $h(\omega_1) > 0$ を示せば, (i), (iii) の証明が完了する. 再び, m をパラメータとして考えよう. $h'(\omega_1) = 0$, $h''(\omega_1) > 0$ に注意すると, 陰関数定理より,

$$\frac{d\omega_1}{dm} = \frac{2 \sin(\tau\omega_1)}{\tau^3 h''(\omega_1)}$$

であり, さらに,

$$\frac{d}{dm} h(\omega_1) = h'(\omega_1) \frac{d\omega_1}{dm} - \frac{4}{\tau^4} \sin^2 \left(\frac{\tau\omega_1}{2} \right) = -\frac{4}{\tau^4} \sin^2 \left(\frac{\tau\omega_1}{2} \right) \leq 0.$$

また, $l := \lambda^2$ をパラメータとして同様に考えよう. 陰関数定理より,

$$\frac{d\omega_1}{dl} = -\frac{4\omega_1}{h''(\omega_1)} < 0$$

であり, さらに,

$$\frac{d}{dl} h(\omega_1) = h'(\omega_1) \frac{d\omega_1}{dl} + 2(\omega_1^2 + l - 1) + 4 = 2(\omega_1^2 + l + 1) > 0.$$

仮定 (H2) より, $m \leq 12\sqrt{1 + \theta_2^2} = m_2$ なので, 結局, $m = m_2$, $\lambda = 0$ のときの最小値 $h(\omega_1)$ が非負であることを示せばよい. 実際, $\tau = 2\pi$ より $\omega_1 = 1$ であるから, $h(\omega_1) = 0$ となる.

最後に, (ii) を証明しよう. まず, 補題 2.1 より, $\{\pm i\} \subset \Lambda_0$ である. 逆に, $i\omega \in \Lambda_0$ のとき, $h(\omega) = 0$ とならなければならない. しかし, 上の証明より, $h(\omega) = 0$ となる ω は $\lambda = 0$ のとき ± 1 のみであることがわかる. ゆえに, $\{\pm i\} = \Lambda_0$ また, $z^* \in \Lambda$ が存在すると仮定する. $z = z^*$ を通る $p(z) = 0$ の根 z をパラメータ λ の関数としてみたとき, z^* の任意の近傍 U とすると, 十分小さな $\delta > 0$ が存在し $|\lambda| < \delta$ のとき $z \in U$ とできる. しかし, (i) より $\lambda < 0$ に対しては, $\Lambda = \emptyset$ なので, これはありえない. したがって, $\Lambda = \emptyset$ が成り立つ. \square

系 2.1. $\tau = 2\pi$ のとき, (H1) および (H2) を仮定し, $|\lambda|$ は十分小さな値とする. このとき, 方程式 (5) の解について以下のことが成り立つ:

- (i) $\lambda < 0$ のとき零解は漸近安定.
- (ii) $\lambda = 0$ のとき非自明解は周期 2π の周期解に漸近するかまたは周期解そのものになる.
- (iii) $\lambda > 0$ のとき零解は不安定.

すなわち, 仮定 (H1), (H2) のもとでは, $\tau = 2\pi$ とすると, 差の状態フィードバックは, 元の系の平衡点の安定性を変化させないことがわかる.

参考文献

- [1] Just, W. *et. al.*, Mechanism of time-delayed feedback control, *Phys. Rev. Lett.*, **78**(1997), 203–206.
- [2] Nakajima, H., On analytical properties of delayed feedback control of chaos, *Phys. Lett. A*, **232**(1997), 207–210.
- [3] Kokame *et. al.*, Difference feedback can stabilize uncertain steady states, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **46**(2001), 1908–1913.
- [4] Pyragas, K., Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Physics Letters, A* **170**(1992), 421–428.
- [5] Schuster, H. G., *Handbook of Chaos Control*, Wiley–VCH, New York, 1999.