数理解析研究所講究録 1309 巻 2003 年 197-204

クライン-ゴルドン方程式に対する同定問題

韓国技術教育大学校　河 準洪 (Junhong Ha)
神戸大学工学部　中桐 信一 (Shin-ichi Nakagiri)

1 はじめに

一昨年の数理研の集会では、減衰項を持つ coupled sine-Gordon 方程式系 の定数パラメータの弱解の同定問題を議論した ([5])。ここでは、sine-Gordon 方程式と異なり、非有界な非線型特性を持つ次の Klein-Gordon 方程式の定数パラメータ同定問題を考える。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial y}{\partial t}-\beta\Delta y+\delta|y|^\gamma y=f.$$

ここで、α,β,δ が同定すべき定数パラメータとする。この同定問題を解く準備として、方程式の解としてどのようなクラスの解をとるか、またどのようなコストに対して 同定問題が考えられるべきかというという問題設定を行なう必要がある。

そのため、まず基本的な問題と考えられる、上の Klein-Gordon equation に対する弱解の大域的存在と一意性の結果を説明する。本論文では、それらの結果をもとにして、この方程式に対する定数パラメータ同定問題を議論する。

2 同定問題とは

Ω を R^n, $n=1,2,3$ の有界集合で、その境界 $\Gamma=\partial\Omega$ は充分滑らかとする。さらに、$Q=(0,T)\times\Omega$ および $\Sigma=(0,T)\times\Gamma$ とおく。次のような Klein-Gordon 方程式 (KG) で記述される、初期境界値問題を考える：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\alpha\dfrac{\partial y}{\partial t}-\beta\Delta y+\delta|y|^\gamma y=f(t,x)\ \text{ in } Q,\\ y=0\ \text{ on } \Sigma,\\ y(0,x)=y_0(x)\ \text{ in } \Omega\ \text{ and }\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x)=y_1(x)\ \text{ in } \Omega.\end{cases}$$

ここで、α, β, δ, γ は物理定数、$y_0(x)$, $y_1(x)$ は初期条件、$f(t,x)$ は外力項とする。未知パラメータは、α, β, δ であり、γ は既知であるとする。$q=(\alpha,\beta,\delta)$ とし、対応する KG の解を $y(q)$ とする。定数パラメータ q を評価するためのコストとして、ここでは特に分布観測による２次コスト

$$J(q)=\|y(q)-z_d\|^2_{L^2(Q)},\quad p\in\mathcal{P}_{ad},$$

を与える。$J(q)$ の式で $z_d \in L^2(Q)$ は $y(q)$ の理想観測値、$\mathcal{P}_{ad}$ は未知定数 q の作る線形空間、$\mathcal{P}$ の閉凸部分集合で、 **許容定数集合** と呼ばれる。

KG に対する同定問題というのは、許容定数集合 $\mathcal{P}_{ad}$ において、コスト関数 $J(q)$ が最小となる $p^* = (\alpha^*, \beta^*, \delta^*)$ を具体的に見出すことである (Banks and Kunisch [3], Banks, Smith and Wang [2], Ahmed [1], Lions [6] を参照)。そのためのプロセスとして、

(i) $\inf_{p\in\mathcal{P}_{ad}} J(p) = J(p^*)$ となる $p^* \in \mathcal{P}_{ad}$ の存在。

(ii) p^* があったとして、その特徴づけを見つける。

の２つの問題を考える。

まず解決すべき問題 (i) は、最適パラメータ q^* の存在であるが、非線型系の場合は相当強い条件のもとでしか存在性は証明されていない。我々の場合は、sine-Gordon 方程式系の場合と同様に、$y(p)$ の p に関する解空間の中への写像が弱連続である事を使ってその存在性を証明することができた。問題 (ii) に関しては、$y(p)$ の p についての弱ガトー微分を計算することにより最適性条件を見出す。しかしながら、このガトー微分は通常の解空間の中には一般的には存在せず、Lions and Magenes [8] による Transposition method を用いることにより、この困難を克服する。これにより、最適性条件を適切な adjoint systems の導入により自然な形で書き下すことができる。これらの条件を与えることが、本論文の主たる目的である。

3 Klein-Gordon 方程式

Ω を R^n の有界集合で、その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は、充分滑らかとする。さらに、$Q = (0,T)\times\Omega$ および $\Sigma = (0,T)\times\Gamma$ とおく。我々は、次の減衰項をもつ Klein-Gordon equation を考える。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial y}{\partial t} - \beta\Delta y + \delta|y|^\gamma y = f \quad \text{in} \quad Q. \tag{3.1}$$

ここで、$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbf{R}$ は定数、Δ はラプラシアン、f は与えられた外力項とする。境界条件は、簡単のため Dirichlet 条件

$$y = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma \tag{3.2}$$

で与えられているとする。さらに初期条件は、

$$y(0,x) = y_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = y_1(x) \quad \text{in} \quad \Omega \tag{3.3}$$

とする。

２つのヒルベルト空間 H と V を $H = L^2(\Omega)$ と $V = H_0^1(\Omega)$ により導入する。これらの空間の内積とノルムは次のように定義される。

$$(\psi,\phi) = \int_\Omega \psi(x)\phi(x)dx, \quad |\psi| = (\psi,\psi)^{1/2}, \quad \forall\phi,\psi \in L^2(\Omega),$$

$$(\!(\psi, \phi)\!) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}\psi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)dx, \quad \|\psi\| = (\!(\psi, \psi)\!)^{1/2}, \quad \forall \phi, \psi \in H_0^1(\Omega).$$

変分法による定式化のため、次の bilinear form を導入する。

$$a(\phi, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla\varphi dx = (\!(\phi, \varphi)\!), \quad \forall \phi, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

この form (3.4) は、対称 かつ $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ 上有界で、coercive

$$a(\phi, \phi) \geq \|\phi\|^2, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{3.5}$$

である。従って、有界作用素 $A \in \mathcal{L}(V, V')$ （$A = -\Delta +$ *Dirichlet* 条件）が (3.4) から定義される。

次に非線型スカラー関数 $g(s)$ を、$g(s) = |s|^{\gamma}s$ により定義する。ここで、次の Sobolev embeddings を思い出す。

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q < \infty \ \ if\ n = 1, 2; \quad q = 6 \ \ if\ n = 3. \tag{3.6}$$

この事に注意して、指数 γ については、

$$\begin{cases} 0 \leq \gamma < \infty \ \ \text{when} \ \ n = 1, 2, \\ 0 \leq \gamma \leq 2 \ \ \text{when} \ \ n = 3 \end{cases} \tag{3.7}$$

を仮定する。

仮定 (3.7) のもとで、全ての $\phi \in H_0^1(\Omega)$ に対して合成積 $g \circ \phi$ は、2 乗可積分になる。即ち、非線形作用素

$$g: \ H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad u \to g \circ u \tag{3.8}$$

が定義可能になる。簡単のために、この作用素に対しても同じ記号 g を使う。

従って、問題 (3.1)-(3.3) は次の $H = L^2(\Omega)$ におけるコーシー問題に書き直される。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + \alpha\dfrac{dy}{dt} + \beta Ay + \delta g(y) = f(t) \ \ \text{in} \ \ (0, T), \\ y(0) = y_0 \in V, \ \ \dfrac{dy}{dt}(0) = y_1 \in H. \end{cases} \tag{3.9}$$

さて解空間と超関数の空間を導入する。解空間 $W(0, T)$ は、次の様に定義される。

$$W(0, T) = \{g | g \in L^2(0, T; V), g' \in L^2(0, T; H), g'' \in L^2(0, T; V')\}.$$

また $\mathcal{D}'(0, T)$ により、 $(0, T)$ 上の超関数の空間をあらわす。ここで、Dautray and Lions [4] に従い、KG に対する弱い解の定義を与える。

Definition 1 関数 y が (3.9) の弱解であるとは、$y \in W(0,T)$ であり、 y が次の方程式を満たすときをいう。

$$\langle y''(\cdot),\phi\rangle_{V',V} + \alpha(y'(\cdot),\phi) + \beta(\!(y(\cdot),\phi)\!) + \delta(|y(\cdot)|^\gamma y(\cdot),\phi) = (f(\cdot),\phi), \quad \forall\phi \in V \ \text{ in } \ \mathcal{D}'(0,T),$$
$$y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = y_1.$$

この定義において、記号 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V',V}$ は、V と V' の間の共役対を表す。また、$y \in W(0,T)$ ならば、$|y(t)|^\gamma y(t) \in H \ \ a.e.\ t \in [0,T]$ なる事を注意しておく。

このとき (3.9) の弱解について、次の大域的存在定理が成り立つ。強い条件のもとでの証明は、Temam [9] および Lions [7] を参照されたい。

Theorem 1 $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$, $\delta \geq 0$ とし、γ は、条件 (3.7) を満たしているとする。さらに、f, y_0, y_1 は、仮定

$$y_0 \in V, \quad y_1 \in H, \quad f \in L^2(0,T;H), \tag{3.10}$$

を満たしているとする。このとき、問題 (3.9) はただ1つの弱解 y を $W(0,T)$ 内に持つ。また次の正則性を持つ。

$$y \in C([0,T];V), \quad y' \in C([0,T];H). \tag{3.11}$$

さらに、

$$y_0 \in D(A), \quad y_1 \in V, \quad f' \in L^2(0,T;H), \tag{3.12}$$

ならば、y は次の強い正則性を持つ。

$$y \in C([0,T];D(A)), \quad y' \in C([0,T];V). \tag{3.13}$$

注意 まず、埋め込み

$$H^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \ \text{ if } \ n = 1, \quad H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \ \text{ if } \ n = 2,3. \tag{3.14}$$

を注意する。$n = 1$ で (3.10) が満たされているとする。この時 (3.14) と (3.11) から

$$\max_{(t,x)\in\overline{Q}} |y(q;t,x)| \leq M < \infty, \tag{3.15}$$

がいえる。ここで、M はパラメータ p とデータ (3.10) および Ω の体積に関係する正の定数である。$n = 2,3$ のときは、データの強い条件 (3.12) を仮定すると、(3.14) と (3.13) により同じ一様有界性 (3.15) が得られる。

4 KG に対する同定問題

この節では、(3.7) と (3.10) が満たされているとして、次の KG に対する同定問題を考える。

$$\begin{cases} y'' + \alpha y' + (\beta_0 + \beta^2)Ay + \delta^2 g(y) = f \quad \text{in} \quad (0,T), \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \end{cases} \tag{4.1}$$

ここで、$\beta_0 > 0$ は固定されているとする。(4.1) において、パラメータの表示を変えたのは、パラメータ $q = (\alpha, \beta, \delta)$ の線形空間を考えるためと、拡散項を消さないためである。パラメータの空間 $\mathcal{P}$ は、

$$\mathcal{P} \equiv \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$$

とする。このとき、任意の $q = (\alpha, \beta, \delta) \in \mathcal{P}$ に対して、Theorem 1 より解写像

$$q \in \mathcal{P} \to y(q) \in W(0,T)$$

が定まる。先に述べたように、コストは、

$$J(q) = \|y(q) - z_d\|^2_{L^2(0,T;H)} \quad \forall q \in \mathcal{P} = \mathbf{R}^3 \tag{4.2}$$

で与える。ここで、$z_d \in L^2(0,T;H) = L^2(Q)$ は $y(q)$ の理想値とする。

$\mathcal{P}_{ad}$ を $\mathcal{P} = \mathbf{R}^3$ の閉凸部分集合とする。この節では、次の２つの問題を考える。

(i) $\inf_{p \in \mathcal{P}_{ad}} J(p) = J(p^*)$ となる $p^* \in \mathcal{P}_{ad}$ の存在。

(ii) p^* があったとして、その特徴づけを見つける。

問題 (i) については、$\mathcal{P}_{ad}$ に次の条件をおく：

$$\mathcal{P}_{ad} \text{ は、 } \mathbf{R}^3 \text{ におけるコンパクト集合である。}$$

問題 (ii) については、コスト $J(q)$ の $q^* = (\alpha^*, \beta^*, \delta^*)$ におけるガトー微分を考える必要がある。これが可能ならば、q^* の必要条件は、

$$DJ(q^*)(q - q^*) \geq 0 \quad \forall q \in \mathcal{P}_{ad}, \tag{4.3}$$

と書ける。ここで、$DJ(q^*)(q - q^*)$ は $J(q)$ の $q = q^*$ における $q - q^*$ 方向へのガトー微分である。これが、意味を持たせるためには、$y(q)$ が適当な関数空間においてガトー微分可能なることを示さねばならない。

4.1 最適パラメータの存在

次の定理は、問題 (i) と問題 (ii) の両方において本質的である。

Theorem 2 解写像 $q \to y(q) : \mathcal{P} \to W(0,T)$ は、弱連続である。即ち、$q_n \to q$ *in* $\mathbf{R}^3$ ならば、$y(q_n) \to y(q)$ weakly in $W(0,T)$ がいえる。

定理の証明は、紙数の関係から省略する。コストは、$W(0,T)$ の弱位相で下から半連続なので、上の Theorem 2 から次の最適パラメータの存在定理が直に導かれる。

Theorem 3 $\mathcal{P}_{ad} \subset \mathcal{P} = R^3$ がコンパクトならば、コスト (4.2) に対する少なくとも一つの最適パラメータ $q^* \in \mathcal{P}_{ad}$ が存在する。

4.2 最適性の必要条件

問題 (ii) を解決するには、最適パラメータ q^* の必要条件

$$DJ(q^*)(q - q^*) \geq 0 \quad \text{for all} \quad q \in \mathcal{P}_{ad} \tag{4.4}$$

を適当な adjoint state system の言葉で書き変える必要がある。またこの Gateaux 微分可能性を検証するには、非線型写像 $q \to y(q)$: $\mathcal{P} \to W(0,T)$ の Gateaux 微分可能性を確かめなければならない。しかし、拡散項の存在により $W(0,T)$ における Gateaux 微分可能性は期待できない。しかしながら我々は、Transposition method を用いて、空間 $L^2(0,T;H)$ における弱 Gateaux 微分可能性を示す事ができた。そのために、次の解に関する一様有界性の仮定 **(H)** をおいた。

(H) 任意の有界集合 $\mathcal{P}_b \subset \mathcal{P}$ に対し、ある正の定数 M_b が存在して

$$\sup_{q \in \mathcal{P}_b} \max_{(t,x) \in \overline{Q}} |y(q;t,x)| \leq M_b < \infty,$$

が成り立つ。ここで、$y = y(q)$ は方程式 (4.1) の弱解である。

3 節で注意したように、$n = 1$ かつ (3.10) が成り立つとき、または $n = 2, 3$ でデータの強い正則性 (3.12) が成り立てば、この仮定 **(H)** は満足される。

Theorem 4 **(H)** を仮定する。このとき解写像 $q \to y(q)$: $\mathcal{P} \to L^2(0,T;H)$ は、弱ガトー微分可能である。 すなわち、任意に固定された $q^* = (\alpha^*, \beta^*, \delta^*)$ と $q = (\alpha, \beta, \delta)$ に対し、$y(q)$ の $q = q^*$ における $q - q^*$ 方向の弱ガトー微分 $z = Dy(q^*)(q - q^*)$ が 空間 $L^2(0,T;H)$ において存在する。さらに、この z は次の積分方程式のただ一つの解になる。

$$\int_0^T (z(t), \mathcal{L}_0(\phi)(t))dt = \int_0^T \langle f_0(t), \phi(t) \rangle \, dt, \quad \forall \phi \in X_0, \tag{4.5}$$

$$f_0 = (\alpha^* - \alpha)y^{*'} + 2\beta^*(\beta^* - \beta)Ay^* + 2\delta^*(\delta^* - \delta)|y^*|^\gamma y^*,$$

$$\mathcal{L}_0(\phi) = \phi'' - \alpha^*\phi' + (\beta^{*2} + \beta_0)A\phi + \delta^{*2}(\gamma+1)|y^*|^\gamma\phi$$

であり、X_0 は次で与えられる集合である。

$$X_0 = \{\phi |\ \mathcal{L}_0(\phi) = h \text{ in } [0,T],\ \phi(T) = \phi'(T) = 0,\ \forall h \in L^2(0,T;H)\}.$$

Theorem 4 を用いて次の主定理を示す事ができる。

Theorem 5 **(H)** の仮定のもとで、分布観測コスト (4.2) に関する最適パラメータ $q^* = (\alpha^*, \beta^*, \delta^*)$ は、次のシステムおよび 一つの変分不等式により特徴づけられる。ここで、簡単のため $y = y(q^*)$, $p = p(q^*)$ と書く。

$$\begin{cases} y'' + \alpha^* y' + (\beta^{*2} + \beta_0)Ay + \delta^{*2}|y|^\gamma y = f \text{ in } (0,T), \\ y(0) = y_0,\quad y'(0) = y_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p'' - \alpha^* p' + (\beta^{*2} + \beta_0)Ap + \delta^{*2}(\gamma+1)|y|^\gamma p = y - z_d \text{ in } (0,T), \\ p(T) = 0,\quad p'(T) = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \langle(\alpha^* - \alpha)y' + 2\beta^*(\beta^* - \beta)Ay + 2\delta^*(\delta^* - \delta)|y|^\gamma y, p\rangle\, dt \geq 0\ \ \forall q = (\alpha, \beta, \delta) \in \mathcal{P}_{ad}. \tag{4.6}$$

4.3 バンバン原理

最適パラメータのバンバン原理を確かめよう。許容集合 $\mathcal{P}_{ad}$ を

$$\mathcal{P}_{ad} = [\alpha_1, \alpha_2] \times [0, \beta_1] \times [\delta_1, \delta_2]$$

と取る。このとき、必要条件 (4.6) は次と同値。

$$\int_0^T ((\alpha^* - \alpha)y'(t), p(t))\, dt \geq 0,\quad \forall\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2], \tag{4.7}$$

$$\int_0^T \langle\beta^*(\beta^* - \beta)Ay(t), p(t)\rangle\, dt \geq 0,\quad \forall\beta \in [0, \beta_1], \tag{4.8}$$

$$\int_0^T (\delta^*(\delta - \delta^*)|y(t)|^\gamma y(t), p(t))\, dt \geq 0,\quad \forall\delta \in [\delta_1, \delta_2]. \tag{4.9}$$

まず、(4.7) を解析しよう。$a = \displaystyle\int_Q \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)p(x,t)\, dxdt$ とおき、 $a \neq 0$ と仮定する。このとき、条件 (4.7) は次のように書ける。

$$(\alpha^* - \alpha)a \geq 0,\quad \forall\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2].$$

従って、α^* は次で与えられる。

$$\alpha^* = \frac{1}{2}\{\text{sign}(a)+1\}\alpha_2 - \frac{1}{2}\{\text{sign}(a)-1\}\alpha_1.$$

これは、α^* に対しての Bang-bang principle といえる。先と同様に $b = \int_Q \nabla y(x,t)\cdot\nabla p(x,t)\,dxdt$ とおき、 $b \neq 0$ と仮定する。このとき、条件 (4.8) から β^* は次で与えられる事がわかる。

$$\beta^* = \frac{1}{2}\{\text{sign}(b)+1\}\beta_1 \;\text{ or }\; \beta^* = 0.$$

最後に $c = \int_Q |y(t,x)|^\gamma y(t,x)p(x,t)\,dxdt$ とおき、 $c \neq 0$ と仮定する。このとき、条件 (4.9) から次の事が示される。

$$\delta^* = \frac{1}{2}\{\text{sign}(c)+1\}\delta_2 - \frac{1}{2}\{\text{sign}(c)-1\}\delta_1.$$

参考文献

[1] Ahmed N. U., *Optimization and identification of systems governed by evolution equations on Banach space*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific & Technical, **184** 1988.

[2] H. T. Banks, R. C. Smith and Y. Wang, *Smart Material Structures: Modeling, Estimation and Control*, Masson, Paris, 1996.

[3] H. T. Banks and K. Kunisch, *Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems, Birkhäuser*, Boston, 1989.

[4] R. Dautray and J. L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, *Springer-Verlag*, Vol. 5, Evolution Problems, 1992.

[5] J.H. Ha and S. Nakagiri, *Identification problems for coupled damped sine-Gordon systems*, 数理解析研究所講究録 1216 (2001), 201-212.

[6] J. L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1971.

[7] J. L. Lions, *quelques méthods de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[8] J. L. Lions and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications II*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1972.

[9] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Second Edition, Applied Math. Sci. 68*, Springer-Verlag 1997.