数理解析研究所講究録 1309 巻 2003 年 205-213

ある半線形放物形方程式の初期値境界値問題の解の漸近挙動について

早稲田大学理工学部 高市 恭治 (Kyouji Takaichi)
School of Science and Engineering,
Waseda University

1. Introduction.

次の半線形熱方程式の初期値境界値問題 (P) の大域解の漸近挙動について、考察する。

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}
1.\quad u_t(x,t)-\Delta u(x,t)=f(x,u(x,t)), \quad (x,t)\in\Omega\times[0,\infty) \\
2.\quad u(x,0)=u_0(x), \qquad x\in\Omega \\
3.\quad \frac{\partial u}{\partial n}(x,t)\ +\ \sigma(x)|u(x,t)|^{m-2}u(x,t)\ =\ 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,\infty), 0\le\sigma\in L^\infty(\partial\Omega)
\end{cases}
$$

ここで、Ω は $\mathbb{R}^N$ 内の滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域であり、f は、下記の非線形性 (f) を満足する、$\Omega\ \times\ \mathbb{R}^1$ から $\mathbb{R}^1$ への連続関数である:

$$
(\mathrm{f})\begin{cases}
\text{以下の3条件を満たす定数 } K_i (i=0,1,2,3) \text{ と実数 } p\in(2,2^*),\ \delta>0, \\
\text{そして } \varepsilon>0 \text{ が存在する。ここで、} 2^* \text{は、一般に臨界ソボレフ指数と呼ばれ、} \\
2^*=\infty\ for\ N=1,2;\ 2^*=2N/(N-2)\ for\ N\ \ge\ 3: \\
\text{(i) } |f(x,u)|\le K_0(1+|u|^{p-1}), \quad \forall(x,u)\in\Omega\times\mathbb{R}^1 \\
\text{(ii) } F(x,u)=\int_0^u f(x,t)dt\ge K_1|u|^{2+\delta}-K_2, \quad \forall(x,u)\in\Omega\times\mathbb{R}^1 \\
\text{(iii) } uf(x,u)\ge(2+\varepsilon)F(x,u)-K_3, \quad \forall(x,u)\in\Omega\times\mathbb{R}^1, \varepsilon>m-2
\end{cases}
$$

さらに、$m\in(2,\hat{2})$ とする。ここで、$\hat{2}$ は、ソボレフのトレースの埋蔵定理に於ける臨界指数と呼ばれ、$\hat{2}=\infty$for $N=1,2;\hat{2}=2(N-1)/(N-2)$for $N\ge3$ である。

これまで、上記の半線形放物型方程式の境界条件ディリクレゼロの問題の大域解の漸近挙動に関しては、数多く研究されてきているが、Neumann 0 条件を含む第三種境界条件問題に関しては、ほとんど研究されていない。発表者は、修士論文において、境界条件が第三種境界条件の場合、第 22 回本セミナーにおいて、一相ステファン問題に対して、そして今回、境界条件が非線形の場合につき、研究に取り組んだ。

特に、本発表では、大域解が存在する事を仮定した時の、あるノルムでの、有界性に注目する。すなわち、キーワードとしては、『$T_m = +\infty \Rightarrow$ **bound of norm?**』である。また、境界条件を非線形とすることにより生じる困難は、エネルギー汎関数を考える時に斉次性がくずれることであるが、発表者は、今までの解析に使用した phase plane method を一次元上げて解析する phase space を導入することにより、困難を回避することに成功した。

2. Main Results

定理 I.(H^1 Bound)

条件 (f) が満足され、u が、$V \equiv W^{1,2}_{loc}([0,\infty);L^2(\Omega)) \bigcap L^2_{loc}([0,\infty);H^2(\Omega))$ に属するような、(P) の大域解であるとする。そのとき、以下を満たす様な正定数 $C_0(|u_0|_{H^1}, K_0, K_1, K_2, K_3, \delta, \varepsilon, |\Omega|)$ が存在する。

(1) $\sup_{t\geq 0} |u(t)|_{L^2} \leq C_0$,

(2) $\sup_{t\geq 0} |u(t)|_{H^1} < +\infty$,

(3) $^{\exists}T_0(|u_0|_{H^1}, K_0, K_1, K_2, K_3, \delta, \varepsilon, |\Omega|)$ $s.t.$ $\sup_{t\geq T_1} |u(t)|_{H^1} \leq C_0$,

(4) $p \in (2, 2_*)$ であれば、$\sup_{t\geq 0} |u(t)|_{H^1} \leq C_0$. ここで、

$2_* = \infty$ for $N = 1$; $2_* = 2 + 12/(3N-4)$ for $N \geq 2$.

定理 II.(L^∞ Bound)

条件 (f) が満足され、$u_0 \in L^\infty(\Omega)$ で u が、
$L^\infty_{loc}([0,\infty);L^\infty(\Omega)) \bigcap W^{1,2}_{loc}((0,\infty);L^2(\Omega)) \bigcap L^2_{loc}((0,\infty);H^2(\Omega))$ に属するような、$(P)_R$ の大域解であるとする。
このとき、以下を満たす様な正定数 $C_1 = C_1(|u_0|_{L^\infty}, K_0, K_1, K_2, K_3, \delta, \varepsilon, |\Omega|)$ が存在する。

(5) $\sup_{t\geq 0} |u(t)|_{L^\infty} < \infty$,

(6) $^{\exists}T_1(|u_0|_{L^\infty}, K_0, K_1, K_2, K_3, \delta, \varepsilon, |\Omega|)$ $s.t.$ $\sup_{t\geq T_1} |u(t)|_{L^\infty} \leq C_1$,

(7) $p \in (2, 2_*)$ であれば、$\sup_{t\geq 0} |u(t)|_{L^\infty} \leq C_1$. ここで、

$2_* = \infty$ for $N = 1$; $2_* = 2 + 12/(3N-4)$ for $N \geq 2$.

3. Notation

$a(u) := \frac{1}{2}(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u|^2 dx$

$\tilde{a}(u) := \frac{1}{m}\int_\Gamma \sigma(x)|u|^m d\Gamma)$
$G(u) := \int_\Omega \int_0^{u(x)}(\lambda t + f(x,t))dtdx$
$J(u) := a(u) + \tilde{a}(u) - G(u)$
$j(u) := \int_\Omega u(\lambda u + f(x,u))dx - 2a(u) - m\tilde{a}(u)$

4. 証明の概略

L^2 有界性 (ステップ 1)

<u>命題 1.</u>

u が V に属するような (P) の大域解であるとする。そのとき、
(i) $J(u(t))$ は t に関して、単調減少である。
(ii) $J(u(t)) \quad \geq \quad -d_0 \qquad {}^\forall t \geq 0.$
(iii) $\int_0^\infty |u_t(t)|^2 dt \quad \leq \quad J(u_0) + d_0,$
(iv) $|u(t)| \quad \leq \quad K_4, \qquad {}^\forall t \geq 0$ を満たすような、$K_i (i = 0,1,2,3), \varepsilon, \delta, d_0$ と $J(u_0)$ だけに依存する定数 K_4 が存在する。

(証明)

$\boxed{\text{エネルギー等式}}$

- $\int_\Omega eq. \times u_t \Rightarrow \dfrac{d}{dt}J(u(t)) = -|u_t(t)|^2 \;\Rightarrow (i)$
- $\int_\Omega eq. \times u \Rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|u(t)|^2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 &= j(u(t)) \\
&= \textstyle\int_\Omega(\lambda u + f(x,u))dx - 2a(u) - m\tilde{a}(u) \\
&\geq (2+\varepsilon)\textstyle\int_\Omega G(x,u)dx - K_3|\Omega| - 2a(u) - m\tilde{a}(u) \\
&\geq (2+\varepsilon)G(u) - m(a(u) + \tilde{a}(u)) - K_3|\Omega| \\
&= (2+\varepsilon-m)G(u) - mJ(u) - K_3|\Omega| \\
&\geq (2+\varepsilon-m)K_1|\Omega|^{-\frac{\delta}{2}}|u(t)|^{2+\delta} - (2+\varepsilon-m)K_2|\Omega| - mJ(u) - K_3|\Omega|
\end{aligned}$$

背理法により、(ii) $(J(u(t)) < -d_0 \;\Rightarrow\; j(u(t)) > \alpha > 0)$
$\Downarrow$
$|u(t)| \nearrow$
$\Downarrow$
${}^\exists t_1 > 0, {}^\forall t \geq t_1$ で、
$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 \geq \frac{1}{2}(2+\varepsilon-m)K_1|\Omega|^{-\delta/2}\|u(t)\|^{2+\delta} \Rightarrow$ 有限時間で Blow up $\Rightarrow$ **矛盾**
上式の両辺を $[0,\infty)$ で積分して $\quad \Rightarrow \quad$ (iii)
再び、背理法により、

$${}^\exists t_1 > 0, \quad (2+\varepsilon-m)K_1|\Omega|^{-\delta/2}|u(t_1)|^{2+\delta}/2 \; > (2+\varepsilon-m)K_2\cdot|\Omega| - mJ(u_0) - K_3\cdot|\Omega|$$

$$t_1 \text{ の近傍で、} |u(t)| \nearrow$$
$$\Downarrow$$
$$^\forall t \geq t_1 \text{で、} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 \geq \frac{1}{2}\varepsilon K_1 \cdot l_\infty^{-\delta/2} \cdot \|u(t)\|^{2+\delta}$$
$$\Downarrow$$

有限時間で、Blow up. ⇒ **矛盾** ⇒ (iv)

H^1 有界性 (ステップ２)

<u>補題１.</u> $r, q \in [1, \infty)$, m : 非負整数の時

$$|u|_s \leq C|u|_{W^a_{m,r}} |u|_q^{1-a} \quad \text{for } ^\forall u \in W^{m,r}(\Omega) \bigcap L^q(\Omega)$$

ただし、$a \in [0,1]$, $s \in [1, \infty)$ s.t. $\dfrac{1}{s} = a \times (\dfrac{1}{r} - \dfrac{m}{N}) + (1-a) \times \dfrac{1}{q}$

<u>補題２.</u> $u \in V$ が (P) の大域解の時

$^\exists$ 正値単調減少関数 $T(\cdot)$ s.t.

$$\|u(t)\| \leq \|u(t_0)\| + 1 \text{for all } t_0 \text{ and } t \in [t_0, t_0 + T(\|u(t_0)\|)] \tag{21}$$

<u>証明</u>. まず第一に、$^\exists \lambda \in (0, 2]$ s.t.

$$|u|_{2(p-1)}^{2(p-1)} \leq C|u|_{H_2}^{2-\lambda} \|u\|^{2p-4+\lambda} \qquad ^\forall u \in H^2(\Omega) \tag{22}$$

実際、$N = 1, 2$ または $N \geq 3$ で $2(p-1) \leq 2N/(N-2)$、の場合には、$\lambda = 2$ととれる。それ以外の場合は、補題１を $s = 2(p-1), m = r = 2, q = 2N/(N-2)$ として適用し、$H^1(\Omega)$ は、$L^{2N/(N-2)}(\Omega)$ に連続に埋め込まれるという事実を使いさえすればよい。この不等式は次を満たす単調増加関数 $M(\cdot)$ が存在する事を意味する。

$$|g(\cdot, u)|^2 \leq \frac{1}{2}|\Delta u|^2 + M(\|u\|) \qquad ^\forall u \in H^2(\Omega) \tag{23}$$

・$\displaystyle\int_\Omega eq. \times -\Delta u(t) + \lambda u(t) \Rightarrow$
$(u_t, -\Delta u + \lambda u) - (\Delta u, -\Delta u + \lambda u) + (\lambda u, -\Delta u + \lambda u) = (g(\cdot, u), -\Delta u + \lambda u)$

(左辺) $= (u_t, -\Delta u) + (u_t, \lambda u) + |\Delta u|^2 - \lambda(\Delta u, u) - \lambda(u, \Delta u) + \lambda^2|u|^2$
$= -\int_\Omega u_t \cdot \Delta u dx + \lambda \int_\Omega u_t \cdot u dx + |\Delta u|^2 - 2\lambda \int_\Omega \Delta u \cdot u dx + \lambda^2 |u|^2$
$= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u_t d\Gamma + \int_\Omega \nabla u_t \cdot \nabla u dx + \frac{\lambda}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx + |\Delta u|^2$
$-2\lambda \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx + \lambda^2|u|^2$
$= \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot |u|^{m-2}u \cdot u_t d\Gamma + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + |\Delta u|^2$
$+2\lambda \int_{\partial\Omega} \sigma |u|^{m-2}u \cdot u d\Gamma + 2\lambda|\nabla u|^2 + \lambda^2|u|^2$
$= \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\int_{\partial\Omega} \sigma \cdot |u|^m d\Gamma + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + |\Delta u|^2 + 2\lambda \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot |u|^m d\Gamma + 2\lambda|\nabla u|^2 + \lambda^2|u|^2$
$= \frac{d}{dt}(a(u) + \tilde{a}(u)) + |\Delta u|^2 + 2\lambda|\nabla u|^2 + \lambda^2|u|^2 + 2\lambda \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot |u|^m$

(右辺) $= -(g(\cdot,u), \Delta u) + \lambda(g(\cdot,u), u)$
$\leq |-(g(\cdot,u), \Delta u) + \lambda(g(\cdot,u), u)|$
$\leq |(g(\cdot,u), \delta u)| + \lambda|(g(\cdot,u), u)|$
$\leq |g(\cdot,u)||\Delta u| + \lambda|g(\cdot,u)||u|$
$\leq \frac{1}{2C}|\Delta u|^2 + 2C|g(\cdot,u)|^2 + \lambda(\frac{1}{2C'}|u|^2 + 2C'|g(\cdot,u)|^2)$

$\Downarrow$

$\frac{d}{dt}(a(u) + \tilde{a}(u)) + |\Delta u|^2 + 2\lambda|\nabla u|^2 + \lambda^2|u|^2 + 2\lambda \int_{\partial\Omega} \sigma|u|^m d\Gamma \leq$
$\frac{1}{2C}|\Delta u|^2 + 2C|g(\cdot,u)|^2 + \lambda(\frac{1}{2C'}|u|^2 + 2C'|g(\cdot,u)|^2)$

$\Downarrow$

$\frac{d}{dt}(a(u) + \tilde{a}(u)) \leq \tilde{C}M(\|u\|)$ for a.e. $t \in [0, \infty)$

$\Downarrow$

ある $t_1 > t_0$ が存在して、$\|u(t_1)\|^2 \geq \|u(t_0)\| + 1$ とすると、
$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\|u(t_1)\|^2 - \|u(t_0)\|^2 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 dt \leq \int_{t_0}^{t_1} M(\|u(t)\|^2) dt \leq$
$\int_{t_0}^{t_1} M(\|u(t_0)\|^2 + 1) dt) = M(\|u(t_0)\|^2 + 1)(t_1 - t_0)$

$\Downarrow$

$t_1 - t_0 \geq \frac{1}{2M(\|u(t_0)\|^2+1)}$

$\Downarrow$

$t_1 \geq t_0 + \frac{1}{2M(\|u(t_0)\|^2+1)}$

$\Downarrow$

(21)with $T(r) = \frac{1}{2M(r+1)}$
Q.E.D.

((定理 I の証明))
(6) と (7) の証明
命題 1 の (iii)$\Rightarrow {}^\exists T_0 > 0$ s.t.

$$\int_{T_0}^{\infty} |u_t(t)|^2 dt \leq (\frac{d}{K_4})^2 T(d_1) \tag{24}$$

$$\Downarrow$$

$$\|u(t)\| \leq d_1 + 1 \qquad \text{for all } t \geq T_1 \stackrel{def}{=} T_0 + \frac{{K_4}^2}{2\alpha} \tag{25}$$

背理法で証明。Not!⇒$^\exists t_1 \geq T_1$s.t.$\|u(t_0)\| > d_1 + 1$

$$\Downarrow \text{(j 領域の考察)}$$

$$j(u(t_1)) > \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$^\exists t_0 \quad \text{s.t.} \quad j(u(t)) = \alpha \quad \text{and} \quad j(u(t)) > \alpha, ^\forall t \in (t_0, t_1]$$

２番目のエネルギー等式を $[t_0, t_1]$ で積分し、命題１ (iv) を使って

$$t_1 - t_0 \leq \frac{{K_4}^2}{2\alpha} \Longrightarrow t_0 \geq T_0$$

再び、２番目のエネルギー等式を $[t_0, t_1]$ で積分して

$\alpha(t_1 - t_0) \leq \int_{t_0}^{t_1} j(u(t))dt \leq \int_{t_0}^{t_1} |u_t(t)||u(t)|dt \leq K_4(t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}}(\int_{T_0}^{\infty} |u_t(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$

$$(24) \Downarrow$$

$$t_1 - t_0 \leq T(d_1)$$

$\|u(t_0)\| \leq d_1$ と補題２より

$\|u(t_1)\| \leq d_1 + 1 \Longrightarrow$ 矛盾！

⇒(6) と (7)

<u>補題３</u>.

$$u \in L^r(I; L^r(\Omega), \quad r < 2^*$$

$$\Rightarrow \quad |u|_{L^\infty(I; L^{r/2+1}(\Omega))} \leq C(|u|_{L^r(I;L^r(I;L^r(\Omega)),d_0,d_3,r}).$$

<u>証明</u>.

$\frac{1}{[}s]\frac{d}{dt}|u(t)|_s^s = (u_t(t), |u|^{s-2}u(t)) \leq |u_t(t)||u(t)|_r^{s-1} \leq \frac{1}{2}(|u_t(t)|^2 + |u(t)|_r^r), \quad s = \frac{r}{2} + 1$

⇓ 区間 I で積分して

$\frac{1}{s}|u(t_0 + \gamma)|_s^s - \frac{1}{s}|u(t_0)|_s^s \leq \frac{1}{2}(\int_I |u_t(t)|^2 dt + \int_I |u(t)|_r^r dt) \leq \frac{1}{2}(J(u_0) + d_0 + |u|_{L^r(I;L^r(\Omega))})$

ここで、(f) の (i) より、

$$|g(x,t)| \leq K_0(1 + |t|^{p-1})$$

$$\Downarrow$$

(積分して)

$-\int_0^| u(x)|K_0(1 + |t|^{p-1})dt \leq \int_0^{u(x)} g(x,t)dt \leq \int_0^| u(x)|K_0(1 + |t|^{p-1})dt =$
$K_0[t + \frac{1}{p}|t|^{p-1}t]_0^| u(x)| = K_0[|u(x)| + \frac{1}{p}|u(x)|^{p-1}u(x)]$

$$-CA(u) \le G(u) \le CA(u)$$

従って、

$$\frac{1}{s}|u(t_0+\gamma)|_s^s \le \frac{1}{s}|u(t_0|_s^s + \frac{1}{2}(J(u_0) + d_0 + |u|_{L^r(I;L^r(\Omega))}^r)$$

依って、
$|u(t_0)|_s \le C\|u(t_0)\| \le C \cdot d_3$, $J(u_0) = A(u_0) - G(u_0) \le A(u_0) + CA(u_0) \le C' \cdot d_3$ より、証明終。
<u>命題２.</u>

$$u \in L^\infty(I;L^r(\Omega)), \quad \frac{N(p-2)}{2} < r < \infty,$$
$$\Longrightarrow |u|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} \le C(|u_0|_{L^\infty(I;L^r(\Omega))}, C_0).$$

<u>証明</u>. (1) の両辺に $|u|^{l-2}u(t)$ $(2 < l < 2^*)$ を掛けて積分する事により、(f) の (i) から、以下を得る、

$$\frac{1}{l}\frac{d}{dt}|u(t)|_l^l + \frac{4(l-1)}{l^2}A(|u(t)|^{\frac{l}{2}})^2 \ \le \ K_0(2|u(t)|_{p+l-2}^{p+l-2}) \tag{26}$$

すべての $l > (p-2)N/2$ に対して、補題１ を、
$s = 2(p+l-2)/l$, $m = 1$, $r = q = 2$ として使い、u を $|u|^{l/2}$ に変えると、

$$|u|_{p+l-2}^{p+l-2} \ \le \ C\|u\|^{p+\lambda l-2}A(|u|^{\frac{l}{2}})^{2-\lambda} \tag{27}$$

従って、(26) 式を I で積分して、(27) 式を $l = r$ とする事により、次を得る。

$$||u|^{\frac{r}{2}}|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \le \ C(|u|_{L^\infty(I;L^r(\Omega))},\ A(u_0)) \tag{28}$$

再度、補題１ を $s = 2(N+2)/N$, $m = 1$, $r = q = 2$ として使い、u を $|u|^{\frac{r}{2}}$ に変更して、次を得る。

$$|u|_{(2+N)r/N}^{(2+N)r/N} \ \le C|u|_r^{2/N}A(|u|^{\frac{r}{2}})^2.$$

従って、(28) と (29) より、$u \in L^{(2+N)r/N}(I;L^{(2+N)r/N}(\Omega))$ となる。これより、補題２ から、$u \in L^\infty(I;L^{(2+N)r/2N+1}(\Omega))$。この作業を繰り返す事によって、
$u \in L^\infty(I;L^{r_i}(\Omega))$、ここで、$r_i$ は、下の漸化式によって、定義される。

$$r_{i+1} = \frac{N+2}{2N}r_i + 1,\ i = 1, 2, \cdots,\ r_1 = r.$$

$i \to \infty$ で、$r_i \to 2^*$ で、$p < 2^*$ なので、有限回の操作で、$r_i > p$ とでき、

$$\begin{aligned} |u|_{L^\infty(I;L^p(\Omega))} &\leq |u|_{L^\infty(I;L^{r_i}(\Omega))} \\ &\leq C(|u|_{L^\infty(I;L^r(\Omega))}, C_0) \end{aligned}$$

最後に、命題１の (i) より,

$$a(u) + \tilde{a}(u) - G(u) = J(u) \leq J(u_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\|u\| \leq C(a(u) + \tilde{a}(u)) \leq G(u) + J(u_0) \leq C'|u|_p + J(u_0)$$

$$\Downarrow$$

$$|u|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} \leq C|u|_{L^\infty(I;L^p(\Omega))}.$$

Q.E.D.

命題３. N=1,2,3,4 のときは、

$$|u|_{L^\infty(I;L^q(\Omega))} \leq C_0 \quad \text{for all } q < q^*.$$

ここで、N=1 のときは、$q^* = \infty$ で、N=2,3,4 のときは、$q^* = 2 + 8/(3N-4)$

証明. $q_1 = 2$, $q_{i+1} = 4 - Nq_i/2N + (6N+8)/2N$, $i = 1,2,3,\cdots$ とする。補題１ を $s = q_{i+1}$, $m = 1$, $r = 2$, そして $q = (2+q_i)/2$ として適用して、

$$|u|_{q_{i+1}}^{q_{i+1}} \leq C|u|_{(2+q_i)/2}^{q_{i+1}-4} \|u\|^4.$$

従って、命題１の (iv) と 補題２ から、すべての q_i で $u \in L^{q_i}(I; L^{q_i}(\Omega))$. ここで、$i \to \infty$ のとき、$q_i \to q^*$ なので、有限回の操作により、主張を得る事ができる。

Q.E.D.

命題４. $N \geq 5$ のときは、

$$|u|_{L^\infty(I;L^q(\Omega))} \leq C_0 \quad \text{for all } q < q_* = 3 + (N-4)(2-p)/4$$

証明. $N \geq 4$ ときは、$p < 2* \leq 4$ であり、命題１の (vi) より、$|u|_{L^4(I,L^{2^*}(\Omega))} \leq C_0$ なので、$|u|_{L^p(I;L^p(\Omega))} \leq C_0$ となる。

$p_1 = p$, $p_{i+1} = (N-4)p_i/(N-2) + [8 + (N-4)(2-p)]/(N-2)$ そして、

$s_i = 2 + p_i - p$, $i = 1,2,3,\cdots$ としよう。$u \in L6p_i(I; L^{P_i}(\Omega))$ を仮定する。すると、

(26) 式より、$|u|^{\frac{s_i}{2}} \in L^2(I; H^1(\Omega))$. $\Downarrow$ 補題

1 with $s = 2p_{i+1}/s_i, m = 1, r = 2, q = 2 \cdot 2^*/s_i, u = |u|^{s_i/2}$

$|u|_{p_{i+1}}^{p_{i+1}} \leq C|u|_{2^*}^{\lambda_1} \||u|^{s_i/2}\|_2^{\lambda}$ with $\lambda_1/2 + \lambda_2 \leq 2$

$|u|_{L^{p_i+1}(I;L^{p_i+1}(\Omega))} \le C_0$
ここで、$i \to \infty$ のとき、$p_i/2+1 \to q_*$ なので、有限回の操作により、主張を得る事ができる。
Q.E.D.
命題２と３と４により、ステップ２終了。

((定理２の証明))
Moser's Iteration scheme を利用して、H^1Bound から L^∞Bound を得る事によって証明。

参考文献

[1] Ôtani, M.: *Bounds for global solutions of some semilinear parabolic equations*, 京都大学数理解析研究所講究録 (1989)

[2] Ôtani, M.: *Existence and asymtotic stability of strong sllution of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials, Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai,*,**30**, Qualitative theory of dufferentail equations, North Holland, 1980.

[3] Giga, Y.: *A bound for global solutions of semilinear heat equations* , Comm.Math.Phys.,**103**(1986), 415-421

[4] Baras, P. and Cohen, L.: *Complete blow-up after Tmax for the solutions of a semilinear heat equation*, J.Funct.Anal.**71**, 1987, 142-174

[5] Brézis, H.: *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, E.Zarantonello ed., Acad. press, 1971, 101-165

[6] Ni, W.M, Sacks, P.E., and J.Tavantzis, *On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear equation of parabolic type*, J. Differ. Equations **54**(1984), 97-120.

[7] Cazenave, T. and Lions, P.L., *Solutions glolales d'équations de la chaleur semi linéaires*, ibid., **9**(1984), 955-978.

[8] Quittner,P.: *A priori bound for global solutions of a semilinear parabolic problem* **30**, Acta Math.Univ.Comenianae(1999).