数理解析研究所講究録 1310 巻 2003 年 29-41



# 環積のゲルファントペアと (n+1,m+1) 型超幾何関数

Gelfand pair of Wreath Products and $(n+1, m+1)$-Hypergeometric Functions

水川裕司 ( Hiroshi Mizukawa)

北海道大学自然科学研究科
*Division of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060-0810, Japan* *
e-mail: mzh@math.sci.hokudai.ac.jp

## 1 有限群と直交多項式, 典型的な例

有限群と Gauss の超幾何関数

$$ {}_2F_1(a,b,c|x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b_n)}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} $$

に関して 1970 年に Vere-Jones [19] が $B$ 型 Weyl 群とその部分群である対称群のなす対 $(W(B_n), S_n)$ を扱い, 次を得ている.

**Theorem 1.1.** *Gelfand* ペア $(W(B_n), S_n)$ の帯球関数のテーブルは次で与えられる.

$$ ({}_2F_1(-k,-\ell;-n|2))_{0\le \ell,k\le n}. $$

また, これらは次の直交関係を満たす

$$ \frac{1}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}{}_2F_1(-k,-\ell;-n|2){}_2F_1(-k',-\ell;-n|2) = \binom{n}{k}^{-1}\delta_{k,k'}. $$

このようにして, 有限群の Gelfand ペアから, 有限和で直交性が描ける直交多項式が得られる. また, これは直交関係式より, 一変数の直交多項式であると解釈出来る. 更に Dunkl-Ramirez (cf. [6]) によってこのことは対称群の環積の場合に次のように拡張されるのである.

**Theorem 1.2.** *Gelfand* ペア $(S_q \wr S_n, S_{q-1}\wr S_n)$ の帯球関数のテーブルは次で与えられる.

$$ ({}_2F_1(-k,-\ell;-n|\frac{q}{q-1}))_{0\le \ell,k\le n}. $$

*Current Address : Department of Mathematics, Faculty of Science, Okayama University, Okayama 700-8530, Japan

また, これらは次の直交関係を満たす

$$\frac{1}{q^n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}(q-1)^{\ell}{}_2F_1(-k,-\ell;-n|\frac{q}{q-1}){}_2F_1(-k',-\ell;-n|\frac{q}{q-1})=\binom{n}{k}^{-1}(q-1)^{-n}\delta_{k,k'}.$$

最初の定理はこの定理の $q = 2$ の場合である. ここで得られた直交多項式もまた直交性が有限和で書かれる一変数の多項式である. これらの直交多項式は Krawtchouk 多項式と呼ばれるものの特別な場合である. そして, 本来変数の部分は $x = \frac{q}{q-1}$ という値が代入されており, いわゆる選点系の直交多項式であることにも注意しておく.

こうした一変数直交多項式はその最も大きいクラスとして $q$-Racah 多項式と呼ばれるものが知られているが, 実はこれは代数的組合せ論の枠組みで捉えられることが, Leonard [14] によって知られている.

この報告では, Gauss の超幾何関数型の直交多項式の多変数化と言う事を目標におき, 上の例が何故一変数なのか？そして, どのようにして変数が固定されているのか？という疑問にも解答を与える.

そのためにまずは次章で有限群の Gelfand ペアについてのまとめをして, その後, 3 章以降で Aomoto-Gelfand の超幾何関数で帯球関数がかける場合を複素鏡映群をつかって紹介する. そして最後に環積の Gelfand ペアと Aomoto-Gelfand の超幾何関数の関係について考察する.

## 2 有限群の Gelfand ペア

有限群の帯球関数に関しては [15] に詳しい解説があるので, ここでは必要なことのみ紹介するに留めておく.

$G$ を有限群, そして $H$ をその部分群とする.

**Definition 2.1.** 誘導表現 $1_H^G$ が無重複のとき, $(G,H)$ を *Gelfand* ペアとよぶ.

さて, 以下では $(G,H)$ を Gelfand ペア とする, そして誘導表現 $1_H^G$ が以下のように分解しているとする;

$$V = 1_H^G = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i,\ V_i \not\cong V_j\ (i \neq j).$$

このとき事実として $s = |H\backslash G/H|$ である.

$$\{g_i; 1 \le i \le s\}$$

を両側剰余類 $H\backslash G/H$ の代表系とする. さらに $D_i = Hg_iH$ とおく. $V_i^H$ を $V_i$ の $H$-不変部分空間とする. Frobenius の相互律から;

$$\dim V_i^H = \langle V_i, 1_H\rangle_H = \langle V_i, 1_H^G\rangle_G = 1$$

である．ここで $\langle V, W\rangle_G$ は交叉数である．$[*|*]$ を $V_i$ 上定義された $G$-不変な複素内積，そして $\dim V_i = n$ とする．いま

$$\{v_1^i, \cdots, v_n^i\}$$

を $V_i$ の正規直交基底, ただし $v_1^i \in V_i^H$ とする．$(\rho_{k\ell}^i)_{1\le k,\ell\le n}$ を $G$ の $V_i$ 上の行列表現とする．$C(G/H)$ を各右側剰余類上定置な $G$ 上の関数とする, とまり,

$$C(G/H) := \{f : G \to \mathbb{C};\ f(xh) = f(x)\ \forall x \in G,\ \forall h \in H\}$$

である．このとき $\dim C(G/H) = [G : H]$ は明らかである．線形写像

$$\varphi_i : V_i \longrightarrow C(G/H)$$

を $g, h \in G$ and $v \in V_i$. に対して

$$\varphi_i(v)(g) = [v|gv_1^i]$$

で定義する．

$$\varphi_i(gv)(k) = [gv|kv_1^i] = [v|g^{-1}kv_1^i] = \varphi_i(v)(g^{-1}k) = (g\varphi_i(v))(k)$$

かつ $\varphi \not\equiv 0$ なので, $\varphi$ は単射な $G$-線形写像である．そして次を得る,

$$C(G/H) = \bigoplus_{i=1}^{s} \varphi_i(V_i).$$

いま, $\omega_i \in \varphi_i(V_i)$ を $g \in G$ に対して, $\omega_i(g) = [v_1^i|gv_1^i] = \overline{\rho_{11}^i(g)}$ で定義する．上での議論から,

$$\varphi_i(V_i)^H = \mathbb{C}\omega_i$$

である．

**Definition 2.2.** 関数 $\omega_i$ $(1 \le i \le s)$ を $(G, H)$ の帯球関数 $s$ とよぶ．

以下にこの帯球関数の性質を幾つか挙げておく．

**Proposition 2.3.** *(1)* $g \in G$ と $h_1, h_2 \in H$ に対して,

$$\omega_i(h_1gh_2) = \omega_i(g).$$

*(2)* 任意の $g \in G$ に対して $\omega_i(1) = 1$ かつ $\omega_i(g^{-1}) = \overline{\omega_i(g)}$ .

上の (1) より, 帯球関数は両側剰余類上の関数と見なすことが出来る．次が帯球関数 の直交性である．

**Proposition 2.4.** $g \in D_k$ に対して $\omega_i(D_k) = \omega_i(g_i)$ と書いたとき,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{s} |D_k|\omega_i(D_k)\overline{\omega_j(D_k)} = \delta_{ij} \dim V_i^{-1}$$

# 3 Gelfand ペア $(G(r,1,n),S_n)$ の帯球関数

$\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}$ を自然数の集合とする．ここでは正の整数 $r$ を固定する．一の原始 $r$ 乗根を $\xi=\exp 2\pi\sqrt{-1}/r$ と置く．$C_r^n=<\xi>\times\cdots\times<\xi>$ を巡回群 $C_r=<\xi>$ の $n$ 個の直積とする．対称群 $S_n$ は $C_r^n$ 上に次のように作用する．

$$\sigma(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)=(\xi_{\sigma^{-1}(1)},\xi_{\sigma^{-1}(2)},\ldots,\xi_{\sigma^{-1}(n)}),\ (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\in C^n,$$
$$\sigma\in S_n.$$

wreath product $C_r\wr S_n$ とはこの作用から得られる半直積群のことである [11, 15]. この群を $G(r,1,n)=C_r\wr S_n$ と書き複素鏡映群という．この節では, $G=G(r,1,n)$ とその部分群 $H=G(1,1,n)=S_n$ を考える．

まずは両側剰余類の記述から述べよう．

**Proposition 3.1.** *(1)* 両側剰余類の代表系 $\mathcal{D}_{r,n}$ は次で与えられる．

$$\mathcal{D}_{r,n}=\{(\underbrace{1,\cdots,1}_{\ell_0},\underbrace{\xi,\cdots,\xi}_{\ell_1},\cdots,\underbrace{\xi^{r-1},\cdots,\xi^{r-1}}_{\ell_{r-1}};1)\in G;\ \sum_{i=0}^{r-1}\ell_i=n\}.$$

*(2)* 代表系の個数は

$$|H\backslash G/H|=\binom{n+r-1}{n}$$

である．

群 $G$ は $n$-変数の多項式の空間に

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n;\sigma)f(x_1,\cdots,x_n)=f(\xi_{\sigma(1)}^{-1}x_{\sigma(1)},\xi_{\sigma(2)}^{-1}x_{\sigma(2)},\cdots,\xi_{\sigma(n)}^{-1}x_{\sigma(n)})$$

のように作用する．以下この作用を用いて誘導表現の既約分解の実現を考えよう．$\mathbb{N}_0^r$ から分割数全体 $Par$ への写像を,

$$\psi:\mathbb{N}_0^r\ni(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})\mapsto(0^{k_0}1^{k_1}\cdots(r-1)^{k_{r-1}})\in Par$$

で定義する．ここで, $k_i$ は分割 $\lambda=\psi(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})$ の $i$-part の個数である．この写像を用いて次の定理を得る．

**Proposition 3.2.** 誘導表現 $1_{S_n}^{G(r,1,n)}$ は,

$$1_{S_n}^{G(r,1,n)}\cong\bigoplus_{\sum_{i=0}^{r-1}k_i=n}V^{(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})}$$

と分解する．ここで各 $V^{(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})}$ は既約な $G(r,1,n)$-加群であり次のように定義される;

$$V^{(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})}=\bigoplus_{f\in M_n\left(\psi(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})\right)}\mathbb{C}f.$$

ここで, $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ に対して,

$$M_n(\lambda)=\{x_{\sigma(1)}^{\lambda_1}x_{\sigma(2)}^{\lambda_2}\cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n};\sigma\in S_n\}$$

である.

この分解に現れる既約成分は複素鏡映群の Specht 加群の内 "横一本" からなる分割の組でパラメトライズされるもの全てである. さらに, これは特に無重複である, 因って次が言えたことになる.

**Proposition 3.3.** $(G,H)$ は *Gelfand* ペア.

**Example 3.4.** $G=G(3,1,3)$ and $H=S_3$ として例を見てみよう. 誘導表現 $1_H^G$ は次のように分解する:

$$\begin{aligned}1_H^G=&V^{(3,0,0)}\oplus V^{(0,3,0)}\oplus V^{(0,0,3)}\oplus V^{(2,1,0)}\oplus V^{(2,0,1)}\\ &\oplus V^{(1,2,0)}\oplus V^{(1,0,2)}\oplus V^{(0,2,1)}\oplus V^{(0,1,2)}\oplus V^{(1,1,1)}\end{aligned}$$

幾つかの既約成分を書き下してみよう:

$$V^{(0,1,2)}=\mathbb{C}x_1^2x_2^2x_3\oplus\mathbb{C}x_1^2x_3^2x_2\oplus\mathbb{C}x_2^2x_3^2x_1,\quad V^{(0,3,0)}=\mathbb{C}x_1x_2x_3.$$

これをみていると 例えば $S_3$ 不変な $V^{(0,2,1)}$ の部分空間は

$$\mathbb{C}(x_1^2x_2^2x_3+x_1^2x_3^2x_2+x_2^2x_3^2x_1)$$

で有ることがわかる. これは単項式対称多項式と呼ばれる 3 次の対称多項式である.

これより下で, $1_H^G$ に現れる各既約成分上の $G(r,1,n)$-不変内積を定義し帯球関数を考えることにしよう.

各既約成分 $V^{(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})}$ 上の内積を

$$[\alpha x^\lambda|\beta x^\mu]=\alpha\overline{\beta}\delta_{\lambda,\mu}\frac{1}{\binom{n}{k_0,k_1,\ldots,k_{r-1}}}$$

で定義する. ここで $\alpha$ と $\beta$ は複素数である, $k_i$ は $\lambda$ のなかで $i$ に等しい成分の数, そして $x^\lambda=x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_2}$ とする. この内積は $G(r,1,n)$-不変であることがすぐわかる, つまり, $g\in G(r,1,n)$, $f_1(x),f_2(x)\in V^{(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})}$ に対して

$$[(gf_1)(x)|(gf_2)(x)]=[f_1(x)|f_2(x)]$$

である. ここで改めて単項式対称多項式を定義しておこう.

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2.\cdots)=(0^{k_0}1^{k_1}2^{k_2}\cdots(r-1)^{k_{r-1}})$$

, に対して 単項式対称多項式とは,

$$m_\lambda(x) = \frac{1}{k_0!k_1!\cdots k_n!}\sum_{\sigma\in S_n} x^{\lambda_1}_{\sigma(1)}x^{\lambda_2}_{\sigma(2)}\cdots x^{\lambda_n}_{\sigma(n)}$$
$$= \sum_{I_n^{k_0k_1\cdots k_{r-1}}} x^0_{i_1^{(0)}}\cdots x^0_{i_{k_0}^{(0)}}x^1_{i_1^{(1)}}\cdots x^1_{i_{k_1}^{(1)}}\cdots x^{r-1}_{i_1^{(r-1)}}\cdots x^{r-1}_{i_{k_{r-1}}^{(r-1)}}.$$

で定義される対称多項式である. ここで, $I_n^{k_j} = \{i_1^{(j)}\cdots i_{k_j}^{(j)}; 1\le i_1^{(j)} < \cdots < i_{k_j}^{(j)} \le n\}$ に対して $I_n^{k_0k_1\cdots k_{r-1}} = \{i^{(0)},\cdots,i^{(r-1)}; i^{(j)}\in I_n^{k_j}, \cup_{i=0}^{r-1} i^{(j)} = \{1,2,\cdots,n\}\}$ である. 明らかに monomial symmetric polyomial は

$$[m_\lambda(x)|m_\mu(x)] = \delta_{\lambda\mu}$$

を満たす. $g = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n;\sigma)\in G$ と置いて次のように計算する:

$$[m_\lambda(x)|(gm_\lambda)(x)] = [m_\lambda(x)|m_\lambda(\xi^{-1}_{\sigma(1)}x_{\sigma(1)},\xi^{-1}_{\sigma(2)}x_{\sigma(2)},\cdots,\xi^{-1}_{\sigma(n)}x_{\sigma(n)})]$$
$$= \frac{[x^\lambda|x^\lambda]}{k_0!k_1!\cdots k_n!}\sum_{\sigma\in S_n}\xi^{\lambda_1}_{\sigma(1)}\xi^{\lambda_2}_{\sigma(2)}\cdots,\xi^{\lambda_n}_{\sigma(n)}$$
$$= m_\lambda(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)/m_\lambda(1,\cdots,1).$$

これで $(G,H)$ の帯球関数の対称多項式による表示が得られた.

**Theorem 3.5.** *Gelfand ペア (G,H) の帯球関数は*

$$\omega^{(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n;\sigma) = m_\lambda(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)/m_\lambda(1,\cdots,1)$$

で得られる. ここで $\lambda = (0^{k_0}1^{k_1}2^{k_2}\cdots(r-1)^{k_{r-1}})$ そして $\sum_{i=0}^{r-1}k_i = n$ である.

# 4 帯球関数と Aomoto-Gelfand の超幾何関数

この節での目的は前節の帯球関数を各両側剰余類上で評価し超幾何関数で表示することである.

そのために必要な記号を用意しよう.

$$\frac{1}{(n-m)!} = (-1)^m\frac{(-n)_m}{n!},$$

ここで $(x)_m$ は shifted factorial である, つまり, $x$ を不定元として $m>0$ ならば,

$$(x)_m = x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)$$

そして $m=0$ ならば,

$$(x)_0 = 1$$

である. 以下ではもし $n-m$ が負の整数ならば $\frac{1}{(n-m)!}=0$ であることに注意しよう. $m, m_i(1\le i\le k-1)\in\mathbb{N}_0$ にたいして

$$\binom{x}{m}=(-1)^m\frac{(-x)_m}{m!}$$

かつ

$$\binom{x}{m_1,\cdots,m_{k-1},x-\sum_{i=1}^{k-1}m_i}=(-1)^{\sum_{i=1}^{k-1}m_i}\frac{(-x)_{\sum_{i=1}^{k-1}m_i}}{\prod_{i=1}^{k-1}m_i!}$$

と定義する. 定義からすぐわかることは $n\in\mathbb{Z}$ にたいして,

$$(n)_{s-t}=\frac{(n)_s}{(-n-s+1)_t}(-1)^t$$

である.

青本和彦氏と Gelfand によって研究された Gauss の超幾何関数を多変数化した超幾何関数をここで定義する.

<u>Aomoto-Gelfand の超幾何関数</u> [3, 9, 10, 12, 13, 20]

これは, $(n+1,m+1)$-*hypergeometric functions* とも呼ばれる.

$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_{m-n-1})\in\mathbb{C}^{m-n-1}$ そして $X=(x_{ij})_{\substack{1\le i\le n,\\1\le j\le m-n-1}}$.

$$F(\alpha,\beta;\gamma;X)=\sum_{(a_{ij})\in M_{n,m-n-1}(\mathbb{N}_0)}\frac{\prod_{i=1}^n(\alpha_i)_{\sum_{j=1}^{m-n-1}a_{ij}}\prod_{i=1}^{m-n-1}(\beta_i)_{\sum_{j=1}^n a_{ji}}}{(\gamma)_{\sum_{i,j}a_{ij}}}\frac{\prod x_{ij}^{a_{ij}}}{\prod a_{ij}!}.$$

さて, これからの目的は前節の最後で求めた帯球関数を式変形し, この Aomoto-Gelfand の超幾何関数で表示することである. 前節同様 $\lambda=(0^{k_0}1^{k_1}\cdots(r-1)^{k_{r-1}})$ と仮定する.

$$m_{(\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_{r-1})}^{(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})}=m_\lambda(\underbrace{1,\cdots,1}_{\ell_0},\underbrace{\xi,\cdots,\xi}_{\ell_1},\cdots,\underbrace{\xi^{r-1},\cdots,\xi^{r-1}}_{\ell_{r-1}})$$

と定義する. 同様に,

$$\omega_{(\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_{r-1})}^{(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})}=\frac{1}{\binom{n}{k_0,k_1,\cdots,k_{r-1}}}m_{(\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_{r-1})}^{(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})}$$

と置く.

**Proposition 4.1.** $\ell_0+\ell_1+\cdots+\ell_{r-1}=k_0+k_1+\cdots+k_{r-1}=n$ としたとき.

$$m^{(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})}_{(\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_{r-1})} = \sum_{a\in\mathcal{A}}\prod_{i=0}^{r-1}\binom{\ell_i}{a_{i0},a_{i1},\cdots,a_{ir-1}}\xi^{\sum_{0\le i,j\le r-1} ija_{i,j}},$$

ここで,

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}^{(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})}_{(\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_{r-1})} = \left\{a=(a_{ij})\in M(r,\mathbb{N}_0);\ \sum_{i=0}^{r-1}a_{ij}=k_j,\ \sum_{j=0}^{r-1}a_{ij}=\ell_i\right\}.$$

*(2)* 母関数は

$$\sum_{k_0+\cdots+k_{r-1}=n} m^{(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})}_{(\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_{r-1})} t_0^{k_0}t_1^{k_1}\cdots t_{r-1}^{k_{r-1}} = \prod_{i=0}^{r-1}\Big(\sum_{j=0}^{r-1}\xi^{ij}t_j\Big)^{\ell_i}$$

で与えられる.

ここに出てきた $\mathcal{A}$ の元は一般化された魔方陣と呼ばれており, $\mathcal{A}$ の濃度は, 対称群をそのある 2 つの Young 部分群で割った時の濃度と一致する [11].

**Example 4.2.** $r=3$ and $n=4$ で例を見てみよう. $(k_0,k_1,k_2)=(1,1,2)$ そして $(\ell_0,\ell_1,\ell_2)=(1,2,1)$ の場合. 直接計算では,

$$\begin{aligned}\omega^{(1,1,2)}_{(1,2,1)} &= \frac{1}{12}m_{2^21^1}(1,\xi,\xi,\xi^2)\\ &= \frac{1}{12}(2\xi^3+3\xi^4+2\xi^5+3\xi^6+2\xi^7) = -\frac{1}{4}\xi^2.\end{aligned}$$

それで, 命題から

$$\mathcal{A}^{(1,1,2)}_{(1,2,1)} = \left\{\begin{pmatrix}1&&\\&&2\\&1&\end{pmatrix},\begin{pmatrix}&&1\\1&1&\\&&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}&&1\\1&&1\\&1&\end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix}&1&\\1&&1\\&&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}&&1\\&1&1\\1&&\end{pmatrix},\begin{pmatrix}&1&\\&&2\\1&&\end{pmatrix}\right\}$$

であり, これより

$$\begin{aligned}\omega^{(1,1,2)}_{(1,2,1)} = \frac{1}{12}m^{(1,1,2)}_{(1,2,1)} &= \frac{1}{12}(\xi^6+2\xi^5+2\xi^7+2\xi^4+2\xi^6+2\xi^3+\xi^4)\\ &= \frac{1}{12}(2\xi^3+3\xi^4+2\xi^5+3\xi^6+2\xi^7) = -\frac{1}{4}\xi^2\end{aligned}$$

と言う風に計算できる.

そしてここから計算の詳しいことは [16] に譲って, 最終的に次の定理を得る.

**Theorem 4.3.** *Gelfand* ペア $(G(r,1,n),S_n)$ の帯球関数は *Aomoto-Gelfand* の超幾何関数で次のように表示される.

$$\omega_{(\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_{r-1})}^{(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})}=F((-\ell_1,\cdots,-\ell_{r-1}),(-k_1,\cdots,-k_{r-1});-n;\tilde{\Xi}_r).$$

ここで $\tilde{\Xi}_r=(1-\xi^{ij})_{1\le i,j\le r-1}$ である.

さらに Proposition 2.4 の直交性をこのケースの場合に書き下してみる.

**Theorem 4.4.** $k=(k_0,k_1,\cdots,k_{r-1})$ が $\sum_{i=0}^{r-1}k_i=n$ を満たすとき,

$$\frac{1}{r^n}\sum_{\ell\in\mathcal{D}_{r,n}}\binom{n}{\ell_0,\cdots,\ell_{r-1}}F(-\tilde{\ell},-\tilde{k};-n;\tilde{\Xi})\overline{F(-\tilde{\ell},-\tilde{k'};-n;\tilde{\Xi})}$$
$$=\binom{n}{k_0,\cdots,k_{r-1}}^{-1}\prod_{i=0}^{r-1}\delta_{k_ik'_i}$$

である. ここで $\ell=(\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_{r-1})$ に対して $\tilde{\ell}=(\ell_1,\cdots,\ell_{r-1})$ と置いた.

この直交性を見ればこれが多変数の直交多項式であることがわかるであろう. とくに冒頭で紹介した Vere-Jones の結果は $r=2$ の場合である. このような群の一般化で多変数の直交多項式は出てくる. しかし, この結果ではまだ Dunkl-Ramirez の結果は含まれていない, そこでもう一つの例をみてみよう.

$G$ を 2 面体群つまり, $G=D_r=\langle a,b|a^2=b^r=(ab)^2=1\rangle$, $H=\langle a\rangle$ とする. そして,

$$D(r,n)=D_r\wr S_n$$

とおく. このときその部分群として,

$$D(2,n)=\langle a\rangle\wr S_n$$

と置く. すると, $(D(r,n),D(2,n))$ はやはり Gelfand ペアであり, $(G(r,1,n),S_n)$ とほぼ同様の計算によって次のことがわかる [1].

**Theorem 4.5.**

$$\omega_{(\ell_0,\ell_1,\ldots,\ell_m)}^{(k_0,k_1,\ldots,k_m)}=F\big((-\ell_1,\ldots,-\ell_m),(-k_1,\ldots,-k_m);-n;(1-\cos(2\pi ij/r))_{1\le i,j\le m}\big)$$

やはり Aomoto-Gelfand の超幾何関数でかけているのである. また直交性は次のようになる.

**Theorem 4.6.** $m=[r/2]$ とおく. $k=(k_0,\cdots,k_m)$, $k'=(k'_0,\cdots,k'_m)$ そして, $\ell=(\ell_0,\cdots,\ell_m)$ を $\mathbb{N}_0^{m+1}$ の元で, $k_0+\cdots+k_m=k'_0+\cdots+k'_m=\ell_0+\cdots+\ell_m=n$ を満たすものとする. $\tilde{\ell}=(\ell_1,\cdots,\ell_m)$ *for* $\ell=(\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_m)$ *and* $\tilde{\Theta}_r=(1-\cos(2\pi ij/r))_{1\le i,j\le m}$ とおくと,

*(1)* $r$ が奇数の時,

$$\frac{1}{r^n}\sum_{\ell_0+\cdots+\ell_m=n} 2^{n-\ell_0}\binom{n}{\ell_0,\cdots,\ell_m}F(-\tilde{\ell},-\tilde{k};-n;\tilde{\Theta}_r)F(-\tilde{\ell},-\tilde{k'};-n;\tilde{\Theta}_r)$$
$$= 2^{-n+k_0}\binom{n}{k_0,\cdots,k_m}^{-1}\delta_{kk'}.$$

*(2)* $r$ が偶数の時,

$$\frac{1}{r^n}\sum_{\ell_0+\cdots+\ell_m=n} 2^{n-\ell_0-\ell_m}\binom{n}{\ell_0,\cdots,\ell_m}F(-\tilde{\ell},-\tilde{k};-n;\tilde{\Theta}_r)F(-\tilde{\ell},-\tilde{k'};-n;\tilde{\Theta}_r)$$
$$= 2^{-n+k_0+k_m}\binom{n}{k_0,\cdots,k_m}^{-1}\delta_{kk'}.$$

これと, 複素鏡映群の結果を見ていると, 次のことがわかる.

・$G=\mathbb{Z}/r\mathbb{Z},\ H=\{1\}$ のとき, $(G,H)$ は Gelfand ペアであり, その帯球関数のテーブルは $Z(G,H)=(\exp 2\pi\sqrt{-1}ij/r)_{1\le i,j\le r-1}$ で与えられる.

・$G=D_r=\langle a,b|a^2=b^r=(ab)^2=1\rangle,\ H=\langle a\rangle$ のとき $(G,H)$ は Gelfand ペアであり, その帯球関数のテーブルはまた, $Z(G,H)=(\cos 2\pi ij/r)_{0\le i,j\le m}$ で与えられる.

つまり, 環積の Gelfand ペアの帯球関数は環積を取る前の帯球関数の表を Aomoto-Gelfand の超幾何関数に代入したものなのである. さて, これをヒントに次のことがわかる.

いま, $(G,H)$ を Gelfand pair とする. そして $H$ の恒等表現を $G$ に持ち上げたとき, 次のように分解しているとする.

$$1_H^G\sim\bigoplus_{i=0}^{s-1}V_i\ \ \dim V_i=n_i$$

ここで $s=|H\backslash G/H|$ である. $H\backslash G/H$ の完全代表系を $\{g_0,g_1,\cdots,g_{s-1}\}$ とおき, $d_i=|Hg_iH|$ とおく. さらに $(G,H)$ の帯球関数の表を $Z(G,H)$ とおく.
このとき, $(G\wr S_n,H\wr S_n)$ も Gelfand pair であり, $H\wr S_n\backslash G\wr S_n/H\wr S_n$ は集合

$$L=\{(\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_{s-1});\sum_{i=0}^{s-1}=n\}$$

と一対一の関係がある. $H \wr S_n \backslash G \wr S_n / H \wr S_n$ の完全代表系を $\{g_\ell; \ell \in L\}$ としたとき,

$$|Hg_\ell H| = d_0^{\ell_0} d_1^{\ell_1} \cdots d_{s-1}^{\ell_{s-1}} \binom{n}{\ell_0, \cdots, \ell_{s-1}} n!$$

である. また $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(0 \leq i \leq s-1)$ としたら, 誘導表現の分解は,

$$1_{H \wr S_n}^{G \wr S_n} \sim \bigoplus_{k_0 + \cdots + k_{s-1} = n} V(k_0, \cdots, k_{s-1}).$$

と書くことが出来る. ここで, $V(k_0, \cdots, k_{s-1})$ は次元が $n_0^{k_0} n_1^{k_1} \cdots n_{s-1}^{k_{s-1}} \binom{n}{k_0, \cdots, k_{s-1}}$ の既約な $G \wr S_n$ 加群である. これに関して次のような定理を得るのである.

**Theorem 4.7.** $(G \wr S_n, H \wr S_n)$ の帯球関数は *Aomoto-Gelfand* の超幾何関数を用いて

$$\omega_{(\ell_0, \ell_1, \cdots, \ell_{s-1})}^{(k_0, k_1, \cdots, k_{s-1})} = F((-\ell_1, \cdots, -\ell_{s-1}), (-k_1, \cdots, -k_{s-1}); -n; J_s^{\sim} - Z(G, H)^{\sim})$$

と書ける. ここで, $J_s$ は要素が全て *1* の行列, $A^{\sim}$ は行列 $A$ から *0* 行 *0* 列を取り除いた行列である. また, 直交性は,

$$\frac{1}{|G|^n} \sum_{\ell_0 + \cdots + \ell_m = n} d_0^{\ell_0} d_1^{\ell_1} \cdots d_{s-1}^{\ell_{s-1}} \binom{n}{\ell_0, \cdots, \ell_{s-1}} F(-\tilde{\ell}, -\tilde{k}; -n; Z) F(-\tilde{\ell}, -\tilde{k'}; -n; \overline{Z})$$
$$= n_0^{-k_0} n_1^{-k_1} \cdots n_{s-1}^{-k_{s-1}} \binom{n}{k_0, \cdots, k_{s-1}}^{-1} \delta_{kk'}.$$

ここで $\ell = (\ell_1, \cdot, \ell_{s-1}), \cdots, Z = J_s^{\sim} - Z(G, H)^{\sim}$ とした.

さて, 最後に Dunkl-Ramirez の場合がこれに含まれることを確認しておこう:

$$1_{S_{q-1}}^{S_q} = S(q) \oplus S(q-1, 1).$$

ここで $S(*)$ は分割 $*$ に対応する Specht 加群である. もちろん, $n_0 = \dim S(q) = 1$, $n_1 = \dim S(q-1, 1) = q-1$ である. この分解は無重複なので $(S_q, S_{q-1})$ は Gelfand ペアである. $S_{q-1} \backslash S_q / S_{q-1} = \{1, (q-1, q)\}$ であり, $|S_{q-1} 1 S_{q-1}| = (q-1)!$, $|S_{q-1}(q-1, q) S_{q-1}| = (q-1)!(q-1)$ である, ただし, ここで $S_{q-1}$ は $S_q$ を $\{1, 2, 3, \cdots, q\}$ 上の置換群したとき, $q$ の固定群とみている. そして帯球関数のテーブルは

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{q-1} \end{pmatrix}$$

で与えられることが確かめられる. これらのデータを上の定理に代入すればDunkl-Ramirez の結果が導出される.

つまり, Dunkl-Ramirez が Gauss の超幾何関数でかけているのは, 誘導表現 $1_{S_{q-1}}^{S_q}$ の既約成分の数が 2 個であることに従っているのである.

## 参考文献

[1] H. Akazawa and H. Mizukawa, *Orthogonal polynomials arising from the wreath products of dihedral group,* Preprint, 2002.

[2] E. Andrews, R. Askey and R. Roy *Special Functions,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge, 1999

[3] K. Aomoto and M. Kita *Theory of Hypergeometric Functions(in Japanese),* Springer Tokyo, 1994

[4] S. Ariki, T. Terasoma and H. -F. Yamada, Higher Specht polynomials, Hiroshima Math. J. 27 (1997), no. 1, 177-188.

[5] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I. Association Schemes,* The Benjamin/Cummings Publishing Co. CA, 1984

[6] C. Dunkl, A Krawtchouk polynomial addition theorem and wreath products of symmetric groups, Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), no. 4, 335-358.

[7] C. Dunkl, Cube group invariant spherical harmonics and Krawtchouk polynomials, Math. Z. 177 (1981), no. 4, 561-57

[8] C. Dunkl and Y. Xu, *Orthogonal Polynomials of Several Variables,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 81. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[9] I. M. Gelfand, General theory of hypergeometric functions (in Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 288 (1986), no. 1, 14-18.

[10] I. M. Gelfand and S. I. Gelfand, Generalized hypergeometric equations (in Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 288 (1986), no. 2, 279-283

[11] G. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 16, 1981.

[12] M. Kita, On hypergeometric functions in several variables. II. The Wronskian of the hypergeometric functions of type $(n+1, m+1)$, J. Math. Soc. Japan 45 (1993), no. 4, 645-669.

[13] M. Kita and M. Ito, On the rank of the hypergeometric system $E(n+1, m+1; \alpha)$, Kyushu J. Math. 50 (1996), no. 2, 285-295.

[14] D. Leonard, *Orthogonal polynomials, duality and association schemes,* SIAM J. Math. Anal. 13 (1982), no. 4, 656-663.

[15] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd. ed.* , Oxford, 1995.

[16] H. Mizukawa, *Zonal spherical functions on the complex reflection groups and* $(n+1, m+1)$*-hypergeometric functions,* to appear in Adv. Math.

[17] D. Stanton, Some $q$-Krawtchouk polynomials on Chevalley groups, Amer. J. Math. 102, 625-662 (1980), no. 4

[18] D. Stanton, Three addition theorems for some $q$-Krawtchouk polynomials, Geom. Dedicata 10 (1981), no. 1-4, 403-425

[19] D. Vere-Jones, *D. Finite bivariate distributions and semigroups of non-negative matrices.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 22 1971 247-270.

[20] M. Yoshida, *Hypergeometric Functions, My Love. Modular Interpretations of Configuration Spaces.* Aspects of Mathematics, E32. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1997.