数理解析研究所講究録 1311 巻 2003 年 59-71

平面液体シートの安定性に及ぼす粘性及び表面張力の温度依存性の影響

阪大・基礎工　吉田拓也 (Takuya YOSHIDA)
阪大・基礎工　吉永隆夫 (Takao YOSHINAGA)
Faculty of Engineering Science, Osaka University

1 はじめに

液体と気体の界面に働く表面張力が静止界面にわたって一様な場合界面の平衡状態が保たれる. しかし, 液体の濃度や温度が局所的に異なるような場合, 界面での表面張力は非一様になり, それが駆動源となり局所的な流れが発生する. このような現象はマランゴニ効果として知られるが, 特に温度変化により引き起こされるこの現象を温度マランゴニまたは thermocapillary 効果と呼ぶ. このような現象は, 表面張力がその挙動に重要な役割を果たす自由表面を持つ液体シートにおいて顕著に現われる. 例えば, シート面内厚み方向に温度勾配が存在する場合, 表面での熱伝達のため表面の変形に応じて温度分布がシート面に生じる. 一般に液体の表面張力は温度の関数であるため, 表面張力は表面で非一様になり, その結果上述のマランゴニ効果により適当な条件下では不安定が起こり, 最終的にシートの破断へと至る [1].

ところで, 両面が自由表面の液体平面シートを伝搬する微小攪乱のモードは, 対称モードと反対称モードがあることが知られている. 対称モードとは中心面は一定のままで厚みだけが変動し (図 1 参照), 反対称モードでは厚み一定のままで中心面が変動する (図 3 参照). このような液体シートの両面間で温度差のある場合, 界面の変形や変動を考慮した解析がこれまでに行われている. Funada [2] は対称モードに対する定常状態での線形中立安定性やシート形状を調べた. Orozco [3] はシート周囲の流体の運動を考慮した線形非定常解析により, シート面での熱伝達を考慮しない場合の両モードに対する粘性, 表面張力及び空気力学的不安定の影響を調べた. 一方, Yoshinaga と Uchiyama [4] は非線形解析により, 十分小さなプラントル数に対して長波近似の下で対称モードの時間発展を調べている.

表面張力同様, 液体の粘性も一般に温度に依存することが知られているが, 先に

示した液体シートに関する解析では粘性の温度依存性は考慮されていない. 例えば水の場合, 温度1K当たりの表面張力及び粘性の変化率は, それぞれ約 2×10^{-3}, 14×10^{-3} となることからもわかるように, 粘性の温度依存性は表面張力以上に大きい.

そこで本研究では, 表面張力に加え粘性の温度依存性も考慮にいれた液膜の安定性解析を対称, 反対称両モードに対して調べている. 解析では長波近似により得られたシートの発展方程式程式を調べることにより, 対称モードに対してはシート両面間での温度差が臨界値を超えると線形不安定になるのに対し, 反対称モードの場合, 線形では安定であるが非線形では不安定となることを示す. そして, 粘性の温度依存性は対称モードに対しては表面張力による不安定性をおさえるのに対し, 反対称モードではそのような不安定性をより増大するように作用することを明らかにする.

2 対称モード

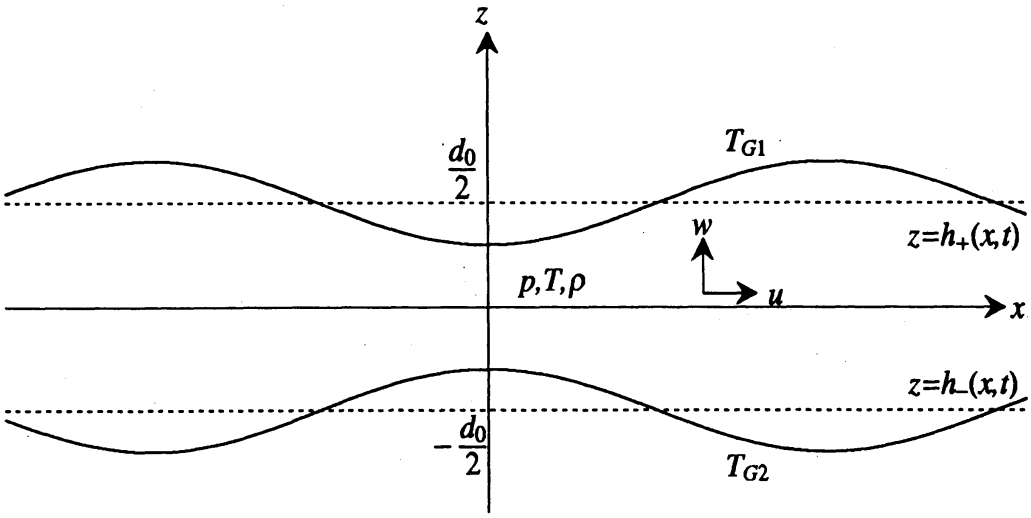


図1. 対称モード.

図1に示すように, $x-z$ 座標系で撹乱のない平衡状態でのシート厚みを d_0, シート界面をそれぞれ $z=h_\pm$, 両界面周囲の温度をそれぞれ T_{G1}, T_{G2}, またシート内の密度, 温度, 圧力をそれぞれ ρ, T, p, さらに x, z 方向の速度を u, w とする. また, シート液体の密度は一定とし, 重力及び周囲の流体の運動は考えないものとする.

液体の表面張力 σ 及び粘性 μ が, 次のような温度の線形減少関数として与えられると仮定する:

$$\sigma = \sigma_0 - \gamma(T - T_0), \tag{1}$$

$$\mu = \mu_0 - \delta(T - T_0). \tag{2}$$

ただし, T_0 を平均温度 $(=[T_{G1}+T_{G2}]/2)$, σ_0 を平均温度における表面張力, $\gamma = \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}T$ を表面張力の温度勾配 (>0), μ_0 を平均温度における粘性, $\delta = \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}T$ を粘性の温度勾配 (>0) とする.

平衡状態での厚み d_0 と温度 T_0 での動粘性係数 $\nu_0(=\mu_0/\rho)$ を代表量として, x, z, h は d_0 で, t は d_0^2/ν_0 で, u, w は ν_0/d_0 で, p は $\rho\nu_0^2/d_0$ で, T は T_0 で無次元化する. このとき, 式 (1), (2) は以下のように表わされる:

$$\Sigma = \mathrm{S} - \mathrm{M}(\Theta - 1), \tag{3}$$

$$\Gamma = 1 - \mathrm{G}(\Theta - 1). \tag{4}$$

ただし, 無次元された温度 $\Theta = T/T_0$, 表面張力 $\Sigma = \sigma d_0/\rho\nu_0^2$, 粘性 $\Gamma = \mu/\mu_0$, 無次元パラメータとしてキャピラリー数 $\mathrm{S} = \sigma_0 d_0/\rho\nu_0^2$, マランゴニ数 $\mathrm{M} = \gamma T_0 d_0/\rho\nu_0^2$ 及び粘性の温度勾配 $\mathrm{G} = \delta T_0/\mu_0$ が導入されている.

2.1 支配方程式

前述の代表量を用いて無次元化した方程式を以下に示す;

ナヴィエストークス方程式:

$$\begin{aligned} & u_t + uu_x + wu_z \\ = \; & -p_x + \Gamma(u_{xx}+u_{zz}) - 2\,\mathrm{G}\,\Theta_x u_x - \mathrm{G}\,\Theta_z(u_z + w_x), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} & w_t + uw_x + ww_z \\ = \; & -p_z + \Gamma(w_{xx}+w_{zz}) - 2\,\mathrm{G}\,\Theta_z w_z - \mathrm{G}\,\Theta_x(u_z + w_x), \end{aligned} \tag{6}$$

連続の式:

$$u_x + w_z = 0, \tag{7}$$

エネルギー方程式:

$$\Theta_{xx} + \Theta_{zz} = \mathrm{Pr}(\Theta_t + u\Theta_x + w\Theta_z). \tag{8}$$

一方, シート界面 $z = h_\pm$ における境界条件は以下で与えられる;

運動学的条件:

$$h_{\pm t} + uh_{\pm x} - w = 0 \qquad \text{at} \quad z = h_\pm, \tag{9}$$

熱流束の保存 (ニュートンの冷却則):

$$\Theta_z - \Theta_x h_{+x} + \mathrm{Bi}(1+h_{+x}^2)^{\frac{1}{2}}(\Theta - \Theta_{G1}) = 0 \qquad \text{at} \quad z = h_+, \tag{10}$$

$$\Theta_z - \Theta_x h_{-x} - \mathrm{Bi}(1+h_{-x}^2)^{\frac{1}{2}}(\Theta - \Theta_{G2}) = 0 \qquad \text{at} \quad z = h_-, \tag{11}$$

接線, 法線方向の応力連続の式:

$$
\begin{aligned}
& 2\Gamma h_{\pm x}(w_z - u_x) + \Gamma(1 - h_{\pm x}^2)(w_x + u_z) \\
= \;& \mp \mathrm{M}(1 + h_{\pm x}^2)^{\frac{1}{2}}(\Theta_x + h_{\pm x}\Theta_z) \quad \text{at} \quad z = h_\pm, \qquad (12) \\
& -p + 2\Gamma(1 + h_{\pm x}^2)^{-1}[(1 - h_{\pm x}^2)w_z - h_{\pm x}(u_z + w_x)] \\
= \;& \pm\Sigma h_{\pm xx}(1 + h_{\pm x}^2)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{at} \quad z = h_\pm. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

ただし, 比熱 c, 熱伝導率 λ, 熱伝達率 α を用いて, 無次元パラメータとしてプラントル数 $\mathrm{Pr} = \rho c \nu_0/\lambda$, ビオ数 $\mathrm{Bi} = \alpha d_0/\lambda$ が導入されている.

2.2 スケーリング (対称モード)

粘性及び温度差のないシートに, 波数 $k(=2\pi$ /波長), 角振動数 ω の攪乱が与えられた時, 対称モードに対して次の線形分散関係が知られている:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}\tanh\frac{kd_0}{2}}. \qquad (14)$$

この分散関係から, 長波長攪乱 ($k \ll 1$) に対して ω は,

$$\omega \sim \sqrt{\frac{\sigma d_0}{2\rho}}k^2(1 - \frac{k^2 d_0^2}{24} + \cdots), \qquad (15)$$

と近似できるので, 攪乱成分は,

$$\exp[\mathrm{i}(kx - \omega t)] \sim \exp[\mathrm{i}(kx - \sqrt{\frac{\sigma d_0}{2\rho}}k^2 t)], \qquad (16)$$

と表すことができる.

今, $k \sim \epsilon$(=厚み/波長)$\ll 1$ とすると, 位相 $kx - \omega t$ が $O(1)$ 程度の大きさを持つためには (16) より

$$x \sim k^{-1} \sim \epsilon^{-1}, \quad t \sim \omega^{-1} \sim \epsilon^{-2}, \qquad (17)$$

と見積もることができるので, 以下のような独立変数のスケール変換を導入する:

$$\xi = \epsilon x, \quad \zeta = z, \quad \tau = \epsilon^2 t. \qquad (18)$$

同様に, 運動方程式の慣性項と圧力項の釣り合い, 及び連続の式を考慮することにより, 以下のような従属変数のスケール変換を導入することができる:

$$U = \epsilon^{-1}u, \quad W = \epsilon^{-2}w, \quad P = \epsilon^{-2}p. \qquad (19)$$

ここで, u の大きさは (15) を用いて $u \sim \omega/k \sim k \sim \epsilon$ と評価できる.

以下では, $U, W, P, \Theta, h_{\pm}$ が ϵ^2 のべきで展開した形で表せるとして,

$$(U, W, P, \Theta, h_{\pm}) = (U_0, W_0, P_0, \Theta_0, \pm\frac{1}{2}) + \epsilon^2(U_1, W_1, P_1, \Theta_1, H_{1\pm}) + \cdots, \qquad (20)$$

とおく. これらを式(5)〜(13)に代入し, それぞれを ϵ のべきで整理し解を求める. このとき, 厚みの変化量 $b = H_{1+} - H_{1-}$, 中心線の変位 $\eta = (H_{1+} + H_{1-})/2$ を導入しておく.

まず, 最低次の近似で得られた解は:

$$\Theta_0 = C_1\zeta + 1, \qquad (21)$$

$$U_0 = W_0 = P_0 = 0. \qquad (22)$$

となる. ただし, C_1 は両面間での温度差 $\Delta\Theta = \Theta_{G1} - \Theta_{G2}$ を用いて $C_1 = \mathrm{Bi}\,\Delta\Theta/(2 + \mathrm{Bi})$ で与えられる. 次に, $O(\epsilon^2)$ の近似から以下のような解を得る:

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= C_3\zeta + C_4, & (23)\\
U_1 &= -\frac{D_5}{\mathrm{G}\,C_1}\ln(1 - \mathrm{G}\,C_1\zeta) + D_6, & (24)\\
W_1 &= -\frac{D_{5\xi}}{\mathrm{G}\,C_1}\left[\frac{1 - \mathrm{G}\,C_1\zeta}{\mathrm{G}\,C_1}\ln(1 - \mathrm{G}\,C_1) + \zeta\right] - D_{6\xi}\zeta + D_7, & (25)\\
P_1 &= -D_{5\xi}\zeta - 2\,\mathrm{G}\,C_1 W_1 + D_8. & (26)
\end{aligned}$$

ただし, 係数 C_3, C_4, D_5, D_7, D_8 は ξ, τ の関数で以下のように与えられる:

$$\begin{aligned}
C_3 &= -\frac{\mathrm{Bi}\,C_1}{2 + \mathrm{Bi}}b, \quad C_4 = -\eta C_1, \quad D_5 = -\frac{\mathrm{M}\,C_1}{2 + \mathrm{Bi}}b_\xi,\\
D_7 &= \frac{1}{2(\mathrm{G}\,C_1)^2}D_{5\xi}\left[(1 + \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\ln(1 + \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2}) + (1 - \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\ln(1 - \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\right] + \eta_\tau,\\
D_8 &= \frac{\mathrm{M}\,C_1}{2}\eta_{\xi\xi} - \frac{\mathrm{S}}{2}b_{\xi\xi} + 2\,\mathrm{G}\,C_1\eta_\tau + \frac{D_{5\xi}}{\mathrm{G}\,C_1}\left[(1 + \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\ln(1 + \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\right.\\
&+ \left.(1 - \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\ln(1 - \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\right] - 2D_{6\xi}.
\end{aligned}$$

一方, D_6 も ξ, τ の関数であるが, 厚みの変化 b を用いて以下のようにかける:

$$D_{6\xi} + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{G}^2 C_1(2 + \mathrm{Bi})}\left[(1 + \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\ln(1 + \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2}) - (1 - \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\ln(1 - \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2}) - \mathrm{G}\,C_1\right]b_{\xi\xi} + b_\tau = 0. \qquad (27)$$

さらに, 厚みの変化 b と中心線の変位 η の間で

$$\eta = \frac{\mathrm{M}\,\Delta\Theta\,\mathrm{Bi}(\mathrm{Bi} + 4)}{4\,\mathrm{S}(2 + \mathrm{Bi})^2}b, \qquad (28)$$

の関係があり, 温度差のために厚みの変化に応じた中心面の変動がおこり, シート形状は対称から非対称に変化することがわかる.

さらに $O(\epsilon^4)$ の近似で以下の式を得る:

$$
\begin{aligned}
& D_{6\tau} - 4D_{6\xi\xi} + \frac{\Delta\Theta(\mathrm{Bi}-2)\,\mathrm{M}}{2(2+\mathrm{Bi})}\eta_{\xi\xi\xi} - \frac{S}{2}b_{\xi\xi\xi} \\
- & \frac{\mathrm{M}\,\Delta\Theta(4\,\mathrm{G}\,\mathrm{Bi}+\mathrm{M}\,\mathrm{Pr})}{2\,\mathrm{G}^3 C_1^2(2+\mathrm{Bi})^2}\Big[(1+\frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})^2\ln(1+\frac{\mathrm{G}\,C_1}{2}) \\
- & (1-\frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})^2\ln(1-\frac{\mathrm{G}\,C_1}{2}) - \mathrm{G}\,C_1\Big]\,b_{\xi\xi\xi} \\
+ & \frac{\mathrm{M}\,\mathrm{Bi}\,\Delta\Theta}{(\mathrm{G}\,C_1)^2(2+\mathrm{Bi})^2}\Big[(1+\frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\ln(1+\frac{\mathrm{G}\,C_1}{2}) - (1-\frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\ln(1-\frac{\mathrm{G}\,C_1}{2}) - \mathrm{G}\,C_1\Big]\,b_{\xi\tau} \\
+ & \frac{\mathrm{M}^2\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Bi}\,\Delta\Theta^2}{2(\mathrm{G}\,C_1)^2(2+\mathrm{Bi})^3}\Big[(1+\frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\ln(1+\frac{\mathrm{G}\,C_1}{2}) + (1-\frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\ln(1-\frac{\mathrm{G}\,C_1}{2})\Big]\,b_{\xi\xi\xi} = 0.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

以上得られた式 (27), (28), (29) は b, η, D_6 に関して線形で閉じている．次節では，簡単のため G が十分小さいとして G の一次まで考慮したこれらの式を用いて撹乱の安定性を調べる．

2.3 線形安定性

まず，撹乱の時間安定性を見るため b, η, D_6 が，

$$\eta,\ b,\ D_6 \propto \exp(\omega\tau + ik\xi), \tag{30}$$

であると仮定する．ただし，ω を複素角振動数 ($\omega = \omega_r + \mathrm{i}\,\omega_i$)，$k$ を実波数とする．(30) を (27),(28),(29) に用いて次のような分散関係を得る:

$$\omega = -2k^2 + k^2\sqrt{4 - 4A_2 + A_1}. \tag{31}$$

ただし，A_1, A_2 はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{\mathrm{S}}{2} + \frac{\mathrm{M}^2\,\mathrm{Bi}(\mathrm{Bi}-2)(\mathrm{Bi}+4)\Delta\Theta^2}{8\,\mathrm{S}(2+\mathrm{Bi})^3} + \frac{\mathrm{M}^2\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Bi}\,\Delta\Theta^2}{12(2+\mathrm{Bi})^3} - \frac{\mathrm{M}\,\mathrm{G}\,C_1\,\mathrm{Bi}\,\Delta\Theta}{6(2+\mathrm{Bi})^2} \qquad (32) \\
A_2 &= \frac{\mathrm{M}\,\mathrm{G}\,C_1\,\mathrm{Bi}\,\Delta\Theta}{24(2+\mathrm{Bi})^2},
\end{aligned}
$$

である．

式 (31) において，$\omega_r = 0$ となるような $\Delta\Theta$ を臨界温度差 $\Delta\Theta_c(\geq 0)$ とすると，

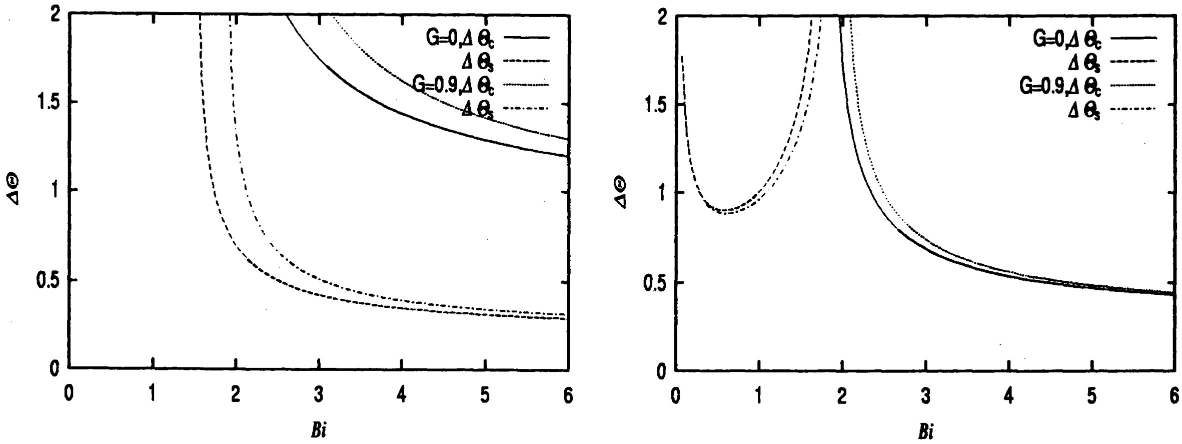
$$\Delta\Theta_c = \frac{2S(2+\mathrm{Bi})\sqrt{3(2+\mathrm{Bi})}}{\sqrt{\mathrm{M}\,\mathrm{Bi}[2\,\mathrm{S}\,\mathrm{M}\,\mathrm{Pr} + 3\,\mathrm{M}(\mathrm{Bi}-2)(\mathrm{Bi}+4) - 8\,\mathrm{S}\,\mathrm{G}\,\mathrm{Bi}]}}, \tag{33}$$

が得られる．一方, 式 (31) で根号内 $4-4A_2+A_1=0$ を境にして, 撹乱が振動的 $(\omega_i \neq 0)$ か非振動的 $(\omega_i = 0)$ かにわかれる．このとき, $\omega_i=0$ となる $\Delta\Theta$ を臨界温度差 $\Delta\Theta_s$ とすると,

$$\Delta\Theta_s = \frac{2(2+\mathrm{Bi})\sqrt{3\,\mathrm{S}(\mathrm{S}-8)(2+\mathrm{Bi})}}{\sqrt{\mathrm{M}\,\mathrm{Bi}[2\,\mathrm{S}\,\mathrm{M}\,\mathrm{Pr}+3\,\mathrm{M}(\mathrm{Bi}-2)(\mathrm{Bi}+4)-8\,\mathrm{S}\,\mathrm{G}\,\mathrm{Bi}]}}. \tag{34}$$

が得られる．ここで, $\Delta\Theta_c \geq \Delta\Theta_s \geq 0$ であり, $\mathrm{S}=8$ で $\Delta\Theta_s=0$ となることを注意しておく．

例として, G=0 と 0.9 に対して Pr=1, M=20 としたときの Bi$-\Delta\Theta$ の関係を, S=8.5 (>8) と S=3.0(<8) の場合について図 2 に示す．



(a) (b)

図 2. $\Delta\Theta_c$ と $\Delta\Theta_s$ の分布; (a)Pr=1,M=20,S=8.5, (b)Pr=1,M=20,S=3.

図 2(a) の場合 (S$>$ 8), $\Delta\Theta < \Delta\Theta_s$ で振動的安定 $(\omega_r < 0, \omega_i \neq 0)$, $\Delta\Theta_s < \Delta\Theta < \Delta\Theta_c$ で非振動的安定 $(\omega_r < 0, \omega_i = 0)$, $\Delta\Theta > \Delta\Theta_c$ で非振動的不安定 $(\omega_r > 0, \omega_i = 0)$ となることを示している．一方, 図 2(b) の場合 (S$<$ 8), Bi$<$ 1.7 に対しては $\Delta\Theta > \Delta\Theta_s$ で振動的安定, $\Delta\Theta < \Delta\Theta_s$ で非振動的安定だが, Bi$>$ 1.7 に対しては, $\Delta\Theta > \Delta\Theta_c$ で非振動的不安定, $\Delta\Theta < \Delta\Theta_c$ で非振動的安定を示す．さらに, $\Delta\Theta_c, \Delta\Theta_s$ のいずれの場合も粘性の温度依存性を考慮すると, $\Delta\Theta_c, \Delta\Theta_s$ が全体に大きくなる．このことは, 粘性の温度依存性が撹乱を安定化させる方向に働くことを示している．

3　反対称モード

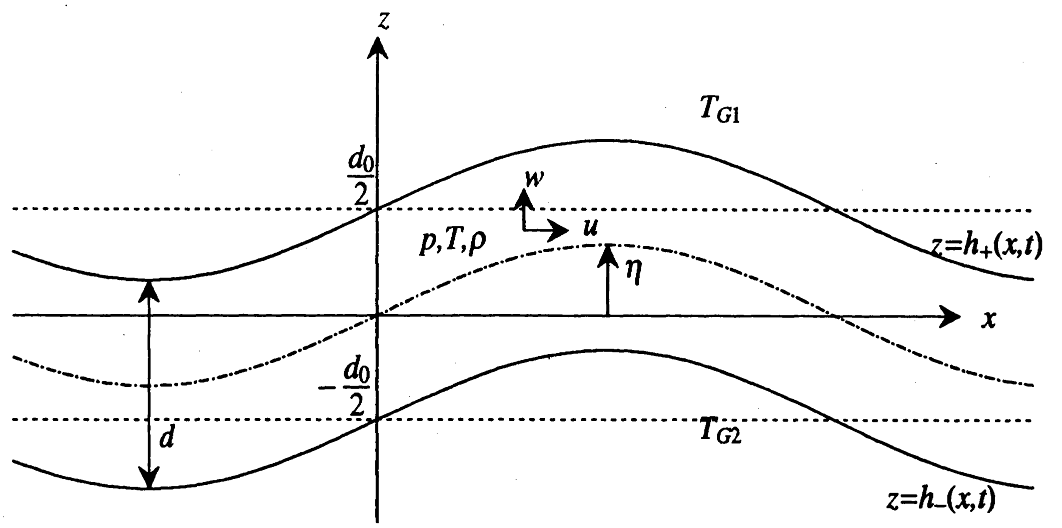


図 3. 反対称モード

図 3 のように座標系及び変数を対称モードの場合と同様に取る. 支配方程式も対称モードと同様であり式 (5)〜(13) を用いる. しかし, 反対称モードの解析では小さな粘性とプラントル数を仮定するので, 式 (5), (6), (8) で形式的に $\Gamma \to \epsilon\Gamma = \epsilon - \epsilon\,\mathrm{G}(\Theta - 1)$, $\mathrm{Pr} \to \epsilon Pr$ と置き換えたものを用いる.

3.1　スケーリング (反対称モード)

対称モードと同様に非粘性で温度差のないシートに $\exp[\mathrm{i}(kx - \omega t)]$ の撹乱が与えられた時, 反対称モードの線形分散関係は,

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}\coth\frac{kd_0}{2}}. \tag{35}$$

長波長 $(k \ll 1)$ の撹乱に対しては, $v_a = \sqrt{2\sigma/\rho d_0}$ として,

$$\omega \sim v_a k(1 + \frac{k^2}{24} + \cdots) \tag{36}$$

と見積もられる. 従って, 撹乱成分は

$$\exp[\mathrm{i}(kx - \omega t)] \sim \exp[\mathrm{i}\,k(x - v_a t) - \mathrm{i}\,\frac{k^3}{24}v_a t], \tag{37}$$

となるので, $k \sim \epsilon$ を仮定すると,

$$(x - v_a t) \sim \epsilon^{-1}, \quad t \sim \epsilon^{-3}. \tag{38}$$

これより，以下のような独立変数のスケール変換が導入される：

$$\xi = \epsilon(x - \sqrt{2S}t), \quad \zeta = z, \quad \tau = \epsilon^3 t. \tag{39}$$

ただし，無次元化して $v_a = \sqrt{2S}$ である．

対称モードの場合と同様に，連続の式及び運動方程式での各項の釣り合いを考慮することにより，従属変数のスケール変換が以下のように与えられる：

$$U = u, \quad W = \epsilon^{-1}w, \quad P = \epsilon^{-2}p. \tag{40}$$

U, W, P, Θ, およびシートの中心面の変位 η, シート厚み d を ϵ^2 のべきで以下のように展開した形で表せるとして：

$$(U, W, P, \Theta, \eta, d) = (U_0, W_0, P_0, \Theta_0, \eta_0, 1) + \epsilon^2(U_1, W_1, P_1, \Theta_1, \eta_1, d_1) + \cdots, \tag{41}$$

また，シート面 $h_\pm$ はシートの中心面 η, シート厚み d を用いて

$$h_\pm = \eta_0 \pm \frac{1}{2} + \epsilon^2(\eta_1 \pm \frac{d_1}{2}) + \epsilon^4(\eta_2 \pm \frac{d_2}{2}) + \cdots \tag{42}$$

であらわされる．これらを式 (5)〜(13) に代入し，それぞれ ϵ のべきで整理し解を求めていく．

簡単のため，主流の速度を 0 として $U_0 = 0$ とおくと，最低次の近似から以下の解を得る：

$$W_0 = -\sqrt{2S}\eta_{0\xi}, \tag{43}$$

$$\Theta_0 = C_1(\zeta - \eta_0) + 1, \tag{44}$$

$$P_0 = -2S\eta_{0\xi\xi}(\zeta - \eta_0) + \frac{\mathrm{M}\,C_1}{2}\eta_{0\xi\xi}. \tag{45}$$

$$\tag{46}$$

ただし，$C_1 = \mathrm{Bi}\,\Delta\Theta/(2 + \mathrm{Bi})$ である．次に，$O(\epsilon^2)$ の近似から以下の解を得る：

$$U_1 = B_0 + B_1(\zeta - \eta_0) + B_2(\zeta - \eta_0)^2, \tag{47}$$

$$W_1 = E_0 + E_1(\zeta - \eta_0) + E_2(\zeta - \eta_0)^2 + E_3(\zeta - \eta_0)^3, \tag{48}$$

$$\Theta_1 = C_2 + C_3(\zeta - \eta_0) + C_4(\zeta - \eta_0)^2, \tag{49}$$

$$P_1 = F_0 + F_1(\zeta - \eta_0) + F_2(\zeta - \eta_0)^2 + F_3(\zeta - \eta_0)^3 + F_4(\zeta - \eta_0)^4. \tag{50}$$

ただし，$\psi = 4\,\mathrm{M}\,C_1/\,\mathrm{Bi}[4 - (\mathrm{G}\,C_1)^2]$ を用いて (47) の係数は，

$$B_0 = \frac{\sqrt{2\,\mathrm{S}}}{2}\eta_{0\xi}{}^2 + \frac{\mathrm{M}\,C_1}{2\sqrt{2\,\mathrm{S}}}\eta_{0\xi\xi}, \quad B_1 = \sqrt{2\,\mathrm{S}}\eta_{0\xi\xi} + \psi\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi}, \quad B_2 = \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2}\psi\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi},$$

(48) の係数は,

$$
\begin{aligned}
E_0 &= -\sqrt{2\,\mathrm{S}}\eta_{1\xi} + \eta_{0\tau} + \frac{\sqrt{2\,\mathrm{S}}}{2}\eta_{0\xi}^3 + \frac{\sqrt{2\,\mathrm{S}}}{8}\eta_{0\xi\xi\xi} + \frac{\mathrm{M}\,C_1}{2\sqrt{2\,\mathrm{S}}}\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi} + \frac{\psi}{8}(\eta_{0\xi\xi}^2 + \eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi}),\\
E_1 &= -\frac{\mathrm{M}\,C_1}{2\sqrt{2\,\mathrm{S}}}\eta_{0\xi\xi\xi} + \psi\eta_{0\xi\xi}\eta_{0\xi}{}^2,\\
E_2 &= -\frac{\sqrt{2\,\mathrm{S}}}{2}\eta_{0\xi\xi\xi} + \frac{\mathrm{G}\,C_1}{2}\psi\eta_{0\xi\xi}\eta_{0\xi}{}^2\frac{\psi}{2}(\eta_{0\xi\xi}^2 + \eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi}),\\
E_3 &= -\frac{\mathrm{G}\,C_1}{6}\psi(\eta_{0\xi\xi}^2 + \eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi}).
\end{aligned}
$$

(49) の係数は,

$$
\begin{aligned}
C_2 &= -C_1\eta_1 - \frac{C_1}{8}\eta_{0\xi\xi},\\
C_3 &= -C_1 d_1 - \frac{C_1}{\mathrm{Bi}}\eta_{0\xi}^2,\\
C_4 &= \frac{C_1}{2}\eta_{0\xi\xi}.
\end{aligned}
$$

(50) の係数は,

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 2\,\mathrm{S}\,\eta_1\eta_{0\xi\xi} + \frac{\mathrm{M}\,C_1}{2}\eta_{1\xi\xi} - \frac{3\,\mathrm{S}}{4}\eta_{0\xi\xi}^2 - \frac{\mathrm{S}}{2}\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi} - \mathrm{M}\,C_1\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2\,\mathrm{Bi}}\right)\eta_{0\xi\xi}\eta_{0\xi}{}^2\\
&- \frac{\mathrm{M}\,C_1}{16}\eta_{0\xi\xi\xi\xi} - \frac{\mathrm{M}\,C_1}{\sqrt{2\,\mathrm{S}}}\eta_{0\xi\xi\xi} + \psi\left[-\frac{3\sqrt{2\,\mathrm{S}}}{8}\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi}^2 - \frac{\sqrt{2\,\mathrm{S}}}{8}\eta_{0\xi\xi\xi}\eta_{0\xi}{}^2\right.\\
&+ \left.\mathrm{G}\,C_1\{-\frac{3\sqrt{2\,\mathrm{S}}}{128}\}\eta_{0\xi\xi}\eta_{0\xi\xi\xi} - \frac{\sqrt{2\,\mathrm{S}}}{128}\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi\xi} + \frac{3}{4}\eta_{0\xi\xi}^2 + \frac{3}{4}\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi} - (\mathrm{G}\,C_1)^2\eta_{0\xi}^2\eta_{0\xi\xi}\right],\\
F_1 &= -2\,\mathrm{S}\,\eta_{1\xi\xi} + 2\sqrt{2\,\mathrm{S}}\eta_{0\xi\tau} + 4\,\mathrm{S}\,\eta_{0\xi}{}^2\eta_{0\xi\xi} + \frac{\mathrm{S}}{4}\eta_{0\xi\xi\xi\xi} - 2\sqrt{2\,\mathrm{S}}\eta_{0\xi\xi\xi} + \frac{\mathrm{M}\,C_1}{2}\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi}\\
&+ \mathrm{M}\,C_1\eta_{0\xi\xi}^2 + \frac{\mathrm{M}\,\mathrm{G}\,C_1^2}{\sqrt{2\,\mathrm{S}}}\eta_{0\xi\xi\xi} + \psi\left[\frac{3\sqrt{2\,\mathrm{S}}}{8}\eta_{0\xi\xi}\eta_{0\xi\xi\xi} + \frac{\sqrt{2\,\mathrm{S}}}{8}\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi\xi} - \eta_{0\xi\xi}^2 - \eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi}\right],\\
F_2 &= \mathrm{S}\,\eta_{0\xi\xi}^2 - \frac{\mathrm{M}\,C_1}{4}\eta_{0\xi\xi\xi\xi} + 2\sqrt{2\,\mathrm{S}}\,\mathrm{G}\,C_1\eta_{0\xi\xi\xi}\\
&+ \psi\left[\frac{3\sqrt{2\,\mathrm{S}}}{2}\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi}^2 + \frac{\sqrt{2\,\mathrm{S}}}{2}\eta_{0\xi}^2\eta_{0\xi\xi\xi} + \mathrm{G}\,C_1\{\eta_{0\xi\xi}^2 + \eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi}\} - (\mathrm{G}\,C_1)^2\eta_{0\xi}^2\eta_{0\xi\xi}\right],\\
F_3 &= -\frac{S}{3}\eta_{0\xi\xi\xi\xi} + \frac{\sqrt{2\,\mathrm{S}}}{6}\psi\left[-3\eta_{0\xi\xi}\eta_{0\xi\xi\xi} - \eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi\xi} + \mathrm{G}\,C_1\{3\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi}^2 + \eta_{0\xi}^2\eta_{0\xi\xi\xi}\}\right.\\
&+ \left.\frac{4}{3}(\mathrm{G}\,C_1)^2\{\eta_{0\xi\xi}^2 + \eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi}\}\right],\\
F_4 &= -\frac{\sqrt{2\,\mathrm{S}}\,\mathrm{G}\,C_1}{24}\psi(3\eta_{0\xi\xi}\eta_{0\xi\xi\xi} + \eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi\xi}),
\end{aligned}
$$

で与えられる. さらに, 厚み d_1 は中心面の変動 η_0 及び ψ を用いて

$$
d_1 = \frac{1}{2}\eta_{0\xi}^2 + \frac{\mathrm{M}\,C_1}{4S}\eta_{0\xi\xi} + \frac{\mathrm{G}\,C_1}{24\sqrt{2\,\mathrm{S}}}\psi\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi}, \tag{51}
$$

で表わされ, η_0 の時間発展は以下の非線形発展方程式で記述される:

$$\begin{aligned}\eta_{0\tau} \;=\;& \left[-\frac{\sqrt{2\mathrm{S}}}{24}+\frac{(\mathrm{M}\,C_1)^2}{16\,\mathrm{S}\sqrt{2\mathrm{S}}}\right]\eta_{0\xi\xi\xi}-\frac{\psi}{2\sqrt{2\mathrm{S}}}\left[1-\frac{(\mathrm{G}\,C_1)^2}{12}\right]\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi}\\ &+\;\psi\left(-\frac{1}{24}+\frac{\mathrm{M}\,\mathrm{G}\,C_1^2}{192\,\mathrm{S}}\right)(\eta_{0\xi\xi}^2+\eta_{0\xi}\eta_{0\xi\xi\xi})-\frac{\psi\,\mathrm{G}\,C_1}{48}\eta_{0\xi}^2\eta_{0\xi\xi}.\end{aligned} \tag{52}$$

次節ではこの非線形方程式の時間発展を適当なパラメータについて数値的に調べる.

3.2 時間発展

初期条件として中心面の変動 $\eta_0(\xi,0) = \cos\xi$ を与え, パラメータを Bi=3,S=10,M=40 と選び式 (52) をいくつかの $\Delta\Theta$ 及び G の値について数値的に解いた. 計算は周期境界条件の下で有限差分法を用いて行い, 5 点平滑化により数値不安定を取り除いた.

温度差が無い ($\Delta\Theta = 0$) 場合, $\psi, C_1 = 0$ となるため式 (52) は線形方程式

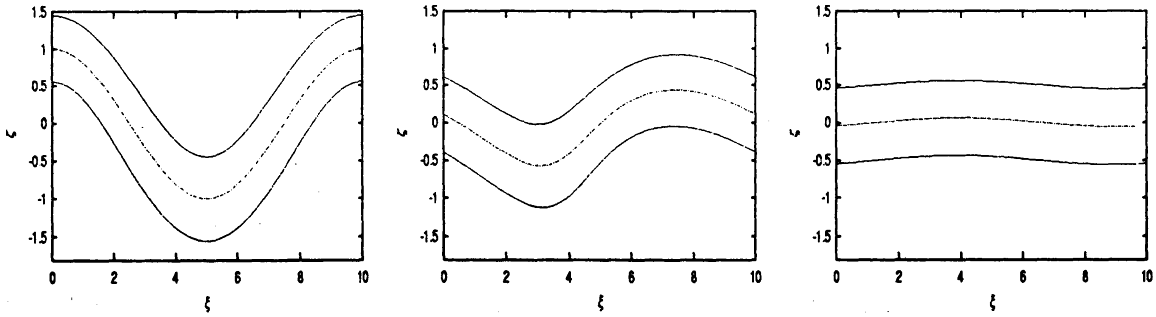
$$\eta_{0\tau}+\frac{\sqrt{2\mathrm{S}}}{24}\eta_{\xi\xi\xi}=0 \tag{53}$$

に帰着する. また, 式 (52), (53) の比較からわかるように, 反対称モードの場合, 線形近似において粘性の影響が現れず撹乱は中立安定となることに注意すべきである.

$\Delta\Theta = 0.44$ かつ G=0 の場合, 図 4 でわかるように厚みがほとんど変化せず, 中心面の変動が時間と共に減衰していく様子が見られる. このような減衰に対する G の影響をみるため, 図 5 に $\tau = 250$ での (a)G=0,(b)0.5,(c)1.0 の場合に得られたシート形状を比較のために示している. 図よりわかるように, G の増加につれて減衰が抑えられている.

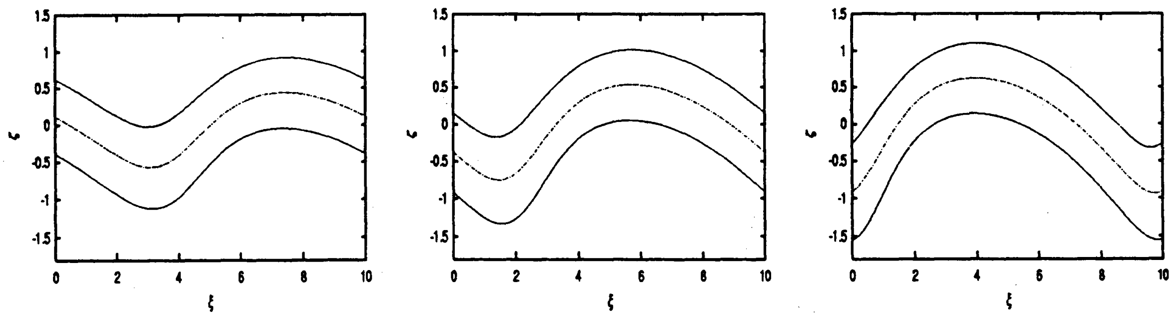
一方, $\Delta\Theta = 0.5$, G=0 の場合, 図 6 でわかるように, シートは下界面に突っ立ちながら増幅していく. また, このとき $\tau = 6.0$ における G による影響をみるため, 図 7 に (a)G=0, (b)0.5, (c)1.0 に対する発展を比較している. 図より G 増加するにつれて, 下界面への突っ立ちや中心面の変動の増幅が顕著になっていくのがわかる.

さらに, より大きい温度差 $\Delta\Theta = 1.0$ に対しては, 図 8 に示すように, 時間が経つにつれてシート形状に対称モード撹乱が誘起されていることがわかる. この対称モードの発生により局所的にシート厚みが薄くなり, その部分でシートの破断がおこることが予想される. そして, この対称モードは G が増加するほどより顕著に現れることを注意しておく.



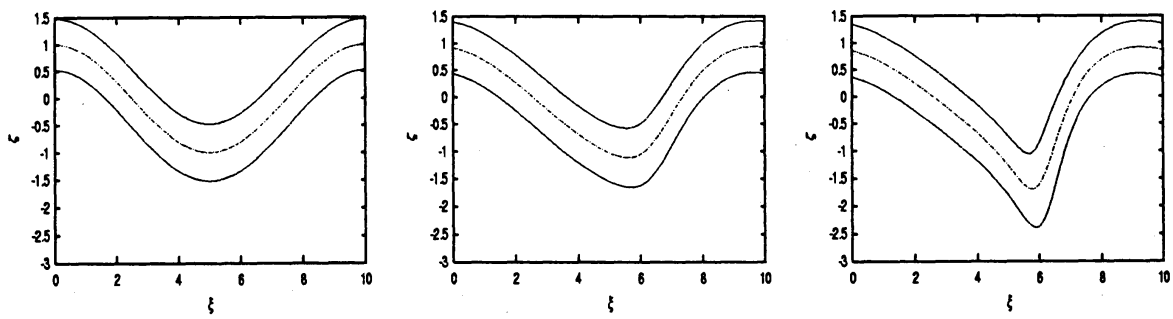
(a) (b) (c)

図 4.$\Delta\Theta = 0.44$(G=0);(a)$\tau = 0$,(b)$\tau = 250$,(c)$\tau = 500$.



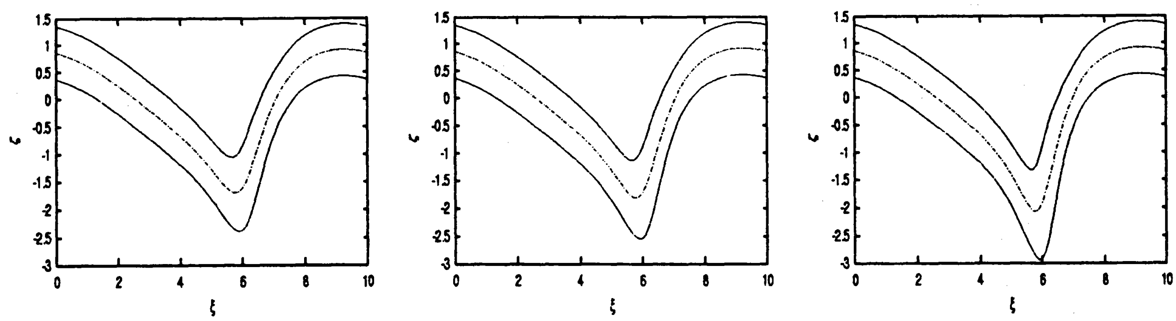
(a) (b) (c)

図 5.$\Delta\Theta = 0.44$ ($\tau = 250$);(a)G=0,(b)G=0.5,(c)G=1.0.



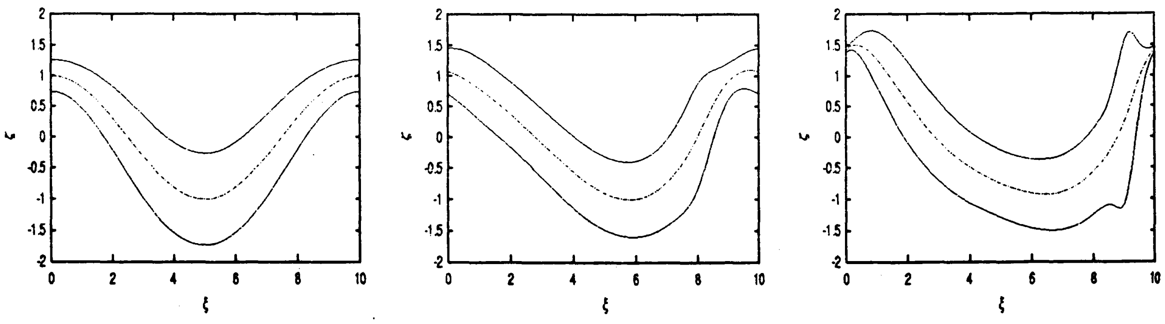
(a) (b) (c)

図 6.$\Delta\Theta = 0.5$ (G=0);(a) $\tau = 0$,(b)$\tau = 3.0$,(c)$\tau = 6.0$.



(a) (b) (c)

図 7.$\Delta\Theta = 0.5$ ($\tau = 6$); (a)G=0, (b)G=0.5, (c)G=1.0 .



(a) (b) (c)

図8. $\Delta\Theta = 1.0$ (G=0);(a)$\tau = 0$,(b)$\tau = 1.5$,(c)$\tau = 3.0$.

4 おわりに

これまでに得られた結果をまとめると以下のようになる:

(i) 対称モードでは, 粘性の温度依存性を考慮することにより線形不安定を引き起こす臨界温度差 $\Delta\Theta_c$ は大きくなり, 不安定化は抑えられる傾向にある.

(ii) 反対称モードに対しては, 温度差がないか線形近似では中立安定である. 一方, 非線形性を考慮することにより, 温度差がある臨界値(Bi=3, S=10, M=40 の場合 $\Delta\Theta \sim 0.5$) 以下の場合シートの変動は減衰し, 臨界値を越えるとシート中心面の突っ立ちや変動の増幅が起こる. さらに温度差が大きくなると, 局所的に対称モード撹乱が誘起され, シート厚みの薄い部分が現われ破断に至ることが予想される. また, 粘性の温度依存性は減衰する場合はそれを抑え, 増幅する場合はこの傾向を助長するように働く.

参考文献

[1] A.Oron, S.H.Davis and S.G.Bankoff: Rev.Mod.Phys.**69**(1997)931.

[2] T.Funada:J.Phys.Soc.Jpn.**55**(1986)2191.

[3] L.A.D-Orozco:Colloids and Surfaces,A**157**(1999)223.

[4] T.Yoshinaga and T.Uchiyama:J.Phys.Soc.Jpn.**70**(2001)103.