

## Swift-Hohenberg 型方程式の厳密解の安定性について

及川正行, 丸野健一 (九大・応力研)

A. Ankiewicz, N. Akhmediev (オーストラリア国立大)

### 1 はじめに

Sakaguchi & Brand は 5 次の複素 Swift-Hohenberg (SH) 方程式に対して, 係数のある範囲において, 数値的に局在解を見出し, それらの相互作用などの性質を調べた.<sup>1)</sup> Maruno らはこの仕事や Nozaki & Bekki,<sup>2)</sup> Berloff & Howard<sup>3)</sup> らの仕事に触発されて, パンルベ解析, 広田の多重線形形式の方法などを用いて, 1 次元 SH 型の方程式の解析的に表現できる孤立定常解や周期解の見出した<sup>4)</sup>. これらの解析解が複素 Ginzburg-Landau 方程式において見いだされた解析解がそこでのパターン形成において演じたのと同様な役割を果たすのかどうか興味深いところである. それを考えるための第一歩としてここでは次の 2 つの実係数の SH 型方程式の解析解の線形安定性を考察する.

#### 1) 3 次非線形項をもつ実係数 SH (RCSH) 方程式

$$u_t + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxxx} + \gamma u - \delta u^3 = 0 \tag{1.1}$$

$$\text{解析解: } u = u_0 \operatorname{sech}^2(kx) \tag{1.2}$$

#### 2) 5 次非線形項をもつ実係数 SH (RQSH) 方程式

$$u_t + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxxx} + \gamma u - \delta u^3 - \eta u^5 = 0 \tag{1.3}$$

$$\text{解析解: (i) } u = u_0 \operatorname{sech}(kx) \tag{1.4}$$

$$\text{(ii) } u = u_0 \tanh(kx) \tag{1.5}$$

### 2 RCSH 方程式の場合

(1.2) が (1.1) の解になるためには, 条件

$$\gamma u_0 + 4\alpha u_0 k^2 + 16\beta u_0 k^4 = 0$$

$$\gamma + 4\alpha k^2 + 16\beta k^4 = 0$$

$$-\delta u_0^2 + 120\beta k^4 = 0$$

すなわち

$$k^2 = -\frac{\alpha}{20\beta}, \quad \gamma = \frac{4\alpha^2}{25\beta}, \quad u_0^2 = \frac{3\alpha^2}{10\delta\beta} \tag{2.1}$$

が満たされる必要がある。熱対流に現れる通常のSH方程式

$$\psi_t = r\psi - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 \psi - \psi^3$$

では  $\alpha = 2, \beta = 1, \alpha\beta > 0$  なので、このような解析解は存在しないことに注意しよう。(1.2)が実関数解となるためには、 $\alpha\beta < 0, \beta\delta > 0$  が必要である。そこで、ここでは

$$\beta > 0, \text{したがって, } \alpha < 0, \delta > 0 \quad (2.2)$$

と仮定する。これは微小振幅における高波数領域での不安定を避けたいためである。このとき

$$u = (-\alpha/\sqrt{\beta\delta})\psi, \quad \xi = \sqrt{-\alpha/\beta}x, \quad \tau = (\alpha^2/\beta)t$$

とスケール変換すると(1.1)と(1.2)は

$$\psi_\tau - \psi_{\xi\xi} + \psi_{\xi\xi\xi\xi} + (4/25)\psi - \psi^3 = 0 \quad (2.3)$$

$$\psi^{(s)} = \pm \sqrt{3/10} \operatorname{sech}^2[\xi/(2\sqrt{5})] \quad (2.4)$$

となる。  $\psi = \psi^{(s)} + \phi(\xi, \tau)$  とおき、  $\phi$  について線形化して  $\phi = \Phi(\xi)e^{\sigma\tau}$  とおくと

$$\frac{d^4\Phi}{d\xi^4} - \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \left(\sigma + \frac{4}{25} - \frac{9}{10} \operatorname{sech}^4\left(\frac{\xi}{2\sqrt{5}}\right)\right)\Phi = 0 \quad (2.5)$$

となる。固有値  $\sigma$  の実部が正である固有関数が存在すれば、  $\psi^{(s)}$  は不安定である。固有関数に対して、境界条件

$$\Phi, d\Phi/d\xi \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow \pm\infty) \quad (2.6)$$

を課す。このとき、固有値  $\sigma$  が実数であることは容易にわかる。さらに、解析解  $\psi^{(s)}$  の並進対称性から

$$\text{固有値: } \sigma = 0, \quad \text{固有関数: } d\psi^{(s)}/d\xi \quad (2.7)$$

が固有値問題(2.5)の1組の解であることがわかる。これは数値計算の正しさを検証するのに役立つ。変換

$$X = \xi/(2\sqrt{5}), \quad \zeta = \tanh X \quad (2.8)$$

を行うと、解(2.7)は

$$\sigma = 0, \quad \Phi = \operatorname{sech}^2 X \tanh X = (1 - \zeta^2)\zeta$$

となるので、この関数を1つの要素としてもつ関数系  $\{\varphi_\ell^{(2)}(\zeta), \ell = 2, 3, \dots\}$  で(2.5)の固有関数  $\Phi$  を展開する。ここで、  $\varphi_\ell^{(2)}(\zeta)$  は  $(1 - \zeta^2)d^2P_\ell/d\zeta^2$  (ただし、  $P_\ell(\zeta)$  はルジャンドル多項式) を正規化したものである。このような正規直交系での展開によって行列の固有値問題に帰着させて計算した結果、(2.5)はただひとつの不安定モードを持つことがわかる。そのモードの固有値は

$$\sigma = 0.453516120\dots$$

表 1: (2.5) の固有値. ( $N = 20, 40, 80$  に対して大きい順に 3 個)

N=20	N=40	N=80
0.453516120478e+00	0.453516120624e+00	0.453516120618e+00
-0.181270876671e+00	-0.173707225002e+00	-0.16954234970e+00
-0.820517305328e+00	-0.539329188863e+00	-0.40386538800e+00

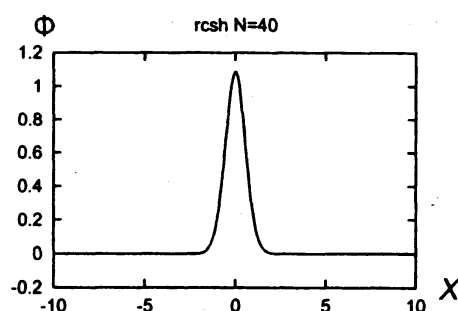


図 1: (2.5) の不安定な固有関数.

で展開項数を増やしたときの収束性もよい. 偶関数のみによる展開の項数を  $N$  とすると,  $N = 20$  の場合と  $N = 80$  の場合は 9 桁まで一致する (表 1). 対応する固有関数は図 1 のようになる. 図 1 は  $N = 40$  の場合であるが,  $N = 80$  でも変わらない.

図 1 ではわからないが,  $|X| \rightarrow \infty$  のとき, 固有関数は単調にではなく, 振動しながら減衰する.

### 3 RQSH 方程式の場合

(1.3) の解 (1.4) の安定性を考える. (1.4) が (1.3) の解になるための条件は

$$\gamma + \beta k^4 + \alpha k^2 = 0,$$

$$k^2 = \sqrt{\eta/24\beta} u_0^2,$$

$$u_0^2 = -(6/5\eta)(\alpha\sqrt{\eta/6\beta} + \delta).$$

したがって,  $\beta\eta > 0$  でなければならないので, Sakaguchi & Brand<sup>5)</sup> の調べた場合とは異なることに注意しよう. この 3 つから  $k, u_0$  を消去すると

$$\gamma = \frac{9\alpha^2}{100\beta} - \frac{3\delta^2}{50\eta} + \frac{2}{25} \frac{\alpha\delta}{\eta} \sqrt{\frac{6\eta}{\beta}}. \quad (3.1)$$

ここでは

$$\beta > 0, \quad \alpha > 0 \quad (3.2)$$

と仮定する. この仮定は微小振幅における高波数での不安定を避けるためである. このとき

$$u = (\alpha^2/\beta\eta)^{1/4} \psi, \quad \xi = \sqrt{\alpha/\beta} x, \quad \tau = (\alpha^2/\beta) t$$

とスケール変換すれば, (1.3),(1.4) は

$$\psi_\tau + \psi_{\xi\xi} + \psi_{\xi\xi\xi\xi} - (3/50)(s - 1/\sqrt{6})(s + 9/\sqrt{6})\psi + s\psi^3 - \psi^5 = 0, \quad (3.3)$$

$$\psi^{(s)} = A \operatorname{sech}(\kappa\xi). \quad (3.4)$$

ただし,

$$s := (-\delta/\alpha) \sqrt{\beta/\eta}, \quad \kappa^2 = A^2/(2\sqrt{6}), \quad A^2 = (6/5)(s - 1/\sqrt{6})$$

のように1個のパラメターを含む問題に帰着する. 実解の存在条件は

$$s > 1/\sqrt{6}.$$

$\psi(\xi, \tau) = \psi^{(s)}(\xi) + \phi(\xi, \tau)$  とおいて,  $\phi$  について線形化して,  $\phi = \Phi e^{\sigma\tau}$ ,  $X = \kappa\xi$  とおくと

$$\begin{aligned} \kappa^4 \frac{d^4\Phi}{dX^4} + \kappa^2 \frac{d^2\Phi}{dX^2} + \left[ \sigma - \frac{3}{50} \left( s - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \left( s + \frac{9}{\sqrt{6}} \right) \right. \\ \left. + 3sA^2 \operatorname{sech}^2 X - 5A^4 \operatorname{sech}^4 X \right] \Phi = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる. (3.4) の並進対称性から

$$\sigma = 0, \quad \Phi = \operatorname{sech} X \tanh X = \sqrt{1 - \zeta^2} \zeta, \quad \zeta = \tanh X$$

が(3.5)の1つの解である.

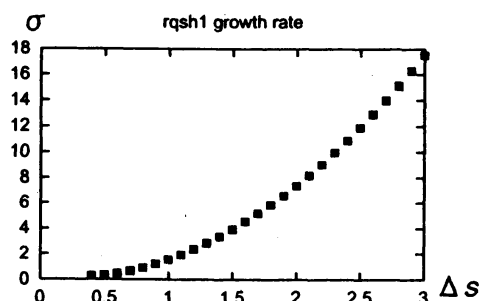


図 2: 最大固有値

表 2: (3.5) の最大固有値.  $\Delta s = 1.0$

	$\varphi_\ell^{(1)}$ の偶関数展開		$\varphi_\ell^{(0)}$ の偶関数展開
$N = 60$	0.1542637503e+01	$N = 300$	0.1542684283e+01
$N = 100$	0.1542664051e+01	$N = 350$	0.1542684922e+01
$N = 200$	0.1542685074e+01	$N = 400$	0.1542685304e+01

われわれは  $\sqrt{(1 - \zeta^2)} dP_\ell/d\zeta$  を規格化した関数系  $\{\varphi_\ell^{(1)}(\zeta), \ell = 1, 2, 3, \dots\}$  による展開やルジャンドル多項式を規格化した関数系  $\{\varphi_\ell^{(0)}(\zeta) = \sqrt{(2\ell + 1)/2} P_\ell, \ell = 0, 1, 2, \dots\}$  に

よる展開を試みた. 図2は最大固有値を  $\Delta s := s - 1/\sqrt{6}$  に対してプロットしたものである.  $\Delta s$  が1程度より大きいときには収束していて信用できるようである. しかし,  $\Delta s$  が小さいときには収束が悪く, 信用できない. 例えば, ルジャンドル多項式展開では偶関数のみで400項もの展開を行っている.

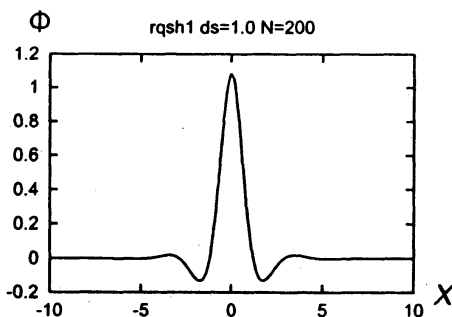


図3:  $\Delta s = 1.0$  に対する (3.5) の最も不安定な固有関数.

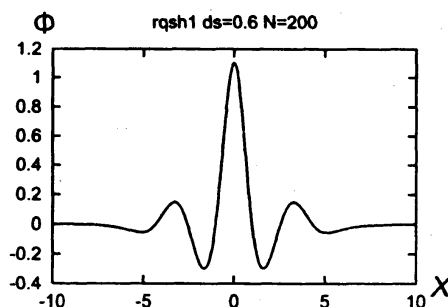


図4:  $\Delta s = 0.6$  に対する (3.5) の最も不安定な固有関数.

表3: (3.5) の最大固有値.  $\Delta s = 0.6$  ( $\{\varphi_\ell^{(0)}\}$  の偶関数展開)

$N = 250$	0.451572898e+00
$N = 300$	0.451731818e+00
$N = 350$	0.451834247e+00
$N = 400$	0.451892406e+00

図3は  $\Delta s = 1.0$  のときの最大増幅率をもつ不安定モードの固有関数である. これは関数系  $\{\varphi_\ell^{(1)}\}$  の偶関数だけを用いた200項の展開の結果であるが, ルジャンドル展開の結果とも一致する. 表2は2つの(偶関数のみの)展開における最大固有値の比較である. 表3は  $\Delta s = 0.6$  の場合の(3.5)の最大固有値である. ルジャンドル展開の偶関数展開による結果である. これは一見収束しているように見えるし, 関数系  $\{\varphi_\ell^{(1)}\}$  による結果ともよく似ているが, ルジャンドル展開の場合  $|X| \rightarrow \infty$  で固有関数が0でない一定値に収束するということが起こる. これはありえない結果である. 図4は  $\Delta s = 0.6$  のときの  $\{\varphi_\ell^{(1)}\}$  展開による結果であるが, ルジャンドル展開の結果とは一致しないのである. このように

収束が遅くなったり、問題が起こったりするのは  $X \rightarrow \pm\infty$  での固有関数の減衰の仕方が遅くなるからと考えられる。  $\Delta s$  の値をさらに減らしていくと固有関数の振動が激しくなる。しかし、このような場合の固有関数の挙動を正しく捉えるには関数系による展開とは別な方法を工夫する必要がある。  $\Delta s$  が小さいときには、(3.5) は最高階の導関数の係数が小さくなるので、WKB 近似に類似の近似が出来るように思われる。

なお、解析解 (1.5) の安定性についてはまだほとんど進んでいない。

## 参考文献

- [1] H. Sakaguchi and H. R. Brand: *Physica D* **117** (1998) 95.
- [2] K. Nozaki and N. Bekki: *J. Phys. Soc. Jpn.* **53** (1984) 1581.
- [3] N. G. Berloff and L. N. Howard: *Stud. Appl. math.* **99** (1997) 1.
- [4] K. Maruno, A. Ankiewicz and N. Akhmediev: *Physica D* (to be published).
- [5] H. Sakaguchi and H. R. Brand: *Physica D* **97** (1996) 274.