数理解析研究所講究録 1313 巻 2003 年 15-24

超伝導現象と Ginzburg–Landau 方程式

笠井　博則（福島大学・教育学部）

1 Introduction—現象とモデル方程式—

超伝導現象は 1911 年にオランダの K.Onnes によって発見された、極低温において金属の電気抵抗が急激にゼロになる現象である。当初より、この不思議な現象は多くの物理学者の注目を集めており、その後弱い磁場のもとでは　磁場が完全に排斥されているというマイスナー効果などの通常の物質には見られないさまざまな性質が知られるようになり、その研究が始まった。ここでは、超伝導現象と　そのモデルである Ginzburg–Landau（以下、ＧＬと略記）理論から派生したいくつかの方程式について紹介をする。

ＧＬ理論に基づく方程式は　様々な現象を一つの方程式系から記述することができる面白い対象なのではあるが、筆者の技量と紙面の制限があるので　多少、荒い書き方になるところがあることはお許し頂きたい。

1.1 超伝導現象

現在、一般的な（個々の物質によらない）超伝導現象に現れる代表的な性質には次のものがある。

- 完全伝導性：電気抵抗がゼロになる。　（定常状態では内部に電場はない）
- 完全反磁性（マイスナー効果）：弱い外部磁場のもとでは　表面の薄い領域に電流が流れ内部の磁場が完全に排斥される。
- 物質によって第一種、第二種の超伝導状態を示す。
- 超伝導状態の崩壊：外部磁場が強くなり　ある臨界磁場を越えたとき、超伝導状態がなくなり、試料全体で常伝導状態になる。

- 中間状態 ：球や平板などの超伝導体に外部磁場を加えたとき、形状の効果によって部分的に臨界磁場を越え部分的に超伝導状態が壊れて超伝導状態と常伝導状態が混在する状態。

1.2 超伝導のモデル

超伝導現象は 量子力学的な効果が巨視的に観察される現象のひとつであり、その現象の 基本的な理解には 量子力学的な考察が必要である。超伝導の基本的な理論として知られているＢＣＳ理論は、量子力学的な理論で空間一様性仮定して議論されている。かたや、巨視的な現象を記述するとき、特にその空間構造に興味があるときにはＢＣＳ理論で議論することはできない。 そのため、空間的に一様でないときの理論が別に必要になる。

超伝導現象に関しては 微視的理論、中間サイズの理論、巨視的理論がそれぞれ知られている。

微視的理論：ＢＣＳ理論
中間サイズの理論： Gorkov 方程式、Bogoliubov–deGennes 方程式
巨視的理論： London 方程式、Bean モデル、GL 理論

中間サイズのモデルは ＢＣＳ理論を空間非一様性のある場合に変形したもので、 GL 方程式を導出する際に利用された。超伝導物質と普通の金属の接合面の近傍などの空間構造を持つが 量子力学的な世界の議論に利用されている。

1.2.1 超伝導の巨視的理論

巨視的な理論の導出に関しては、大きく２通りの方法があると思われる。

一つが微視的理論の疎視化（平均化）によって導くという方法であり、もう一つが基本原理に基づき実験事実に合うような式を作るという（現象論的）方法である。例えば先に挙げた Bean モデルは、Maxwell 方程式の一つ（rot$\mathbf{B} = \mathbf{J}$）で電流密度の項 $\mathbf{J}$ を電場と完全伝導性の関係に注目してモデル化したものである。

1.2.2 GL 理論

GL 理論は 荒く言うと 相転移に関する Landau の一般的理論、「オーダーパラメータ決めて、自由エネルギーを構成し、その停留点の変化によって相転移を記述する」を超伝導現象に適用させたものである。

オーダーパラメータとして、量子力学の類推から複素数値の関数 ψ をとり、次にあげる自由エネルギーを用いた。

$$F(\psi,\mathbf{A})=\int_\Omega \frac{1}{2}|D_{\mathbf{A}}\psi|^2+\frac{\kappa^2}{4}(1-|\psi|^2)^2+\frac{1}{2}|\mathrm{rot}\mathbf{A}-\mathbf{H}_{ext}|^2dx. \tag{1}$$

ψ: a order parameter(complex valued function),
($|\psi|^2$: local density of superconducting electrons)
$\mathbf{A}$: magnetic potential(vactor valued function)
$\mathbf{H}_{ext}$: an applied magnetic field
$D_{\mathbf{A}}\psi=\nabla\psi-i\mathbf{A}\psi$
κ: the Ginzburg-Landau parameter

この理論は　パラメータ κ の値によって　第一種と第二種の超伝導状態の違いを説明できる優れたモデルであるが、ＢＣＳ理論が量子力学的に超伝導現象を記述することに成功したため（現象論であることもあり？）注目を集めなかった。その後、Gor'kov らが　ＢＣＳ理論から空間構造を議論できるように変形し、ある極限で　　GL 方程式を導出することに成功してから　特に注目を集め、現在も巨視的な現象を記述する理論として用いられている。

モデル方程式の検証をするときの　ひとつの視点としてとして、実験事実を定性的または定量的に説明できることがあるが、Ginzburg–Landau 方程式は、当初から現象論的な（量子力学を用いて構成したわけではない）モデルとして提唱されたものであるにも関わらず、実験事実を定性的によくあらわしていた。

1.3　GL 方程式

1.3.1　定常状態の方程式

GL 理論の自由エネルギー (1) から $\psi,\mathbf{A}$ について

$$D_{\mathbf{A}}\psi\cdot\mathbf{n}=0,\qquad(\mathrm{rot}\mathbf{A}-\mathbf{H}_{ext})\times\mathbf{n}=0\ \text{ on }\ \partial\Omega$$

なる境界条件のもとでそれぞれ変分を取ると　次のＧＬ方程式が導かれる。

$$D_{\mathbf{A}}^2\psi+\kappa^2(1-|\psi|^2)\psi=0,\qquad \text{in }\ \Omega \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}^2\mathbf{A}-\mathrm{rot}\mathbf{H}_{ext}+\frac{i}{2}(\overline{\psi}D_{\mathbf{A}}\psi-\psi\overline{D_{\mathbf{A}}\psi})=0\qquad \text{in }\ \Omega \tag{3}$$

ここで ベクトル量 $\frac{i}{2}(\overline{\psi}D_{\mathbf{A}}\psi-\psi\overline{D_{\mathbf{A}}\psi})$ を　$\mathbf{J}_{GL}$ と表し、ＧＬ電流 (超伝導電流) という。この方程式は　ゲージ変換 ($\psi\mapsto\psi e^{i\chi}$, $\mathbf{A}\mapsto\mathbf{A}+\nabla\chi$) によって不変である。この性質をゲージ不変性をもつ、という。

1.3.2 時間に依存する方程式

ＧＬ理論を利用した 超伝導現象の時間に依存するモデルは 次のものが知られている。

$$\eta(\psi_t + i\Phi\psi) - D_{\mathbf{A}}^2\psi - \kappa^2(1-|\psi|^2)\psi = 0, \qquad \text{in } \Omega \ (4)$$

$$\varepsilon(\mathbf{A}_t + \nabla\Phi)_t + \sigma(\mathbf{A}_t + \nabla\Phi) + \mathrm{rot}^2\mathbf{A} - \mathrm{rot}\mathbf{H}_{ext} = \mathbf{J}, \qquad \text{in } \Omega \ (5)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{i}{2}(\overline{\psi}D_{\mathbf{A}}\psi - \psi\overline{D_{\mathbf{A}}\psi}) \qquad (6)$$

$$\psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \Phi(x,0) = \Phi_0(x), \quad \mathbf{A}(x,0) = \mathbf{A}_0(x), \quad \mathbf{A}_t(x,0) = \mathbf{A}_1(x) \quad \text{in } \Omega. \ (7)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0, \qquad (\mathrm{rot}\mathbf{A} - \mathbf{H}_{ext}) \times \mathbf{n} = 0 \ \text{ on } \partial\Omega \ (8)$$

ここで領域の境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかであるとし、$\varepsilon = 0,$ の時は (7) の最後の条件は無視する.

この式は $\varepsilon \neq 0$ のときをふくめて、A. Schmid ([10]) が $\varepsilon = 0$ の場合を L. P. Gor'kov and G. M. Eliashberg ([6]) が提唱したものである。これについて２種類の導出をする。

Ginzburg–Landau エネルギーの"gradient flow"

GL 理論の自由エネルギー (1) の gradient flow を考え、さらにゲージ不変性を持つように時間微分の項を変形する。Φ についてのゲージ変換は $\psi \mapsto \psi e^{i\chi}$ のとき $\Phi \mapsto \Phi - \chi_t$ であり、$\psi_t \mapsto \psi_t + i\Phi\psi$, $\mathbf{A}_t \mapsto \mathbf{A} + \nabla\Phi$ とすることで、$\varepsilon = 0$ の時の方程式が導かれる。ここでの η, σ は 時間的な変化の速さを表す定数と考えられる。(ゲージ不変性を持つようにするために時間微分にかんして付加的な項がついているが、時間が経つとエネルギーが減少することは容易に示すことができる)。

Ginzburg–Landau–Maxwell 方程式

オーダーパラメータについては"gradient flow"を、さらに 時間依存の Maxwell 方程式の一つ

$-\varepsilon\mathbf{E}_t + \mathrm{rot}\mathbf{B} = \mathbf{J}$

の電流密度 $\mathbf{J}$ に寄与するものとして、

1) ＧＬ電流 $-\mathbf{J}_{GL}$、 2) 抵抗電流 $\sigma\mathbf{E}$、 3) 外部磁場の作る電流 $\mathrm{rot}\mathbf{H}_{ext}$

を考えたものである。 ここで磁場 $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$, 電場 $\mathbf{E} = -(\mathbf{A}_t + \nabla\Phi)$ を用いる。これによって、上の式が得られる。この考え方では σ は 電気伝導率といわれるパラメータである。

2　現象に関わるGL方程式のいくつかの結果

以下、特に言及のない限り Ω は $\mathbb{R}^d$ $(d=2,3)$ の有界領域とする。

2.1　Break Down と Nucleation

第1種、第2種の別に関わらず、強い外部磁場の元では超伝導状態は崩壊 (break down) する。つまり、超伝導状態ではなくなる。Ginzburg–Landau 方程式では、この状態は　$\psi\equiv 0$ として表される。　　したがって、興味としては「どのような外部磁場の下で、$\psi\equiv 0$ の解が　安定・一意的か？」ということになる。

超伝導状態の break down に関する最初の結果は T.Giorgi,Phillips([5]) による。

この論文では、2次元の円形領域上での崩壊現象を示している。方程式から容易に得られる不等式

$$\kappa^2\|\psi\|^2 \geq \|D_{\mathbf{A}}\psi\|^2 + \kappa^2\||\psi|^2\|^2 \geq \|D_{\mathbf{A}}\|^2$$

と　外部磁場 $\mathbf{H}_{ext}$ に対応するベクトルポテンシャルを $\tilde{\mathbf{A}}$ としたときの作用素 $D^2_{\tilde{\mathbf{A}}}$ の最小固有値を μ^* に関する不等式と次の不等式

$$\|D_{\mathbf{A}}\psi\|^2 \geq \|D_{\tilde{\mathbf{A}}}\psi\|^2 \geq \mu^*\|\psi\|^2$$

を示し $\kappa^2\|\psi\|^2 \geq \|D_{\mathbf{A}}\psi\|^2 \geq \mu^*\|\psi\|^2$ を得た。これから　$\kappa^2 < \mu^*$ となるとき　解が $\psi\equiv 0$ となることを示した。

この方針は、$\psi\equiv 0$(全体が常伝導状態) が　一意的であることは言っているが安定性については何も言っていない。　また、不等式の証明に固有関数の概形を利用しているため一般の形状への拡張が自明ではない。

そこで、一意性は言えないが　領域の次元・形状によらず　$D^2_{\tilde{\mathbf{A}}}$ の固有値問題が　break down に直結していることを示す、次の議論を紹介する。

代入してみると明らかだが $\psi\equiv 0, \mathbf{A}=\tilde{\mathbf{A}}$　　$(\mathrm{rot}\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{H}_{ext})$ は　どのような外部磁場に対しても解になっている。

$\mathbf{H}_{ext}$ を大きくしていったとき、この解より自由エネルギーの小さい解が表れることが示される。

$\varphi=\frac{\psi}{\|\psi\|}=\psi/\mu,\quad \mathcal{A}=\frac{\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{A}}}{\|\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{A}}\|}=(\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{A}})/\lambda$ とおく。この時、$(\psi,\mathbf{A})$ が $(0,\tilde{\mathbf{A}})$ に近いとすると

$$F(\psi,\mathbf{A})-F(0,\tilde{\mathbf{A}}) = \mu^2\{\|D_{\tilde{\mathbf{A}}}\varphi\|^2 - \kappa^2\int_\Omega|\varphi|^2dx\}$$
$$+\lambda^2\|\mathrm{rot}\mathcal{A}\|^2 + (\lambda,\mu\text{の3次以上の項})$$

が得られる。 従って、外部磁場が小さくなり κ^2 が μ^* より大きくなるとき解 $(0, \tilde{\mathbf{A}})$ が不安定になる。

このように $\psi \equiv 0$ の解が不安定になり、$\psi \neq 0$ の安定平衡解が 存在するようになるとき Cooper 対が生成されると考えられ、この現象を Nucleation(核生成) という。

2.2 無外磁場下での超伝導電流の不存在

オーダーパラメータが実数値関数になるようなゲージを定めると、外部磁場がないとき、単連結の領域をしめる超伝導体は 超伝導電流を持たないことが次のように簡単に示される。

オーダーパラメータ ψ が $\psi = fe^{i\omega}$ と表されるとき、$\psi \mapsto \psi e^{-i\omega}$, $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} - \nabla\omega$ とゲージ変換をする。 この時、$\mathbf{u} = \mathbf{A} - \nabla\omega$ とすると、(2)–(3) は

$$\Delta f - |\mathbf{u}|^2 f + \kappa^2(1 - f^2)f = 0 \tag{9}$$

$$\mathrm{rot}^2\mathbf{u} + f^2\mathbf{u} = 0 \tag{10}$$

となる。ここで、ＧＬ電流に相当する部分が $f^2\mathbf{u}$ となっていることを注意する。

上の式の第２式に $\mathbf{u}$ をかけて領域 Ω 上でで積分すると $\|\mathrm{rot}\mathbf{u}\|^2 + \|f\mathbf{u}\|^2 = 0$ となる。

従って、$f\mathbf{u} = 0$ となり、ＧＬ電流が存在しないことが示せる。

2.3 安定平衡解への漸近挙動・電場の消滅

次の関数空間を用意する。

$L^2(\Omega), H^s(\Omega)$ を通常の実数値関数のソボレフ空間とし、複素数値の関数の空間を $\mathcal{L}^2(\Omega), \mathcal{H}^2(\Omega)$ のように斜体で、さらにベクトル値関数の空間を太字で $\mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{H}^2(\Omega)$ のようにあらわす。$L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$,

さらに、

$$\begin{aligned} H^1_{0m}(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u(x)\,dx = 0\}, \\ \mathbf{H}(\mathrm{div}0;\Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega\}, \\ \mathbf{H}_0(\mathrm{div}0;\Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}0;\Omega) : \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ in } \Omega\}, \\ \mathbf{X}_0 &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathrm{div}0;\Omega) \bigcap \mathbf{H}^1(\Omega), \mathrm{rot}\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

$\|\cdot\|$ で、$\mathcal{L}^2(\Omega)$ (or $\mathbf{L}^2(\Omega)$ or $L^2(\Omega)$) のノルムを表す。 また、次の記号も用

$$\mathbf{S} \equiv \left\{ \tilde{u} = (\tilde{\psi}, \tilde{\mathbf{A}}) \in \mathcal{H}^2(\Omega) \times X_0 \;\middle|\; (\tilde{\psi}, \tilde{\mathbf{A}}) \text{ is the strong solution of } (2)-(3) \right\}$$

方程式系 (4)–(8) については Z.Chen and K.-H.Hoffmann [4] 、 Qiang Du [7] が $\varepsilon = 0$ で パラボリックゲージ ($\mathrm{div}\mathbf{A} = \Phi$) のとき、初期値境界値問題の解の存在と一意性を示した。

$\varepsilon \neq 0$ の場合は、[16] で, M. Tsutsumi and H. K が Coulomb gauge ($\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$) と $\int_\Omega \Phi(x,t)dx = 0 \quad \forall t \geq 0$. のもとで 初期値境界値問題の解の存在と一意性を示した。

漸近挙動については M.Tsutsumi and H.K によって

Proposition 1 *(Asymptotic behaviour of solutions)*
Suppose that the initial datum $(\psi_0, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \Phi_0) \in (\mathcal{H}^2 \cap \mathcal{L}^\infty) \times \mathbf{X}_0 \times \mathbf{H}_0(\mathrm{div}0\,;\Omega) \times H^1_{0m}(\Omega)$. *Then, for any sequence* $\{t_n\}$ *satisfying* $t_n \uparrow \infty$ *there exists a subsequence* $\{t_{n'}\}$ *of* $\{t_n\}$ *and* $(\psi_\infty, \mathbf{A}_\infty) \in \mathcal{H}^2 \times \mathbf{H}^2$ *such that the strong solution* $(\psi(\cdot, t_{n'}), \mathbf{A}(\cdot, t_{n'}), \Phi(\cdot, t_{n'}))$ *converges to* $(\psi_\infty, \mathbf{A}_\infty, 0)$ *in* $\mathcal{H}^1 \times \mathbf{H}^1 \times H^1$ *strong topology and the limit* $(\psi_\infty, \mathbf{A}_\infty) \in \mathbf{S}$

が示されており、また、$\varepsilon = 0$ のとき Fleckinger-Pelle, Takac, Kaper らは $\mathrm{div}\mathbf{A} = \omega\Phi$ のとき、解の存在と 定常および非定常の外場に対する漸近挙動を調べた。

最近 H.K. and M.Tsutsumi は $\varepsilon > 0$ のとき 次の結果が成り立つことを示した。

Theorem 1 *Coulomb gauge* のもとで $(\tilde{\psi}, \tilde{\mathbf{A}})$ が安定平衡解のとき、$(\tilde{\psi}, \tilde{\mathbf{A}})$ に十分近い初期値 $(\psi_0, \mathbf{A}_0, \Phi_0) \in \mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}(\mathrm{div}0, \Omega) \times H^1$ に対して正定数 $C, C', a > 0$ があり、解は

$$F(\psi, \mathbf{A}) - F(\tilde{\psi}, \tilde{\mathbf{A}}) < Ce^{-at}, \quad \|\nabla\Phi\| < C'e^{-at}$$

の意味で $(\tilde{\psi}, \tilde{\mathbf{A}}, 0)$ に指数関数的に漸近する。

これは、超伝導体の中から電場 $(-\mathbf{A}_t - \nabla\Phi)$ が指数関数的に減衰し, 定常状態では電場が内部にないことを表している。 証明は、

$$H = F(\psi, \mathbf{A}) - F(\tilde{\psi}, \tilde{\mathbf{A}}) + \varepsilon\|\mathbf{A}_t + \nabla\Phi + \frac{\sigma}{2\varepsilon}(\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}})\|^2$$

に関する微分不等式 $\frac{d}{dt}H + aH < 0$ を示すことによる。

3 モデルの問題点と検討課題

最後に、Ginzburg–Landau 理論に基づいたモデルに関しての問題点・要検討点を挙げてみたい。

- 無限大の伝導度

  超伝導状態では抵抗がゼロであるために定常状態で内部に電場を持つことができない。もし、電場が存在したならば荷電粒子の速度が増大し続けることになる。では、遷移状態ではどうだろうか？定常状態に至までの時間が大きいとその分大きな電流が生じることになる。時間依存の方程式での伝導度 σ は検討が必要と思われる。

- 中間状態

  超伝導体の形状によっては、部分的に臨界磁場を越えるために、常伝導状態 ($\psi \equiv 0$) の領域と超伝導状態 ($\psi \neq 0$) が混在することがあり得ることは述べた。ところが、この状態は　一意接続定理によって通常のＧＬ方程式では記述されない。　.

  ＧＬの自由エネルギーに $\psi\mathrm{rot}\mathbf{A} = 0$ と言う拘束条件をつけた最小化問題を堤・大石・笠井 [15] で考えた。

- 外部の周波数が高い領域でのモデルの信頼性

  時間に依存したＧＬ方程式の正当性が保証されているのは　定常状態に近く、空間方向の変化が十分緩やかであるときとされているが、数値計算の結果を見る限りにおいても　もう少し広い範囲で現象をとらえているように見える。　特に物理・工学的な興味においても　外場が高周波数領域であるときの　巨視的な超伝導体の応答をシミュレーションできることが望ましい。

- ゲージの指定・　ゲージによらない性質

  ゲージ不変性があるはずなのに、ひとつのゲージで示せる性質がほかのゲージでは　難しい事が多い。これが、解析的な道具に起因するのか、解の構造上の問題なのか確認する必要があるのではないか？

  - ．外部磁場がないときの超伝導電流の不存在　（実数ゲージでは自明、そのほかのゲージでは $\cdots$ ））
  - ．超伝導状態の崩壊
  - ．定常状態への収束

理想的にはゲージによらない証明をつくることが望ましいと考えるがこれは欲張りすぎだろうか

参考文献

[1] Abrahams, E and Tsuneto, T., Time Variation of the Ginzburg-Landau Order Parameter *Phys. Rev.*, 1966, **152**, 416–433.

[2] Carroll, R. W. and Glick, A. J., On the Ginzburg-Landau Equations *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1964, **16**, 373–384.

[3] Dautray, R. and Lions, J. -L., *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology (Volume 3)* Springer-Verlag, 1980.

[4] Chen, Z. and Hoffmann, K. -H., Numerical Studies of a Non-Stationay Ginzburg-Landau Model for Superconductivity *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 1995, **5**, 363–389.

[5] Giorgi,T. and Phillips, D., The Breakdown of Superconductivity Due to Strong Fields for the Ginzburg–Landau Model *SIAM J. Math. Anal.*(1999), Vol. 30, No. 2, pp. 341-359, 1999 (electronic) ; *SIAM Review*(2002),Volume 44, Number 2,pp. 237-256

[6] Gor'kov, L. P. and Eliashberg, G. M., Generalisation of Ginzburg-Landau equations for non-statioanry problems in the case of alloys with paramagnetic impurities, *Soviet Phys. J.E.P.T.*,1968, **27**, 328–334.

[7] Du, Q., Global Existence and Uniqueness of solutions of the Time-Dependent Ginzburg-Landau Model for Superconductivity, *Applicable Analysis*, 1994, **53**, 1–17.

[8] Tang, Qi, On Evolutionary System of Ginzburg-Landau Equations with Fixed Total Magnetic Flux, *Commun. in Partial Differential Equations*, 1995, **20**, 1–36.

[9] Tang, Qi and Wang, S., Time dependent Ginzburg-Landau equations of superconductivity, *Physica D*, 1995, **88**, 139–166.

[10] Schmid, A., A time dependent Ginzburg-Landau equation and its application to the problem of resistivity in the mixed state, *Phys. kondens. Materie*, 1966, **5**, 302–317.

[11] Temam, R., *Navier-Stokes Equations (Revised Edition)* , North Holland, 1984.

[12] Kaper,H.,Takac,P., " Ginzburg-Landau Equations with a Time-Dependent Magnetic Field " , Nonlinearity 11 (1998), 291-305

[13] Kaper,H., Fleckinger-Pelle,J. and Takac,P. , " Dynamics of the Ginzburg-Landau Equations of Superconductivity" Nonlinear Anal. - TMA., 32 (1998), 647-665

[14] Tinkham,M., Introduction to Superconductivity,1975,McGraw-Hill

[15] Tsutsumi, M., Kasai, H. and Ōishi, T., The Meissner effect and the Ginzburg-Landau equations in the presence of an externally imposed magnetic field, 38(6),July,1997, *J. Math. Phys.*

[16] Tsutsumi, M., Kasai, H., The time dependent Ginzburg-Landau Maxwell equations, (1999), 187-216, *Nonlinear Analysis, T.M.A.*

[17] Kasai, H.,Tsutsumi, M., On an asymptotic behavier of the Ginzburg-Landau Maxwell equations, (準備中)