

異方的反応場におけるモードスイッチング

— モードスイッチング系に関するモデル設計 —

奈良教育大学 中田 聡

京都大学大学院理学研究科物理学専攻 北畑裕之

1. はじめに

生命体を示す生命活動の維持機能（リズム・パターン形成、自己修復、自己再生、感覚など）は、非平衡下で生じる時間発展現象である。私達はこれまで、非線形・非平衡の観点から簡単な実験系を用いて、生命体を示す機能を人工的に再現又は制御する研究を行ってきた。本研究報告では、比較的作成と制御のしやすい実験系を用いて、時空間発展現象を発現させる。その中で、モードスイッチングやベクトルプロセスの制御について着目し、実験システムを構築すると共に普遍的なモデル実験系を確立させることを目的とした。

ペローゾブ・ジャボチンスキー反応（BZ 反応）は時空間発展する化学反応系として取り扱われ、そのメカニズムや現象・実験系の多様性に関する報告はここ数十年で多くの発展を遂げてきた。しかしながら、時空間発展現象を示す様々な実験系の中で、モードスイッチングやベクトル制御に関する研究例はあまりなく、これが本研究の学術的な特色である。

2. 実験

水道水の真下に器を置いて水を流すだけの簡単な実験系を使って、モード変化、履歴、及び振動が生じる現象について計算機シミュレーションと共に行った。特に明瞭な履歴と分岐点が得られるのが本実験系の特徴である。実験では、流量と水道管の径を可変パラメータとした。また鉛直方向のみ可動な「浮き」を用いて、器に貯まる水の水位を測定した。器の中での水のたまる様相はデジタルビデオカメラで撮影し、ライブラリー社の画像解析装置を用いて解析した。

(図 1)

3. 実験結果

流量が小さいとき容器に水を蓄えるモード I と、流量が大きいつき水を放出するモード II が現れ、ある流量で急激なモード変化が生じた。またモード変化 I→II と II

→I の2つの分岐点が明瞭に異なる履歴現象が存在し、分岐点は流径とレイノルズ数では依存性が異なった。また流径が小さい時、モードIを経て振動現象(モードIII)が現れた。これらの現象を代表的な写真と模式図を使って図2に示す。

次に流水の管内径(r_1)とモードスイッチングの関係について実験結果を図3に示す。 r_1 に依存して **Bistable** の領域が大きくなり、 r_1 が小さいときだけ **Mode III** が狭い領域で生じていることがわかる。

3. 考察

3a. 流入量と流出量に関する式

水道水に供給される水の流入量に関する式は次のように示される。

$$dV_{\text{cell}}/dt = dV_{\text{in}}/dt - dV_{\text{out}}/dt = Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}} \quad (1)$$

ここで V_{cell} : 容器の水の体積 (m^3)、 Q_{in} : 蛇口からの流入量 (m^3/s)、 Q_{out} : 容器からの流出量 (m^3/s)。

初期条件では、 $V_{\text{cell}}(t=0)=0$ より、 V_{cell} が V_{max} まで満たされる条件において、

$$dV_{\text{cell}}/dt = Q_{\text{in}} \quad (2)$$

安定なモードIとIIの状態においては理想的に $dV_{\text{cell}}/dt=0$ であるので、

$$Q_{\text{in}} = Q_{\text{out}} \quad (3)$$

一方、振動モードであるモードIIIにおいては、

$$Q_{\text{in}} \neq Q_{\text{out}} \quad (4)$$

十分な時間 T の測定を行う場合($T \gg 0$)、流出量の平均は流入量 Q_{in} になる。

$$(1/T) \int Q_{\text{out}}(t) dt = Q_{\text{in}} \quad (5)$$

次に、 $Q_{\text{out}}(t)$ について、密度 ρ の水が流量 Q (ml/s)、速度 v_{out} (m/s) で器から噴出すことを運動方程式で考える。噴流が外に飛び出す力を F とすると

$$F = \rho Q v_{\text{out}} = \rho S v_{\text{out}}^2 \quad (6)$$

器の壁面から飛び出す流体の断面積が流量に関らずほぼ一定（つまり $dS/dt=0$ ）であり、また $dv_{out}/dt=\alpha$ （ $=\text{const}$ 、つまり噴出するとき加速度 dv_{out}/dt を受ける）であると仮定する。(6)式の両辺を時間で微分すると、

$$dF/dt = \rho(v_{out}^2(dS/dt) + 2Sv_{out}(dv_{out}/dt)) = 2\rho\alpha Sv_{out} = 2\rho\alpha Q_{out} \quad (7)$$

(7)式を(1)式を代入すると、

$$(1/2\rho\alpha) dF/dt = Q_{in} - dV_{cell}/dt \quad (8)$$

F を $P(=F/S$: 単位面積あたりの圧力)と置きかえ、さらに $b=2\rho\alpha/S$ とすると、

$$dP/dt = bQ_{in} - b(dV_{cell}/dt) \quad (9)$$

が得られる。

次に、 dV_{cell}/dt について考察する。単位時間あたり体積 ΔV 変化したときの仕事は $P\Delta V$ で表される。また、

$$V_{cell} = V_{max} - V_{pore} \quad (10)$$

である。ここで、 V_{max} は容器の最大容量、 V_{pore} は水の穴の体積である。

$$dV_{cell}/dt = -dV_{pore}/dt = PV_{pore} \quad (11)$$

と置き換えてもよい。ここでPは水面に加わる水圧であり、前述の水が外へ飛び出す方向の圧力とはベクトルの符号（正負）が逆になっている。

3b. エネルギーに関する考察

流水の運動を考える。水道水からの流入（流量 Q_{in} ）に関するエネルギー E_{in} は、

$$E_{in} = (1/2) \int Q_{in} \rho v^2 dt \quad (12)$$

で与えられる。ここで流量大かつ容器への衝突距離が短いとして、重力の効果は無視している。(14)式を時間で微分すると、

$$dE_{in}/dt=(1/2)Q_{in}\rho v_{in}^2 \quad (13)$$

ここで、 $Q_{in}\rho$ は単位時間当たりの流入の重量である。同様にして、容器からの流出（流量 Q_{out} ）に関するエネルギー E_{out} は、

$$dE_{out}/dt=(1/2)Q_{out}\rho v_{out}^2 \quad (14)$$

容器の運動エネルギーについては、

$$dE_{cell}/dt=dE_{in}/dt - dE_{out}/dt - E_r \quad (15)$$

E_r は摩擦に関するエネルギー喪失項である。この項のイメージは、水道水からの流入によって水面が叩かれ、水のくぼみができる、つまり、水のかぼみがないとくぼみを作るためのエネルギーが必要であり、くぼみ（または深さ）の大きさとともにそのエネルギーが下がり、モード I I では水位がゼロとみなせるので、 $E_r=0$ である。つまり、

$$E_r=f(h_0-h) \quad (16)$$

のような関数形で表すことができる。

さて、容器の水の体積についての考察する。容器の水の体積を V_{cell} とする。まずくぼみが半球状（半径 r ）であると仮定すると、

$$V_{cell}=V_{max}-V_{pore}=A(r_0^3-r^3)=Ar_0^3(1-r_h^3) \quad (17)$$

(17)式の時間微分は、

$$dV_{cell}/dt=-3A r_0^3 r_h^2 (dr_h/dt) = Q_{in} - Q_{out} \quad (18)$$

$$dr_h/dt = B(Q_{out} - Q_{in})/r_h^2 = C\Delta Q/r_h^2 + D(E_{pore} + E_r)/r_h^2 \quad (19)$$

ところで、 E_{pore} の位置エネルギーに関する項は、

$$\begin{aligned} E_{pore} &= \pi\rho g \int (r_h^2 - h^2)(h_0 - h)dh \\ &= \pi\rho g ((1/4)h^3 - (h_0/3)h^2 - (1/2)r_h^2 h + h_0 r_h^2)h \end{aligned} \quad (20)$$

以上をまとめると

$$dr_h/dt = C'P - f(r_h) \quad (21)$$

を導くことができる。ここで、ナビエ・ストークスの運動方程式との関係について検討する。ナビエ・ストークスの運動方程式を1次元のみで考えると、

$$\partial u/\partial t + u\partial u/\partial x = F_x - \{(1/\rho)\partial p/\partial x - \nu(\partial^2 u/\partial x^2)\} \quad (22)$$

が得られる。(22)式は(21)式に相当するので、ナビエ・ストークスの式からの導出として取り扱うことができる。本実験系では、 $(1/\rho)\partial p/\partial x$ は圧力勾配で、容器の最大のレベルから隆起した水量によって水圧が加わる項に相当し、 $\nu(\partial^2 u/\partial x^2)$ は水のくぼみを作るための粘性抵抗に相当する。

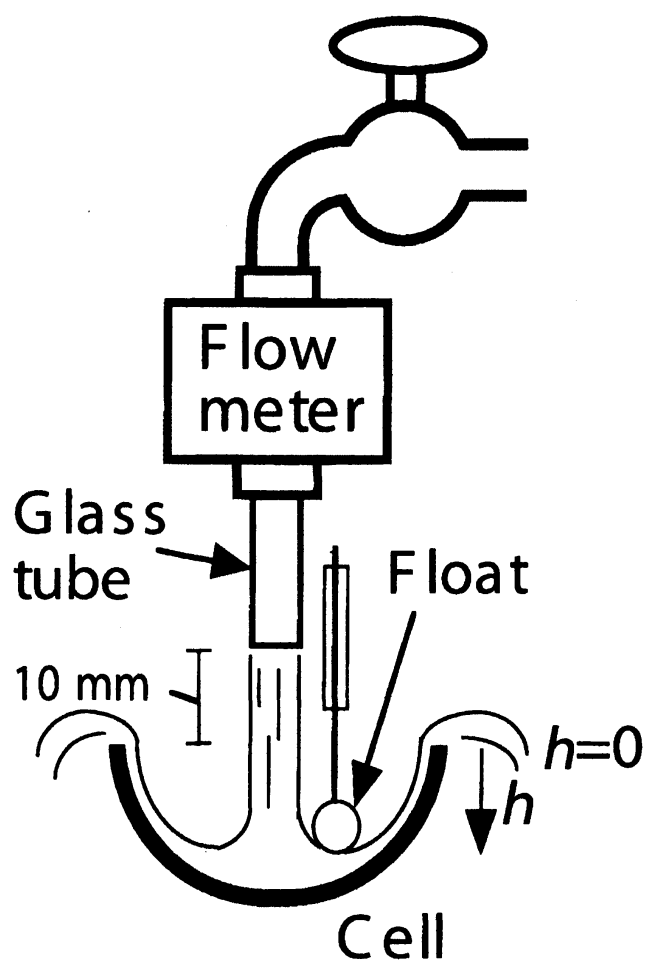


Fig.1 Experimental apparatus for mode-switching with a water faucet.

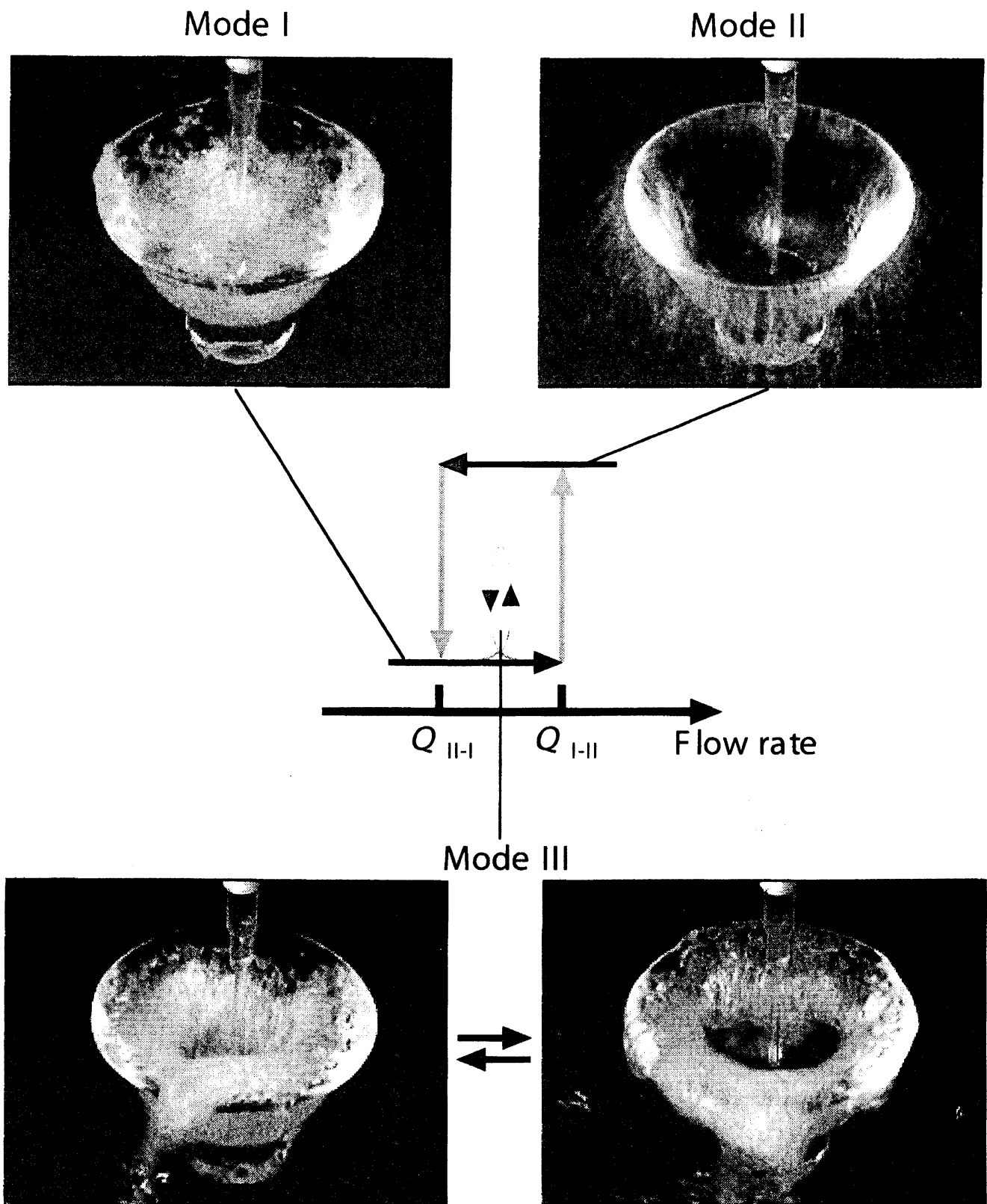


Fig.2 Schematic representation of the three modes (I, II, III) as a function of the flow rate, Q , and the snapshots of three modes when the inner radius of the water tube is 1.25 mm. Upon scanning with an increase in Q , Mode I changed to II at Q_{I-II} via Mode III, and upon scanning with a decrease in Q , Mode II changed to Mode I at Q_{II-I} without Mode III.

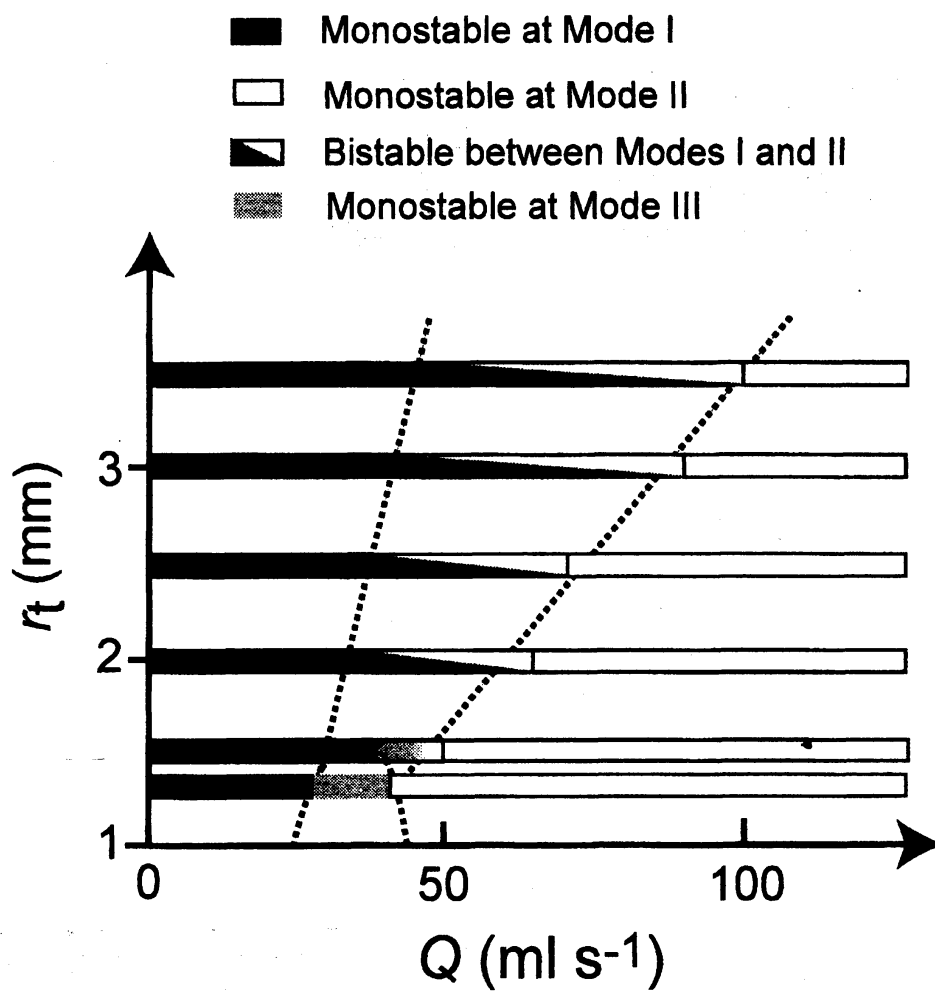


Fig.3 Dependence of r_t (inner radius of water tube) on the bifurcation value as (a) flow rate, Q .