数理解析研究所講究録 1315 巻 2003 年 91-105

境界値問題における制限つきエネルギー不等式と解の数値的近似法

奈良女子大学・理学部　坂本礼子(Reiko SAKAMOTO)
Faculty of Science, Nara Women's University

まえがき

線型偏微分方程式の境界値問題の研究において，解の存在と一意性といった基本問題は大枠解決済みであると考えてよいであろう．それに反して，その解を数値的に捕らえられるのは，きわめて限られた問題についてであるように見うけられる．現代のようなコンピュータ時代にあって，理論的に解の存在が分かったからといって，それで満足できるわけではない．何とかして，一般に，理論的に得られた解を数値的に捕らえられないかと考えるのが人情である．この方面の研究では，微分方程式自身を差分方程式などに一旦置き換えた上でそれを解く，という方法がある．しかし，差分化に当たっては，もとの微分方程式の特性を反映するような差分化を選ばねばならない．そこが，素人には難しいところである．そこで，差分化を経ずに，解の近似に至る道は無いものか考えてみた．

常微分方程式の初期値問題の解を求める場合には，一旦積分方程式に帰着させて，逐次近似法が用いられる．これだと，解に近づく方法を与えていることになる．非線型偏微分方程式の解を求めるときにも，しばしば逐次近似法が用いられる．しかし，この場合には，逐次近似の各段階において，線型問題の抽象的解を用いており，すでに，数値的に捕らえることのできないもので近似していくということになってしまっているのである．やはり原点に戻って，線型問題の数値的近似の問題と真正面から向き合うしかないように思われる．

そこで，線型問題の解を求める問題を振り返ってみると，およそ次のようになるであろう．

① 共役問題に対するエネルギー不等式を導く

② ①に基いた抽象的ヒルベルト空間を作り，そこでリースの定理を用いて解を見つける

このように，抽象的ヒルベルト空間において，抽象的リースの定理などというものを用いて見つけてきた解というものは，到底数値的に手の届くものではないと初めからあきらめていたところがある．ところが，この抽象的ヒルベルト空間にしばしとどまって眺めてみると，この解は思いのほか簡単に捕らえられるものであることが分かった．このことについては，[1]で考察した．すなわち，偏微分方程式の境界値問題

$$
(P_0)\quad \begin{cases} Au=f & \text{in } \Omega \\ B_j u=0 \quad \text{on } \Gamma & (j\in J) \end{cases}
$$

について，共役問題

$$
(P^*)\begin{cases} A^* v=g & \text{in } \Omega \\ \mathcal{B}_j^* v=g_j \quad (j\in J^*) & \text{on } \Gamma \end{cases}
$$

に対するエネルギー不等式

$$
(E^*)\qquad \|v\| \leqq C(\|A^*v\| + \Sigma_{j\in J^*} < \mathcal{B}_j^* v|_\Gamma >_{\mu j}) \qquad (\forall v\in H^\infty(\Omega))
$$

を仮定して(①)，抽象的ヒルベルト空間を導入し，リースの定理を用いて L^2 弱解の存在を示した(②)．さらに，この抽象的ヒルベルト空間におけるフーリエ級数展開の理論から，

③　②で得られた解の数値的近似法

を論じた．

勿論，上にいう数値的近似法は，依然として，理論的なものである．つまり，コンピュータ解析の際に生じる誤差に対してどのような安定性があるのかといった問題の考察は今後の課題として残されている．

さて，以下においては，考える領域Ωの境界は滑らかなものとして，次のような問題を考えてみよう．

第１の問題．考える問題は

$$
(P_0)\quad \begin{cases} \triangle u+x_1\partial_{x1}u=f & \text{in } \Omega \\ (d/dn)u=0 & \text{on } \Gamma \end{cases}
$$

ただし，$\Omega\subset\{|x|<1\}$とする．これに対する共役問題は

$$
(P^*)\begin{cases} \triangle v-x_1\partial_{x1}v-v=g & \text{in } \Omega \\ (d/dn)v=g_1 & \text{on } \Gamma \end{cases}
$$

である．(P^*)に対するエネルギー不等式

$$
(E^*)\qquad \|v\| \leqq C(\|g\| + <g_1>) \qquad (\forall v\in H^\infty(\Omega))
$$

が成り立つ(①)ことが容易に分かるから，②の方法で(P_0)の解が得られ，③の方法で，その解の数値的近似法が得られる．ところが，(P_0)の解は一意的ではない．②の方法では，(P_0)の解のうちのどのような解を捕らえたのであろうか．

第２の問題．考える問題は

$$(P_0)\ \begin{cases} \triangle u=f & \text{in } \Omega \\ (d/dn)u=0 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

とする．これに対する共役問題は

$$(P^*)\ \begin{cases} \triangle v=g & \text{in } \Omega \\ (d/dn)v=g_1 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

である．(P^*)に対しては，解の一意性が成り立たない．したがって，①自身が成り立たない．このような場合，(P_0)の解の１つを数値的に捕らえることは不可能であろうか．

以上のような問題意識のもとで，この問題を以下のように考察する．

① 共役問題に対する制限つきのエネルギー不等式を仮定する

② ①に基いた抽象的ヒルベルト空間を作り，そこでリースの定理を用いて解を見つけ，その特性を調べる

③ ②で得られた解の数値的近似法を求める

§1. 問題設定とグリーンの定理

(1) $\Omega(\subset\mathbb{R}^n)$は有界な領域，その境界$\Gamma=\partial\Omega$ はC^∞とする．

(2) $A=\Sigma_{|\nu|\leq m}\ a_\nu(x)\partial_x{}^\nu$,　　$a_\nu(x)\in C^\infty(\overline{\Omega})$

$B_j=\Sigma_{|\nu|\leq j}\ b_{j\nu}(x)\partial_x{}^\nu$,　　$b_{j\nu}(x)\in C^\infty(\Gamma)$　　$(j\in J,\ J\subset\{0,1,..,m\text{-}1\})$

とする．ΓはA, B_jに対して非特性的であるとする．すなわち

$$\Sigma_{|\nu|=m}\ a_\nu(x)n(x)^\nu\neq 0 \quad \text{on } \Gamma$$

$$\Sigma_{|\nu|=j}\ b_{j\nu}(x)n(x)^\nu\neq 0 \quad \text{on } \Gamma$$

を満たしているとする．ただし，$n(x)$は $x(\in\Gamma)$ における単位内法線とする．

さて，与えられたデータ $f\in L^2(\Omega)$に対し

$$(P_0)\ \begin{cases} Au=f & \text{in } \Omega \\ B_ju=0 & \text{on } \Gamma \quad (j\in J) \end{cases}$$

を満たす $u\in L^2(\Omega)$を求める境界値問題を考える．まず

$J^c\cup J=\{0,1,\ldots,m\text{-}1\}$,　　$J^c\cap J=\phi$　，　$J^*=\{j\,|\,m\text{-}1\text{-}j\in J^c\}$

$B_j=(d/dn)^j$　　$(j\in J^c)$

とおき，$\{B_j (j=0,1,\dots,m-1)\}$ としておく．そのとき

$$\mathcal{B}_j = \Sigma_{|\nu|\leqq j} \ \beta_{j\nu}(x)\partial_x^{\ \nu} \quad (j=0,1,..,m-1)$$

であって

$$\Sigma_{|\nu|=j} \ \beta_{j\nu}(x)n(x)^{\nu} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (j=0,1,..,m-1)$$

となるものが定義でき，次のグリーンの定理が成り立つ．

Lemma 1.1. (グリーンの定理)　$u, Au \in L^2(\Omega)$ のとき

$$<(d/dn)^k u|_{\Gamma}>_{-k-m+½} \ \leqq C(\|u\| + \|Au\|) \qquad (k=0,1,\dots,m-1)$$

となる．また

$$(Au,v)-(u,A^*v) = -\Sigma_{j\in J}<B_j u|_{\Gamma}, \mathcal{B}_{m-1-j}^{\ *}v|_{\Gamma}> - \Sigma_{j\in J^*}<B_{m-1-j}u|_{\Gamma}, \mathcal{B}_j^{\ *}v|_{\Gamma}>$$
$$(\forall v \in H^{2m-1}(\Omega))$$

が成り立つ．ここで，記号の意味は次のようである．

(1)　$(u,v)=(u,v)_{L2(\Omega)}$　,　$\|u\| = \|u\|_{L2(\Omega)}$

(2)　実数σに対して，$<u>_{\sigma} = \|u\|_{H\sigma(\Gamma)} = \|\Lambda^{\sigma}u\|_{L2(\Gamma)}$

(3)　実数σと $u\in H^{-\sigma}(\Gamma)$，$v\in H^{\sigma}(\Gamma)$ に対して，$<u,v>=(\Lambda^{-\sigma}u,\ \Lambda^{\sigma}v)_{L2(\Gamma)}$

ここでは，これを認めて話を進めることにしよう．

(P_0)に対する共役問題(P^*)を次のように定義する．

$$(P^*) \begin{cases} A^*v=g & \text{in } \Omega \\ \mathcal{B}_j^{\ *}v=g_j & \text{on } \Gamma \quad (j\in J^*) \end{cases}$$

いま

$$K=\{\ \phi\in L^2(\Omega)\ |\ \ A\phi=0, \quad B_j\phi|_{\Gamma}=0 \quad (j\in J)\}$$
$$K^*=\{\ \phi\in L^2(\Omega)\ |\ \ A^*\phi=0, \quad \mathcal{B}_j^{\ *}\phi|_{\Gamma}=0 \quad (j\in J^*)\}$$

とする．グリーンの定理より

$$K=\{\ \phi\in L^2(\Omega)\ |\ \ (\phi,A^*v)=\Sigma_{j\in J^*}<B_{m-1-j}\phi|_{\Gamma}, \mathcal{B}_j^{\ *}v|_{\Gamma}> \quad (\forall v \in H^{2m-1}(\Omega))\}$$
$$K^*=\{\ \phi\in L^2(\Omega)\ |\ \ (Au,\phi)=-\Sigma_{j\in J}<B_j u|_{\Gamma}, \mathcal{B}_{m-1-j}^{\ *}\phi|_{\Gamma}> \quad (\forall u\in H^{2m-1}(\Omega))\}$$

と表せる．このことから，K, K^* は$L^2(\Omega)$の閉部分空間となることが分かる．そこで

$$K^{\perp}=\{\ f\in L^2(\Omega)\ |\ \ (f,\phi)=0\ (\forall\phi\in K)\}$$
$$K^{*\perp}=\{\ f\in L^2(\Omega)\ |\ \ (f,\phi)=0\ (\forall\phi\in K^*)\}$$

とかくことにしよう．

(#)　$K, K^* \subset H^p(\Omega)$ $(p \geqq 2m-1)$
が満たされているものと仮定しておく．

いま，$m \leqq q \leqq p$ なる整数 q を取り

$$M^* = K^{*\perp} \cap H^q(\Omega)$$

とおくと，M^* は $H^q(\Omega)$の閉部分空間であり，任意の $u \in H^q(\Omega)$に対し

$$u = \phi + \xi \qquad (\phi \in K^*,\ \xi \in M^*)$$

と一意的に表せ，$\|u\|^2 = \|\phi\|^2 + \|\xi\|^2$ となる．

制限つきのエネルギー不等式$(\mathcal{E}_0^*)$が成り立つとは

$(\mathcal{E}_0^*)$　$\|v\| \leqq C\|A^*v\|$ 　　　$(\forall v \in M^*, \mathcal{B}_j^* v|_\Gamma = 0 (j \in J^*))$

が成り立つことである．
制限つきのエネルギー不等式$(\mathcal{E}^*)$が成り立つとは

$(\mathcal{E}^*)$　$\|v\| \leqq C(\|A^*v\| + \Sigma_{j \in J^*} \langle \mathcal{B}_j^* v|_\Gamma \rangle_{\mu j})$　$(\forall v \in M^*)$

が成り立つことである．ただし，$\mu_j = q - ½ - j$ とする．

Lemma 1.2.　$(\mathcal{E}_0^*)$ならば$(\mathcal{E}^*)$である．

<u>Proof.</u> (1)　$v \in M^*$とする．$M^* \subset H^q(\Omega)$だから

$$\begin{cases} g = A^*v \in H^{q-m}(\Omega) \\ g_j = \mathcal{B}_j^* v|_\Gamma \in H^{q-½-j}(\Gamma) \quad (j \in J^*) \end{cases}$$

とおく．Γは滑らかであるから

$$\mathcal{B}_j^* V|_\Gamma = g_j \quad (j \in J^*), \qquad \|V\|_q \leqq C\Sigma_{j \in J^*} \langle g_j \rangle_{q-1/2-j}$$

を満たす $V \in H^q(\Omega)$がある $(\because q \geqq m)$．そこで，$w = v - V$ とおけば，$w \in H^q(\Omega)$であって

$$\begin{cases} A^*w = g - A^*V \\ \mathcal{B}_j^* w|_\Gamma = 0 \quad (j \in J^*) \end{cases}$$

を満たす．
(2)　$w \in H^q(\Omega)$ であるから

$$w = \phi + \xi \qquad (\phi \in K^*,\quad \xi \in M^*)$$

と表せる．また，$\xi \in M^*$ は

$$\begin{cases} A^*\xi = g - A^*V \\ \mathcal{B}_j^* \xi|_\Gamma = 0 \quad (j \in J^*) \end{cases}$$

を満たす(ξは M^* に属し，0 境界条件を満たす)．したがって，ξに対して$(\mathcal{E}_0^*)$を適用する

$\|\xi\| \leqq C\|A^*\xi\| = C\|g-A^*V\| \leqq C'(\|g\| + \Sigma_{j\in J^*} <g_j>_{q-½-j})$

が成り立つ．

(3)ところで，$V\in H^q(\Omega)$ であるから，これも

$V=\psi+\eta \quad (\psi\in K^*,\ \ \eta\in M^*)$

と表せ，　$\|u\|^2=\|\phi\|^2+\|\xi\|^2$ である．

(4)したがって，(2),(3)より

$v=w+V=(\phi+\psi)+(\xi+\eta),\quad \phi+\psi\in K^*,\quad \xi+\eta\in M^*$

であるが，$v\in M^*$ であるから

$v=\xi+\eta$

である．したがって

$\|v\| \leqq \|\xi\| + \|\eta\| \leqq \|\xi\| + \|V\| \leqq C(\|g\| + \Sigma_{j\in J^*} <g_j>_{q-½-j})$

が成り立つ．すなわち，$(\mathcal{E}^*)$が成り立つ．　□

以下，$(\mathcal{E}_0^*)$が成り立っているものとする．したがって，$(\mathcal{E}^*)$が成り立っているものとする．そのとき

$【v】^2=\|A^*v\|^2+\Sigma_{j\in J^*} <\mathcal{B}_j^*v|_\Gamma>_{\mu j}^2$

とし，M^* をノルム【 】により完備化したヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ としよう．

いま，$f\in L^2(\Omega)$を固定して

$L[v]=(f,v) \quad (\forall v\in\mathcal{H})$

とおけば、L は $\mathcal{H}$ 上の連続歪線型汎関数となることが分かる．実際

$|L[v]|=|(f,v)| \leqq \|f\|\ \|v\| \leqq C\|f\|【v】$

が成り立つからである．したがって、リースの定理によれば，$w\in\mathcal{H}$ があって

$L[v]=【w,v】 \quad (\forall v\in\mathcal{H})$

と表される．すなわち，$w\in\mathcal{H}$ があって

$(f,v)=【w,v】 \quad (\forall v\in\mathcal{H})$

が成り立つ．このとき，w を f に対するリース関数ということにしよう．

§2. リースの定理による解の存在と一意性

Theorem 2.1. $f\in K^{*\perp}$ とする．f に対するリース関数 $w\in\mathcal{H}$ に対して，$u=A^*w$ とおけば，$u\in L^2(\Omega)$であって

$$\begin{cases} Au=f & \text{in } \Omega \\ B_j u|_\Gamma=0 & (j\in J) \end{cases}$$

を満たす．さらに

$$B_{m-1-j}u|_\Gamma=-\Lambda^{2\mu j}\mathcal{B}_j^* w|_\Gamma \quad (j\in J^*)$$

を満たす．

<u>Proof.</u> (1) $f\in L^2(\Omega)$ に対するリース関数 w は

$$(f,v)=(A^*w, A^*v)+\Sigma_{j\in J^*}<\mathcal{B}_j^*w|_\Gamma, \mathcal{B}_j^*v|_\Gamma>_{\mu j} \qquad (\forall v\in\mathcal{H})$$

を満たすから，$u=A^*w$ とおくと，u は

$$(f,v)-(u, A^*v)=\Sigma_{j\in J^*}<\mathcal{B}_j^*w|_\Gamma, \mathcal{B}_j^*v|_\Gamma>_{\mu j} \qquad (\forall v\in\mathcal{H})\ldots\ldots①$$

を満たす．

(2) ①における $(\forall v\in\mathcal{H})$ は $(\forall v\in H^q(\Omega))$ に置き換えることができる．実際，任意の $v\in H^q(\Omega)$ に対して

$$v=\phi+\xi, \quad (\phi\in K^*, \quad \xi\in M^*)$$

と表せる．$M^*\subset\mathcal{H}$ であるから，$\xi\in\mathcal{H}$ である．したがって，①より

$$(f,\xi)-(u, A^*\xi)=\Sigma_{j\in J^*}<\mathcal{B}_j^*w|_\Gamma, \mathcal{B}_j^*\xi|_\Gamma>_{\mu j}$$

が成り立つ．また

$$A^*\phi=0, \quad \mathcal{B}_j^*\phi|_\Gamma=0 \quad (j\in J^*) \quad (\because \phi\in K^*)$$

$$(f,\phi)=0 \quad (\because f\in K^{*\perp})$$

であるから

$$(f,v)-(u, A^*v)=\Sigma_{j\in J^*}<\mathcal{B}_j^*w|_\Gamma, \mathcal{B}_j^*v|_\Gamma>_{\mu j} \qquad (\forall v\in H^q(\Omega))\ldots\ldots①'$$

が成り立つ．

(3)したがって，①'より，とくに

$$(f,v)-(u, A^*v)=0 \qquad (\forall v\in\mathcal{D}(\Omega))$$

が成り立つ．すなわち

$$Au=f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

が成り立つ．したがって

$$(Au,v)-(u, A^*v)=\Sigma_{j\in J^*}<\mathcal{B}_j^*w|_\Gamma, \mathcal{B}_j^*v|_\Gamma>_{\mu j} \qquad (\forall v\in H^q(\Omega))\ldots\ldots①''$$

が成り立つ．

(4)一方，グリーンの定理より

$$(Au,v)-(u, A^*v)=-\Sigma_{j\in J}<B_j u|_\Gamma, \mathcal{B}_{m-1-j}^*v|_\Gamma>-\Sigma_{j\in J^*}<B_{m-1-j}u|_\Gamma, \mathcal{B}_j^*v|_\Gamma> \qquad (\forall v\in H^{2m-1}(\Omega))\ldots\ldots②$$

である．したがって，①''と②より

$$\Sigma_{j\in J^*}<\mathcal{B}_j^*w|_\Gamma, \mathcal{B}_j^*v|_\Gamma>_{\mu j}=-\Sigma_{j\in J}<B_j u|_\Gamma, \mathcal{B}_{m-1-j}^*v|_\Gamma>-\Sigma_{j\in J^*}<B_{m-1-j}u|_\Gamma, \mathcal{B}_j^*v|_\Gamma> \qquad (\forall v\in H^q(\Omega))\ldots③$$

である$(q'=\max(q,2m-1))$．したがって

$$\left\{\begin{array}{ll} B_j u|_\Gamma=0 & (j\in J) \\ B_{m-1-j}u|_\Gamma=-\Lambda^{2\mu_j}\mathcal{B}_j^* w|_\Gamma & (j\in J^*) \end{array}\right.$$ □

Corollary 2.1. $\{f\in L^2(\Omega), f_j\in H^{m-\frac{1}{2}-j}(\Gamma)\ (j\in J)\}$ が

$(\mathcal{R})\quad (f,\phi)+\Sigma_{j\in J}\langle f_j, \mathcal{B}_{m-1-j}{}^*\phi|_\Gamma\rangle=0\quad (\forall\phi\in K^*)$

を満たすとする．$U\in H^m(\Omega)$ は $B_jU|_\Gamma=f_j(j\in J)$を満たすものとする．そのとき，f-AU に対するリース関数を w とし，$u=A^*w+U$ とおけば，$u\in L^2(\Omega)$ は

$$(P)\quad \left\{\begin{array}{ll} Au=f & \text{in }\Omega \\ B_ju=f_j & \text{on }\Gamma\quad (j\in J) \end{array}\right.$$

を満たす．

<u>Proof</u>. (1) $F=f-AU$ とおく．$\{f,f_j\}$が$(\mathcal{R})$を満たしていることと，$F\in K^{*\perp}$ となることとは同値であることを見てみよう．実際，$U\in H^m(\Omega)$かつ $K^*\subset H^{2m-1}(\Omega)$であるから，グリーンの定理より

$$(AU,\phi)+\Sigma_{j\in J}\langle f_j, \mathcal{B}_{m-1-j}{}^*\phi|_\Gamma\rangle=0\qquad(\forall\phi\in K^*)$$

である．したがって

$$(F,\phi)=(f-AU,\phi)=(f,\phi)+\Sigma_{j\in J}\langle f_j, \mathcal{B}_{m-1-j}{}^*\phi|_\Gamma\rangle\qquad(\forall\phi\in K^*)$$

である．したがって，$(\mathcal{R})$が成り立つことと

$$(F,\phi)=0\qquad(\forall\phi\in K^*)$$

が成り立つことは同値となる．

(2)そこで，Theorem 2.1 より，F に対するリース関数 w に対して，$v=A^*w$ とおくと，

$$\left\{\begin{array}{ll} Av=F & \text{in }\Omega \\ B_jv=0 & \text{on }\Gamma\quad (j\in J) \end{array}\right.$$

を満たす．

$$u=v+U\in L^2(\Omega)$$

とおけば，u は(P)の解である． □

さて

$$\tau=\{u\in L^2(\Omega)\mid Au\in L^2(\Omega), (u,\phi)+\Sigma_{j\in J^*}\langle B_{m-1-j}u|_\Gamma, B_{m-1-j}\phi|_\Gamma\rangle_{-\mu_j}=0\ (\forall\phi\in K)\}$$

とおく．明らかに，$K\cap\tau=\{0\}$ である．そのとき

Theorem 2.2. $f\in K^{*\perp}$ に対するリース関数 $w\in\mathcal{H}$ に対して，$u=A^*w$ とおけば，u はτに属す．また，τに属す(P)の解は唯一つである．

Proof. (1) Theorem 2.1 より

$$\{u, -B_{m-1-j}u|_\Gamma (j\in J^*)\}=\{A^*w, \Lambda^{-2\mu j}\mathcal{B}_j^*w|_\Gamma \quad (j\in J^*)\}$$

であるから

$$\{A^*w, \mathcal{B}_j^*w|_\Gamma \quad (j\in J^*)\}=\{u,-\Lambda^{-2\mu j}B_{m-1-j}u|_\Gamma (j\in J^*)\}$$

を満たす.

(2)ところで，$w, A^*w\in L^2(\Omega), K\subset H^{2m-1}(\Omega)$であるから，グリーンの定理より

$$(\phi,u)+\Sigma_{j\in J^*}<B_{m-1-j}\phi|_\Gamma, \Lambda^{-2\mu j}B_{m-1-j}u|_\Gamma>=0 \quad (\forall\phi\in K)$$

である．すなわち，$u\in\tau$ である．

(3) (P)の解でτに属するものが2つあったとすると，その差 u は $K\cap\tau=\{0\}$ に属す．□

Corollary 2.2. $U\in H^m(\Omega)$ は $\{B_jU|_\Gamma=0 \quad (j\in J)\}$ かつ $U\notin\tau$ を満たすものとする．$-AU$ のリース関数を w とし，$u=A^*w+U$ とおけば，$u\in K-\{0\}$ である．

Proof. Corollary 2.1 より，$u\in K$ である．Theorem 2.2 より，$A^*w\in\tau$ であるから

$$(u-U,\phi)+\Sigma_{j\in J^*}<B_{m-1-j}(u-U)|_\Gamma, B_{m-1-j}\phi|_\Gamma>_{-\mu j}=0 \ (\forall\phi\in K)$$

が成り立つ．すなわち

$$(u,\phi)+\Sigma_{j\in J^*}<B_{m-1-j}u|_\Gamma, B_{m-1-j}\phi|_\Gamma>_{-\mu j}$$
$$=(U,\phi)+\Sigma_{j\in J^*}<B_{m-1-j}U|_\Gamma, B_{m-1-j}\phi|_\Gamma>_{-\mu j} \quad (\forall\phi\in K)$$

が成り立つ．一方，$U\notin\tau$ であることから

$$(U,\phi)+\Sigma_{j\in J^*}<B_{m-1-j}U|_\Gamma, B_{m-1-j}\phi|_\Gamma>_{-\mu j} \quad \neq 0 \quad (\exists\phi\in K)$$

が成り立つ．したがって

$$(u,\phi)+\Sigma_{j\in J^*}<B_{m-1-j}u|_\Gamma, B_{m-1-j}\phi|_\Gamma>_{-\mu j} \quad \neq 0 \quad (\exists\phi\in K)$$

が成り立つ．したがって，$u\neq 0$ である．□

§3. 数値的近似

Theorem 2.1 で得られた解は，数値的近似可能であろうか．

$\{v_k \ (k=1,2,\ldots)\}$が $\mathcal{H}$ の基底であるとは，その中の任意有限個は1次独立であり，$\{v_k \ (k=1,2,\ldots)\}$の張る空間が $\mathcal{H}$ で稠密となっていることであるとする．

Theorem 3.1. $\{v_k \ (k=1,2,\ldots)\}$は $\mathcal{H}$ の基底であるとする．$f\in K^{*\perp}$ に対するリース関数を w とし，$u=A^*w$ とする．そのとき

$$u_N=\big((f,v_1),\ldots,(f,v_N)\big)\ \Gamma_N^{-1}\begin{pmatrix}A^*v_1\\ \vdots\\ A^*v_N\end{pmatrix}$$

$$u_N \to u \quad (N\to\infty) \quad \text{in} \quad L^2(\Omega)$$

が成り立つ．ただし

$$\Gamma_N = (\,[v_k, v_s]\,)_{k,s=1,2,\dots,N}$$

とする．

<u>Proof.</u> (1) $\{v_1, v_2, \dots\dots\}$ が $\mathcal{H}$ の基底であるとき， $\{v_1\hat{}, v_2\hat{}, \dots\dots\}$ を$\mathcal{H}$ におけるシュミットの方法による $\{v_1, v_2, \dots\dots\}$ の正規直交化であるとする．そのとき，任意の $w \in \mathcal{H}$ に対して

$$w_N = \Sigma_{1\leqq k\leqq N}\ [w, v_k\hat{}\,]\, v_k\hat{} \to w \quad \text{in} \quad \mathcal{H}$$

となる．さらに,

$$w_N = ([w, v_1], \dots, [w, v_N])\, \Gamma_N^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

と表されることは，よく知られたところである．ただし，$\Gamma_N = ([v_j, v_k])_{j,k=1,\dots,N}$ とする．

(2) さて， $w\in\mathcal{H}$ は

$$[w, v] = (f, v) \qquad (\forall v\in\mathcal{H})$$

を満たすものであったから，

$$[w, v_k] = (f, v_k) \qquad (k=1,2,\dots\dots)$$

である．したがって

$$w_N = ((f, v_1), \dots, (f, v_N))\, \Gamma_N^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

と表される．

(3) (1)より

$$w_N \to w \quad \text{in} \quad \mathcal{H}$$

であるから

$$u_N = A^* w_N \to A^* w = u \quad \text{in} \quad L^2(\Omega)$$

である．(2)より

$$u_N = A^* w_N = ((f, v_1), \dots, (f, v_N))\, \Gamma_N^{-1} \begin{pmatrix} A^* v_1 \\ \vdots \\ A^* v_N \end{pmatrix}$$

と表される． □

$\mathcal{H}$の基底はどのようにして見つけて来ることができるであろうか．

Ωの境界は滑らかであるから，

Lemma 3.1. $\mathrm{diam}(\Omega)<a\pi$ とする．そのとき

$\{\exp(i a^{-1}\ \alpha\cdot x) \mid \alpha\in\mathbb{Z}^n\}$

は$H^q(\Omega)$の基底である．

容易に分かるように，

Lemma 3.2. $\{v_k\ (k=1,2,\dots)\}$が$H^q(\Omega)$の基底であるとき

$v_k=\phi_k+\xi_k,\quad \phi_k\in K^*,\quad \xi_k\in M^*$

とおけば，$\{\xi_k\ (k=1,2,\dots)\}$の張る空間は$\mathcal{H}$で稠密となっている．したがって，$\{\xi_k\ (k=1,2,\dots)\}$のうち，１次従属となるものを順次取り除いたものを $\{\xi'_j\ (j=1,2,\dots)\}=\{\xi_{kj}\ (j=1,2,\dots)\}$とすれば，これが$\mathcal{H}$の基底である．

$\{v_k\ (k=1,2,\dots)\}$が$H^q(\Omega)$の基底であるとし，$\{\xi'_j\ (j=1,2,\dots)\}$は Lemma 3.2 により作られた$\mathcal{H}$の基底であるとする．対応して，$\{v'_j\ (j=1,2,\dots)\}=\{v_{kj}\ (j=1,2,\dots)\}$とする．また

$【\xi_k,\xi_s】=【v_k, v_s】$

$A^*\xi_k=A^*v_k$

$(f,\xi_k)=(f,v_k)\qquad(\forall f\in K^{*\perp})$

であるから

Corollary 3.1. $\{v_k\ (k=1,2,\dots)\}$が$H^q(\Omega)$ の基底であるとする．$\{v'_k\ (k=1,2,\dots)\}$は上の手続きで得られたものとする．$f\in K^{*\perp}$ に対するリース関数を w とし，$u=A^*w$ とする．そのとき

$$u_N=\big((f,v'_1),\ \dots\ ,(f,v'_N)\big)\ \Gamma_N^{-1}\begin{pmatrix}A^*v'_1\\ \vdots\\ A^*v'_N\end{pmatrix}$$

とおけば

$$u_N\to u\quad(N\to\infty)\quad \text{in}\quad L^2(\Omega)$$

が成り立つ．ただし

$$\Gamma_N=\big(\ 【v'_k,v'_s】\ \big)_{k,s=1,2,\dots,N}$$

とする．

以上の考察により，K^*が具体的に分かっているような場合には，Lemma 3.1 の$\{v_k\ (k=1,2,\dots)\}$から$\{v'_k\ (k=1,2,\dots)\}$を具体的に選び出すことができるから，Theorem 2.1 の解は，数値的近似が可能となることが分かる．

以下において，具体例を見てみよう．

$$(P_0)\begin{cases} -\Delta u=f & \text{in } \Omega \\ (d/dn)u=0 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

について考えてみよう．ただし，$\Omega\subset\subset(-\pi,\pi)^n$とする．そのとき，$(P)=(P^*)$であり，また，$K(=K^*)=\langle 1\rangle$ (: 1で張られる空間)であることが知られている．

Lemma 3.3. Example 1 において，

$(\mathcal{E}_0)$ $\|u\|\leqq C\|\Delta u\|$ $(\forall u\in M,\ (d/dn)u|\Gamma=0)$

が成り立つ．ただし，$M=H^2(\Omega)\cap K^{\perp}=\{u\in H^2(\Omega)\,|\,(u,1)=0\}$とする．

<u>Proof</u>. 次のような$\{\phi_k\ (k=0,1,\dots)\}$ が存在することは，よく知られている．

(1) $\{\lambda_k(k=0,1,\dots)\}$ は(P)の固有値である．ただし，$0=\lambda_0<\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\dots\dots\to+\infty$.

$\phi_k\in H^\infty(\Omega)$ は λ_k に対応する固有関数である．ただし，ϕ_0は定数関数である．

すなわち

$$\begin{cases} -\Delta\phi_k=\lambda_k\phi_k & \text{in } \Omega \\ (d/dn)\ \phi_k=0 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

(2) $\{\phi_k(k=0,1,\dots)\}$は$L^2(\Omega)$における正規直交基底である．

さて，$u\in L^2(\Omega)$が(P_0)を満たすとすると，グリーンの定理より

$$(f,\phi_k)=\lambda_k(u,\phi_k)$$

が成り立つ．したがって， $u\in K^{\perp}$ とすると

$$u=\Sigma_{k\neq0}(1/\lambda_k)(f,\phi_k)\phi_k$$

である．したがって

$$\|u\|^2=\Sigma_{k\neq0}(1/\lambda_k)^2|(f,\phi_k)|^2\leqq c^{-2}\|f\|^2$$

ただし，$c=\min_{k\neq0}|\lambda_k|$ である．したがって，$(\mathcal{E}_0)$が成り立つ． □

さて

$$【v】^2=\|\Delta v\|^2+\langle(d/dn)v|_\Gamma\rangle_{1/2}{}^2$$

とし，$M=H^2(\Omega)\cap K^{\perp}$ をこのノルムで完備化したヒルベルト空間を$\mathcal{H}$とする．そのとき

$$\xi_k(x)=e^{ik\cdot x}-|\Omega|^{-1}(e^{ik\cdot x},1)$$

とおくと，$\{\ \xi_k(x)\ \ (k\in\mathbb{Z}^n-\{0\})\}$ は $\mathcal{H}$ における基底である．

したがって, Theorem 2.1, Theorem 2.2, Corollary 3.1 より

Proposition 3.1. Example 1 において，$f\in L^2(\Omega)$, $(f,1)=0$ のとき

$$(f,v)=【w,v】\quad(\forall v\in\mathcal{H})$$

を満たす $w\in\mathcal{H}$ をとり，$u=\Delta w$ とおけば，$u\in L^2(\Omega)$となり,(P_0)を満たす．また，これは

$$(u,1)+<u|_\Gamma,\ 1>_{-\frac{1}{2}}=0$$

を満たす唯一の解である．また

$$f_N\ =\big(\ (f,e^{ik\cdot x})\ \big)_{0<|k|<N}$$

$$\Gamma_N=\big(\ [\![e^{ik\cdot x},e^{is\cdot x}]\!]\ \big)_{0<|k|<N,\ 0<|s|<N}$$

$$=\big(\ |k|^2|s|^2(e^{ik\cdot x},e^{is\cdot x})+(k\cdot n)(s\cdot n)<e^{ik\cdot x},e^{is\cdot x}>_{\frac{1}{2}}\ \big)_{0<|k|<N,\ 0<|s|<N}$$

$$V_N\ =\big(\ -\Delta e^{ik\cdot x}\ \big)_{0<|k|<N}=\big(\ |k|^2e^{ik\cdot x}\ \big)_{0<|k|<N}$$

$$u_N\ ={}^tf_N\ \Gamma_N^{-1}\ V_N$$

とおけば

$$u_N\ \to\ u\quad (N\to\infty)\quad \text{in } L^2(\Omega)$$

が成り立つ．

Example 2.

$$(P_0)\begin{cases}(-\Delta-\lambda_0)u=f & \text{in }\ \Omega\\ u=0 & \text{on }\ \Gamma\end{cases}$$

について考えてみよう．ただし，$\Omega\subset\subset(-\pi,\pi)^n$とする．また，$\lambda_0$は，固有値問題

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u & \text{in }\ \Omega\\ u=0 & \text{on }\ \Gamma\end{cases}$$

の最小固有値であるとする．そのとき，$(P)=(P^*)$となり，$K(=K^*)=<\phi_0>$ （:ϕ_0 で張られる空間)となることが知られている．ただし，ϕ_0は，固有値λ_0に対応する固有関数である．

Lemma 3.4. Example 2 において

$$(\mathcal{E}_0)\quad \|u\|\leqq C\|(-\Delta-\lambda_0)u\|\qquad (\forall u\in M,\ u|_\Gamma=0)$$

が成り立つ．ただし ,$M=H^2(\Omega)\cap K^\perp=\{v\in H^2(\Omega)\,|\,(v,\phi_0)=0\}$とする．

<u>Proof</u>. 次のような$\{\phi_k\ (k=0,1,\ldots)\}$ が存在することは，よく知られている．

(1) $\{\lambda_k(k=0,1,\ldots)\}$ は(P)の固有値である．ただし，$0<\lambda_0<\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\ldots\ldots\to+\infty$.

$\phi_k\in H^\infty(\Omega)$ は λ_k に対応する固有関数である．すなわち

$$\begin{cases}-\Delta\phi_k=\lambda_k\phi_k & \text{in }\ \Omega\\ \phi_k=0 & \text{on }\ \Gamma\end{cases}$$

(2) $\{\phi_k(k=0,1,\ldots)\}$は$L^2(\Omega)$における正規直交基底である．

さて，$u\in L^2(\Omega)$が(P_0)を満たすとすると，グリーンの定理より

$$(f,\phi_k)=(\lambda_k-\lambda_0)(u,\phi_k)$$

が成り立つ．したがって， $u\in K^{\perp}$ とすると

$$u=\Sigma_{k\neq 0}(\lambda_k-\lambda_0)^{-1}(f,\phi_k)\phi_k$$

である．したがって

$$\| u \|^2=\Sigma_{k\neq 0}(\lambda_k-\lambda_0)^{-2}|(f,\phi_k)|^2\leqq c^{-2}\| f \|^2$$

ただし，$c=\min_{k\neq 0}|\lambda_k-\lambda_0|$ である．したがって，$(\mathcal{E}_0)$が成り立つ． □

さて

$$【v】^2=\| (-\Delta-\lambda_0)v \|^2+<v|_\Gamma>_{1+½}{}^2$$

とし，$M=H^2(\Omega)\cap K^{\perp}$ をこのノルムで完備化したヒルベルト空間を$\mathcal{H}$とする．そのとき

$$\xi_k(x)=e^{ik\cdot x}-(e^{ik\cdot x},\ \phi_0)\ \phi_0$$

とおくと，{ $\xi_k(x)$ $(k\in \mathbb{Z}^n)$} は $\mathcal{H}$ における基底である．

したがって, Theorem 2.1, Theorem 2.2, Corollary 3.1 より

Proposition 3.2. Example 2において，$f\in L^2(\Omega)$, $(f,\ \phi_0)=0$ のとき

$$(f,v)=【w,v】\qquad(\forall v\in\mathcal{H})$$

を満たす $w\in\mathcal{H}$ をとり，$u=(-\Delta-\lambda_0)w$ とおけば，$u\in L^2(\Omega)$となり，u は(P_0)を満たす．また，これは

$$(u,\ \phi_0)+<(d/dn)u|_\Gamma,(d/dn)\phi_0|_\Gamma>_{-1-½}=0$$

を満たす唯一の解である．また

$$f_N\ =(\ (f,e^{ik\cdot x})\ )_{|k|<N}$$

$$\Gamma_N=(\ 【e^{ik\cdot x},e^{is\cdot x}】)_{|k|<N,\ |s|<N}$$

$$=(\ (|k|^2-\lambda_0)(|s|^2-\lambda_0)\ (e^{ik\cdot x},e^{is\cdot x})+<e^{ik\cdot x},e^{is\cdot x}>_{1+½}\ )_{|k|<N,\ |s|<N}$$

$$V_N\ =(\ (-\Delta-\lambda_0)e^{ik\cdot x}\ )_{|k|<N}=(\ (|k|^2-\lambda_0)e^{ik\cdot x}\ )_{|k|<N}$$

$$u_N\ ={}^tf_N\ \Gamma_N^{-1}\,V_N$$

とおけば

$$u_N\ \to\ u\quad(N\to\infty)\quad\text{in}\quad L^2(\Omega)$$

が成り立つ．

さらに， Corollary 2.2 より

Proposition 3.3. Example 2 において， $U\in H^2(\Omega)$ は { $U|_\Gamma=0$, $(d/dn)U|_\Gamma=0$ } かつ $(U,\ \phi_0)\neq 0$ を満たすとする．そのとき，$-AU$ に対するリース関数を w とし， $u=A^*w+U$ とおけば，$u=c\phi_0\ (c\neq 0)$ である．さらに

$$f_N\ =(\ (-AU,e^{ik\cdot x})\ )_{|k|<N}$$

$$\Gamma_N=(\ 【e^{ik\cdot x},e^{is\cdot x}】)_{|k|<N,\ |s|<N}$$

$$=(\ (|k|^2-\lambda_0)(|s|^2-\lambda_0)\ (e^{ik\cdot x},e^{is\cdot x})+<e^{ik\cdot x}\ \ e^{is\cdot x}>_{1+½}\ )_{|k|<N,\ |s|<N}$$

$$V_N\ =(\ (-\Delta-\lambda_0)e^{ik\cdot x}\ )_{|k|<N}=(\ (|k|^2-\lambda_0)e^{ik\cdot x}\ )_{|k|<N}$$

$$u_N = U + {}^t f_N \ \Gamma_N^{-1} V_N$$

とおけば

$$u_N \ \rightarrow \ u \quad (N \rightarrow \infty) \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

となる.

References

[1] R.Sakamoto, Numerical approximation of weak solution for boundary value problems, Tsukuba J. Math.26(2002),79-94.

[2] R.Sakamoto, Dirichlet-Neumann problem in a domain with piecewise-smooth boundary, Tsukuba J. Math.26(2002),387-406.