数理解析研究所講究録 1318 巻 2003 年 21-29

メレオトポロジーと計算
Mereotopology and Computation

三好博之
Hiroyuki MIYOSHI
京都産業大学 理学部 計算機科学科
Dept of Computer Science
Kyoto Sangyo University

Extended Abstract for the 13th ALGI (Dec 16–19, 2002)

1 メレオロジーとメレオトポロジー

メレオトポロジーとは部分 - 全体関係に関する一階の理論であるメレオロジーを，ユークリッド空間が満たすようなある程度強いトポロジーの公理を満たすように拡張したものである．

形式的なメレオロジーには二つの起源があり，一つは 1920 年代から 30 年代にかけて Lesniewski によって行われた研究である [Si87]．彼の目的は集合論によらない唯名論的な数学の基礎付けであり，Protothetic と名づけた論理の上に Ontology および Mereology という理論を構築して，通常の数学が可能になるような体系を作り上げた[1]．彼の Mereology では部分 - 全体関係を表す述語に関する最小限の公理からなる体系により集合論的議論が可能な体系の構築を試みている．もう一つの起源は [LG40] から始まる個体計算（The Calculus of Individuals）である．彼らの動機は数学よりもむしろ哲学であるがやはり唯名論的立場に基づいている．Goodman はこの体系を発展させて芸術をはじめとする様々な分野に適用している [Go76]．しかしこの二つの元の体系は大まかには一階述語論理の理論であり，体系としては類似したものであった．

最近の注目すべきアプローチとしては B. Smith を中心としたグループによるものが挙げられる [Sm96]．彼らの研究は Husserl のフォーマルオントロジーを中心とした前期現象学や Gibson による生態学的心理学に動機付けられたものであり，部分 - 全体関係をトポロジカルな接続（connection）や接触（contact）といった関係と区別した上で，これら相互の関係を明確にすると

[1] Protothetic については A. Church "Introduction to Mathematical Logic" (1944, 1956) に簡単な解説がある．

いうアプローチをとっている．このために考えられたのがメレオトポロジーである．これらの研究は，生態学，地政学，地図情報システム，知識工学，といった様々な分野に積極的に応用が試みられている．

2 メレオロジーの体系

次にメレオロジーの形式的体系について概説してみよう．ここでは [CV99] の形式化を取り上げる．メレオロジーは部分 - 全体関係を表す述語 P についての公理からなる．P を用いて述語 O, U, PP が定義される．

Ground Mereology (M) = (P.1)+(P.2)+(P.3)

(P.1)	Pxx	(Reflexivity)
(P.2)	$Pxy \wedge Pyx \rightarrow x=y$	(Antisymmmetry)
(P.3)	$Pxy \wedge Pyz \rightarrow Pxz$	(Transitivity)

$Oxy \equiv \exists z(Pzx \wedge Pzy)$ (Overlap)

$Uxy \equiv \exists z(Pxz \wedge Pyz)$ (Underlap)

$PPxy \equiv Pxy \wedge \neg Pyx$ (Proper Part)

等号を定義により導入したい場合は以下のようにする．

$x=y \longleftrightarrow Pxy \wedge Pyx$

(A.I) $x=y \rightarrow (\phi x \longleftrightarrow \phi y)$ (Axiom of Identity)

(ϕ: any formula)

さらに公理を追加することにより様々なメレオロジーを構成する．

Minimal Mereology (MM) = (M)+(P.4)

(P.4) $PPxy \rightarrow \exists z(Pzy \wedge \neg Ozx)$

真の部分 x があれば，x とオーバーラップしない別の部分もある

(Weak Supplimentation)

Extensional Mereology (EM) = (M)+(P.5)

(P.5) $\neg Pyx \rightarrow \exists z(Pzy \wedge \neg Ozx)$

x の部分でないものは x とオーバーラップしない部分を持つ．

(Strong Supplementation)

Extensional Mereology については次の外延性が成り立つ．

命題 1 (外延性)

$$(\exists zPPzx \vee \exists zPPzy) \rightarrow (\forall z(PPzx \longleftrightarrow PPzy) \rightarrow x=y)$$

さらに閉包性として和と積の公理を導入する．

Closure Mereology (CM) = (M)+(P.6)+(P.7)

(P.6) $Uxy \rightarrow \exists z \forall w(Owz \longleftrightarrow (Owx \lor Owy))$ (Sum)

(P.7) $Oxy \rightarrow \exists z \forall w(Pwz \longleftrightarrow (Pwx \land Pwy))$ (Product)

Minimal Closure Mereology (CMM) = (MM)+(P.6)+(P.7)

Extensional Closure Mereology (CEM) = (EM)+(P.6)+(P.7)

このとき外延性から一意性が得られるので和と積が定義できる.

$x \cup y \equiv \iota z \forall w((Owz \longleftrightarrow (Owx \lor Owy)))$ (Sum op)

$x \cap y \equiv \iota z \forall w((Pwz \longleftrightarrow (Pwx \land Pwy)))$ (Product op)

(ι : the description operator)

さらに以下の融合公理を導入する.

General Mereology (GM) = (M)+(P.8)

(P.8) $\exists x \phi \rightarrow \exists z \forall y(Oyz \longleftrightarrow \exists x(\phi \land Oyx))$ (Fusion)

(ϕ: any formula)

General Extensional Mereology (GEM) = (MM)+(P.8) = (EM)+(P.8)

GEM では以下の演算が定義できる.

$\sigma x \phi \equiv \iota z \forall y(Oyz \longleftrightarrow \exists x(\phi \land Oyx))$ (general sum)

$\pi x \phi \equiv \sigma z \forall x(\phi \rightarrow Pzx)$ (general product)

(ϕ: any formula)

このとき積と和の演算はσを用いて再定義することができる.

$x \cup y \equiv \sigma x(Pzx \lor Pzy)$

$x \cap y \equiv \sigma x(Pzx \land Pzy)$

3 メレオトオポロジーの体系

メレオロジーでトポロジカルな推論を行うためには，まず基本的な述語としてCを導入する．Cxyはxはyとつながっていることを表す．そしてこれをPと関係付ける.

Ground Topology (T) = (C.1)+(C.2)

(C.1) Cxx (Reflexivity)

(C.2) $Cxy \rightarrow Cyx$ (Symmmetry)

$x \subseteq y \equiv \forall z(Czx \rightarrow Czy)$ (x is enclosed in y)

Ground Mereotopology (MT) = (M)+(T)+(C.3)

(C.3) $Pxy \rightarrow x \subseteq y$ (Monotonicity)

次に C や⊆を用いて開，閉などのトポロジカルな概念に対応する述語，および閉包 cl(x) やコンプリメント $(-)^c$ などの演算を定義する．そしてこれらが位相的閉包に関する標準的な Kuratowski 公理系の以下のような類似物を満足するように公理を追加することによりトポロジカルな推論を可能にする．

(K.1) P(x)(cl(x)) (Inclusion)
(K.2) cl(cl(x)) = cl(x) (Idempotence)
(K.3) cl(x ∪ y) = cl(x) ∪ cl(y) (Additivity)

4 計算的観点からの形式化

メレオロジーやメレオトポロジーでは，たとえば紛争中の国境といったような，幾何学的対象が決定されていないという事態そのものは取り扱うことができない．このような事態について考えるためには，それらを結果が定まるとは限らず（非停止性）未知の外部からの影響があり得る（開放性）ようなものとして表現する必要がある．このような性質は幾何学的対象を計算と見なすことによりある程度うまく取り扱えると考えられる．そこでここではメレオロジーをカルキュラスとして再構成することを提案したい．

こういったことを考えるにあたってはこのような事態を扱うときの形式化の役割についてよく考える必要がある．ここで必要とされる形式化とは，世界における現象の様々な（しかしすべてではない）側面を理解するためのものである．すると，論理と計算という二つの形式化は，その理解にどのような形で寄与しているのかが問題になる．通常，論理の内部ではその論理における証明の様々な側面は推論されない．例えば，停止しない証明過程や，証明の途中における予期せぬ意味論の変更，証明の途中結果に基づく論理の修正といったことは，論理としてはうまく扱うことができない．しかし計算という観点からはリアクティブな計算，外界とのインタラクション，計算リフレクション，といったことと関連付けることができる．こういったことから現象をカルキュラスとして形式化することは完全とはいえないまでもこういった側面を扱うための有力な手段であると考えられる．

カルキュラスの果たす役割については次の Wittgenstein の挙げた例がひとつの説明を与えてくれる．

> 誰かが我々に和を求める問題を，例えば ||||||||| + |||||||||| のように棒の表記で出して，我々が計算している間，我々が気づかないうちに棒を取り除いたり加えたりして面白がっている，と想像してみよう．彼は「でもその和は正しくない」と言い続け，我々は全部やり直し続けて毎回馬鹿にされるだろう．— 実際，厳密に言えば我々は計算の正しさの基準について何の概念も持っていない．([Wi69] IV 18, p.330)

これは実際の計算が行われるという場面で常にさらされる開放性を端的な形で表している．棒は予期せぬ人物がそっとそれらを加えたり取り去ったりすることを可能にしている．カルキュラスはこの棒の役割を演ずると考えることができる．

5　ソリッドモデルからのドメインの構成

それではそのカルキュラスの意味論には何が必要だろうか．ここで我々は意味論において二つの意味を扱うことになる．すなわち現象の異なる二つの側面に対応するメレオトポロジカルな意味と計算的な意味であり，これらは例えばEuclid空間とScottドメインというように二つのトポロジーとして表現することが考えられる．そこでこれらを同時に取り扱える意味領域として，EdalatとLieutierによる位相空間からのソリッドドメインの構成を採用することにする．これは以下のように定義される．

定義1 位相空間Xのソリッドドメイン$(SX,<)$とはXの互いに素な部分集合の対(A,B)（パーシャルソリッド）からなる集合に$(A_1,B_1)<(A_2,B_2) \Leftrightarrow A_1 \subset A_2 \wedge B_1 \subset B_2$で定義される情報順序を入れたものである．このとき$SX$は有向完備半順序（*dcpo*）になる．また$SX$のサブドメイン$SbX$は$SbX=\{(A,B)\in SX \mid B^c \textit{ is compact}\}\cup\{(\emptyset,\emptyset)\}$に包含による順序を入れたものとして定義される．これはSXの部分*dcpo*になる．

以下SXに関連する事柄については証明なしに事実のみを述べる．詳しくは[EL02]を参照して欲しい．

6　メレオトポロジカルな対象のカルキュラス

ここで定義するカルキュラスはPCF (Programming language for Computable Functions)をベースとする．PCFとはドメインの論理であるLCF (Logic for Computable Functions)をカルキュラスとして用いるためにPlotkinにより定義されたものであり[Pl77]，ドメイン理論に基づいた意味論を持っている．論理演算は真偽値関数として扱われる．そしてそこにメレオトポロジカルなデータ型とそれについての演算$\sqcup$, $\sqcap$, $\sqsubseteq$を加える．ここでは意味論的な制約により複雑になることを避けるため，有界なパーシャルソリッドのみを扱うことにする．(有界でない場合については後述する)．

Types

```
T ::=   bool        (booleans)
  |     nat         (natural numbers)
  |     bsol        (bounded partial solids)
```

```
        |     T1 → T2          (function type)
Terms
      t ::=   x_T              (variables)
        |     c_T              (constants)
        |     λ t1:T.t2        (abstraction)
        |     (t1)(t2)         (application)
        |     undef_T          (undefined)
```

型付け規則は通常通りなので省略する.

```
Constant symbols
      tt : bool
      ff : bool
      0 : nat
      succ : nat → nat
      zero? : nat → bool
      cond_T : bool → T → T → T    (T: ground type)
      fix_T : (T →T) → T
      ⊔ : bsol → bsol → bsol
      ⊓ : bsol → bsol → bsol
      ⊑ : bsol → bsol → bool
```

実際にはカルキュラスを適用する問題領域に応じてさらにソリッド定数や定数関数を加えることを想定している.

7 パーシャルソリッドについての演算

SX ではパーシャルソリッドについての連続な演算や述語が定義できるので，これにより $\sqcup, \sqcap, \sqsubseteq$ に表示的意味論を与える．ここで $\sqsubseteq$ に対応する部分ソリッド関係は有界なパーシャルソリッドと（有界とは限らない）パーシャルソリッドの間にのみ定義される．この述語は X がハウスドルフ空間であれば連続となる．メレオトポロジカルな演算についての解釈は以下のようになる．

```
      [bool] = {bottom, true, false}   (flat domain)
      (A,B)[⊔](C,D)  =  (A ∪ C, B ∩ D)
      (A,B)[⊓](C,D)  =  (A ∩ C, B ∪ D)
      (A,B)[⊑](C,D)  =  true     if B ∪ C = X
                        false    if A ∩ D ≠ ∅
                        bottom   otherwise
```

また P（部分 - 全体関係）は $\sqsubseteq$ により定義される.

```
P: bsol → bsol → bool
P ≡ λ x. λ y.(x⊑y)
```

さらに別のメレオトポロジカルな記号を用いる際には，公理に従って定義と意味論を与えることになる．

なおここではメンバーシップ関係については考えなかった．これはそもそもメレオロジーが集合論的なメンバーシップ関係を原始的な述語としないからであるが，実用上はそれに類似した演算があると便利であることも多い．ソリッドドメインではこのような演算に意味を与えることもできる．よってさらに要素に相当する型とメンバーシップ記号を導入して意味を与えることが考えられる．ここでその要素の意味領域をどのようにとるかについては適用する問題との兼ね合いで考慮すべき点があるが，X として R^n を考える場合にはインターバルドメイン IR^n で十分であることが多い．これは $\{\prod_{1=i}^{n}[a_i, b_i] \subset R^n \mid a_i, b_i \in R,\ a_i \leq b_i\} \cup \{R^n\}$ に逆包含順序を入れたものである．このとき要素 $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ がすべての i について $a_i = b_i$ であれば X の一点に対応する．

8　今後の課題

ここでは有界なパーシャルソリッドに限って議論してきた．有界でないパーシャルソリッドを導入するにはそれに対応する型 **sol**，および部分型の関係 **bsol < sol** が必要となる．よってカルキュラスに何らかの形で多相型もしくは型強制を導入する必要がある．このようなカルキュラスはオブジェクト指向プログラミングとの関係において様々な研究がなされてきたのでその成果を利用することが考えられる [Ts94].

また幾何学的情報の取り扱いがこれで十分かどうかという問題もある．例えば WWW のような世界から得られる情報は十分に構造化されておらず，部分的であり，矛盾を含んでいることもある．このような中から得られる幾何学的情報をどのように扱うのが適切であるかについてはまだ検討の余地が大きい．これは知識工学におけるフォーマルオントロジーの研究 [FOIS] や半構造化データの研究 [Ca00] との関連が考えられる．

さらに理論的な側面では，Edalat のドメインの構成のエッセンスについて考察するために Synthetic Domain Theory (SDT) を用いてソリッドドメインを公理化することが考えられる．このとき Reus と Streicher による SDT の構文的アプローチ [RS99] との関連は興味深い問題である．また幾何学的対象の別の数学的表現を考えるにあたって Heijmans による数学的モルフォロジー [He94] との関連も考察してみたい．そこでは幾何学的対象を確定してゆく過程を束構造の随伴関係により表現しており，計算とカテゴリー論的極限との類似を持ち込むことにより抽象的に計算として解釈することができると考えられる．

哲学的な応用としては，必ずしも人間に限定されない認識論であるアンドロイド認識論 [FGH95] とのかかわりが考えられる．またメレオロジーの研究から生態学やアフォーダンスとの関係も派生してくると考えられる [SV99]．そもそも本稿のような話題を取り上げる背景には，計算についての存在論および認識論的な考察がある．これについては哲学者との共同プロジェクト `http://philcomp.org/`を参照されたい．

参考文献

[FOIS] *FOIS — International Conference on Fromal Ontology in Information Systems* (`http://www.fois.org/`).

[CV99] R. Casati and A. C. Varzi, *Parts and Places. The Structures of Spatial Representation*, Cambridge, MA, and London: MIT Press [Bradford Books], 1999.

[Ca00] L. Cardelli, "Semistructured Computation", in: R. C. H. Connor and A. O. Mendelzon (Eds.): *Research Issues in Structured and Semistructured Database Programming*, Lecture Notes in Computer Science 1949. Springer, 2000. pp.1–16.

[EL02] A. Edalat and A. Lieutier, "Foundation of a computable solid modelling", *Theoretical Computer Science* 284(2): 319-345 (2002).

[FGH95] K. M. Ford, C. Glymour and P. J. Hayes (Eds.), *Android Epistemology*, AAAI Press, 1995.

[Go76] N. Goodman, *Languages of Art: An Approach to a Theory of Symbols.* Indianapolis and Cambridge: Hackett Publishing, 1976.

[He94] H. J. A. M. Heijmans, *Morphological Image Operators*, Academic Press, 1994.

[LG40] H. S. Leonard and N. Goodman, "The Calculus of Individuals and Its Uses", *Journal of Symbolic Logic*, 5: 45–55 (1940).

[Pl77] G. D. Plotkin, "LCF Considered as a Programming Language". *Theoretical Computer Science* 5(3): 225–255 (1977).

[RS99] B. Reus, T. Streicher, "General Synthetic Domain Theory — A Logical Approach", *Mathematical Structures in Computer Science* 9:177–223. Cambridge University Press, 1999.

[Si87] P. Simons, *Parts: A Study in Ontology*, Oxford University Press,

[Sm96] Barry Smith, "Mereotopology: A Theory of Parts and Boundaries", *Data and Knowledge Engineering*, Vol.20, 1996, pp.287–303.

[SV99] B. Smith and A. Varzi, "The Niche", *Noûs*, 33:2 (1999), 214–238.

[Ts94] H. Tsuiki, "A Normalizing Calculus with Overloading and Subtyping", *TACS* 1994: 273-295.

[Wi69] L. Wittgenstein, *Philosophische Grammatik*, Blackwell, Oxford, 1969. Edited by R. Rhees.