数理解析研究所講究録 1320 巻 2003 年 101-111

リーマン球面への射影によるポアソン方程式のソース項同定

国立情報学研究所　奈良 高明 (Takaaki Nara)
National Institute of Informatics
東京大学　安藤 繁 (Shigeru Ando)
The University of Tokyo

1 はじめに

本稿では，原点を含む有界な 3 次元領域 Ω においてポアソン方程式

$$-\Delta u \;=\; f \tag{1}$$

を考え，境界のポテンシャル $u|_{\partial\Omega}$, およびその法線方向微分 $\frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\partial\Omega}$ からソース項 f を同定する逆問題を扱う．本逆問題は一般には一意性が成り立たないが，f が有限個の点ソースから成る場合：

$$f \;=\; \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k) \tag{2}$$

は解の一意性が示され [4], なおかつ工学上有用である．式 (2) におけるすべての点ソースパラメタ：ソースの 3 次元位置 $\boldsymbol{r}_k$, 強さ λ_k, 個数 N の再構成手法の構築が本研究の目的である．

最も基本的な解法は出力最小自乗に基づく反復法 [1] であるが，有限個の点ソースの場合，グリーンの公式において重み調和関数を必要数用い，ソースパラメタをデータの境界積分で陽に表現する直接法が提案されている [2, 3, 4]. しかしながら，重み関数の選定基準は論じられておらず，アドホックに，$(x+iy)^n$ なる調和関数が低次側から必要数 ($n=0,1,\cdots$) 用いられていた [4]. 我々は，グリーンの公式がポテンシャルの多重極モーメントに関する等式として解釈される点に着目し，ソース分布およびその結果観測されるモーメント分布に応じた重み関数を用いる手法を提案する [7].

2 xy-平面およびリーマン球面への射影による解法

ソース項 f が無限領域に存在するときのポテンシャル u' について，Ω を含む球の外側で多重極展開

$$u'(r,\theta,\phi) \;=\; \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(2-\delta_{m0})\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}\cdot P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\phi+b_{nm}\sin m\phi) \tag{3}$$

を考えれば，展開係数は，ソースパラメタ，および任意形状の $\partial\Omega$ 上でのデータにより

$$a_{nm}+ib_{nm}=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial}{\partial\nu}\left(r^nP_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi}\right)-\frac{\partial u}{\partial\nu}r^nP_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi}\right)\mathrm{d}S=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k r_k^n P_n^m(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{im\phi_k} \tag{4}$$

と書かれ，未知，既知量間のの代数方程式が得られる [5]. 式 (4) は，$r^nP_n^m(\cos\theta)\ \mathrm{e}^{im\phi}$ を重み調和関数とするグリーンの公式そのものであるから，重み関数の選定は，多重極モーメント n,m の選定と言える．ここで多重極モーメントは次の物理的性質をもつ：(I) 点ソースが Ω 内に一様に分布する場合，多重極モーメントのパワー (絶対値の自乗) は低次モーメント側に集中する．(II) 点ソースが $\partial\Omega$ 上の一点付近，すなわち Ω の表層部に集中する場合，高次モーメントまでパワーが分散する．そこで我々は，観測されたモーメントの分布 (I)(II) に対応し

$$\text{方法 (I)}\qquad a_{mm}+ib_{mm},\;\; a_{m+1,m}+ib_{m+1,m} \tag{5}$$

$$\text{方法 (II)}\qquad \sum_{n=m}^{\infty}(a_{nm}+ib_{nm}),\;\; \sum_{n=m}^{\infty}(n+m+1)(a_{nm}+ib_{nm}) \tag{6}$$

から得られる代数方程式を用いる.

2.1 低次モーメントが優位な場合：xy-平面への射影

低次モーメントが優位に観測され，式 (5) を用いる場合，重み調和関数は

$$r^m P_m^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi} = (2m-1)!!(x+iy)^m, \qquad r^{m+1}P_{m+1}^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi} = (2m+1)!!(x+iy)^m z \tag{7}$$

となる [8]. 従って，ソースパラメタの推定のために用いる代数方程式は

$$\alpha_m \equiv \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial S^m}{\partial\nu} - \frac{\partial u}{\partial\nu}S^m\right)\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k S_k^m \tag{8}$$

$$\beta_m \equiv \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial S^m z}{\partial\nu} - \frac{\partial u}{\partial\nu}S^m z\right)\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k (x_k+iy_k)^m z_k \tag{9}$$

となる. 但し

$$S \equiv x+iy, \qquad S_k \equiv x_k + iy_k \tag{10}$$

であり，S, S_k はそれぞれ，3 次元位置 (x,y,z) および第 k ソース位置 (x_k, y_k, z_k) を xy-平面に射影した位置を表している. 式 (8) は Badia ら [4] が用いた代数方程式と等価である. また位置の第 3 成分 z_k は，多重極モーメントの $n=m+1$ 成分から得られる式 (9) に表現されることに注意する.

2.2 高次モーメントまで分布する場合：リーマン球面への射影

一方，高次モーメントまでパワーが分散して観測され式 (6) を用いる場合，重み調和関数は，ルジャンドル陪多項式の母関数を用いて

$$\sum_{n=m}^{\infty} r^n P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi} = \frac{(2m)!}{2^m m!}\frac{(x+iy)^m}{d^{2m+1}} \qquad (r<1) \tag{11}$$

$$\sum_{n=m}^{\infty}(n+m+1)r^n P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi} = \frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=m}^{\infty} r^n P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi} = \frac{(2m+1)!}{2^m m!}\frac{(x+iy)^m(1-z)}{d^{2m+3}} \tag{12}$$

$$\text{但し}\quad d \equiv \sqrt{1-2r\cos\theta + r^2} \tag{13}$$

と書ける. 母関数の収束条件 $r<1$ を満たすよう，以下では Ω は単位球内に含まれるものとする. ここで

$$R_k \equiv \frac{2(x_k+iy_k)}{d_k^2} = \frac{2(x_k+iy_k)}{x_k^2+y_k^2+(1-z_k)^2}, \qquad \zeta_k \equiv \frac{1-z_k}{d_k^2} = \frac{1-z_k}{x_k^2+y_k^2+(1-z_k)^2} \tag{14}$$

と変数変換すれば，式 (8) および式 (9) と同一形式の代数方程式

$$\gamma_m \equiv \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{(2(x+iy))^m}{d^{2m+1}} - \frac{\partial u}{\partial\nu}\frac{(2(x+iy))^m}{d^{2m+1}}\right)\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k}{d_k}R_k^m, \tag{15}$$

$$\delta_m \equiv \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{(2(x+iy))^m(1-z)}{d^{2m+3}} - \frac{\partial u}{\partial\nu}\frac{(2(x+iy))^m(1-z)}{d^{2m+3}}\right)\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k}{d_k}R_k^m\zeta_k \tag{16}$$

を得る. このとき，R_k, ζ_k は，次のような幾何的解釈が可能である：

R_k, ζ_k の幾何学的意味　単位球をリーマン球面 Σ と考える．また，北極 $N(0,0,1)$ に仮想的に置いた双極子 $m=(0,0,-1)$ により $\phi=\arg(x+iy)$ なる 2 次元平面内に生成される流線，等ポテンシャル線から成る直交曲線座標を考える (仮想双極子座標と呼ぶことにする．図 1)．ここで曲線

$$\Phi_k \equiv \left\{(x,y,z) \,\middle|\, \frac{2(x+iy)}{x^2+y^2+(1-z)^2} = R_k\right\}, \qquad \Psi_k \equiv \left\{(x,y,z) \,\middle|\, \frac{1-z}{x^2+y^2+(1-z)^2} = \zeta_k\right\} \tag{17}$$

をとれば，これらは仮想双極子による流線，等ポテンシャル線であり，かつ第 k ソース位置を通過する．以上の準備のもとで，R_k は流線 Φ_k に沿ってリーマン球面 Σ へ射影した点であり，ζ_k は仮想双極子座標の第 3 成分である．

実際，Φ_k と Σ の交点の 3 次元座標を (s_k,t_k,u_k) と表せば，この点は立体射影により，拡張複素平面 $\Pi=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の点 $(s_k+it_k)/(1-u_k)$ と同一視される．ところが

$$\begin{aligned}
\frac{s_k+it_k}{1-u_k} &= \frac{2(s_k+it_k)}{s_k+t_k+(1-u_k)^2} \quad (s_k^2+t_k^2+(1-u_k)^2=2(1-u_k)\ \text{on}\ \Sigma) && (18)\\
&= \frac{2(x_k+iy_k)}{x_k+y_k+(1-z_k)^2} \quad ((s_k,t_k,u_k),(x_k,y_k,z_k)\in\Phi_k) && (19)\\
&= R_k \quad (R_k\ \text{の定義式}\ (14)\ \text{より}) && (20)
\end{aligned}$$

となる．従って，R_k は第 k ソース位置 (x_k,y_k,z_k) のリーマン球面 Σ 上の射影点とみなすことができる．

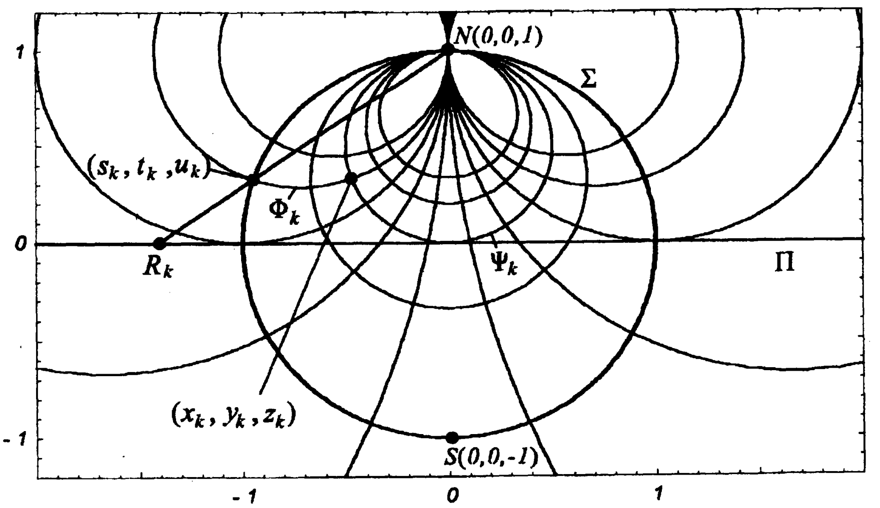


図 1: R_k,ζ_k の幾何学的意味：R_k は第 k ソース位置 (x_k,y_k,z_k) を流線 Φ_k に沿ってリーマン球面へ射影した点と同一視される．Σ: リーマン球面．Π: 拡張複素平面．N: 北極点 $(0,0,1)$．Ψ_k: 等ポテンシャル線．

なお，(R_k,ζ_k) の定義式 (14) より，(R_k,ζ_k) と (S_k,z_k) の間の座標変換は，

$$S_k = \frac{\frac{R_k}{2}}{|\frac{R_k}{2}|^2+\zeta_k^2}, \qquad 1-z_k = \frac{\zeta_k}{|\frac{R_k}{2}|^2+\zeta_k^2}. \tag{21}$$

により与えられる．

2.3 代数方程式の統一表現

以上，xy-平面への射影を用いる場合の代数方程式 (8), (9) とリーマン球面への射影を用いる場合の代数方程式 (15), (16) とは，図 2 の変数の対応の下，統一した次の形

$$\chi_m = \sum_{k=1}^{N} \Lambda_k T_k^m, \tag{22}$$

$$\psi_m = \sum_{k=1}^{N} \Lambda_k T_k^m Z_k. \tag{23}$$

で表すことができる．

	観測量	強さ	射影位置	第三成分
式 (8)(9)	α_m, β_m	λ_k	S_k	z_k
式 (15)(16)	γ_m, δ_m	λ_k/d_k	R_k	ζ_k
式 (22)(23)	χ_m, ψ_m	Λ_k	T_k	Z_k

表 1: 式 (8)(9), (15)(16), および (22)(23) 間のパラメタの対応.

3 再構成公式

式 (22), (23) の左辺 $\sigma_m, \tau_m, (m = 0, 1, \cdots, 2N-1)$ から右辺の未知ソースパラメタ N, Λ_k, T_k, Z_k を決定する問題はモーメント問題と呼ばれ，解の陽な表現が得られている [6, 4]. 結果をまとめると以下のようになる：N の上限を M とし，また N 個のソースは xy-平面上，もしくはリーマン球面上の相異なる N 点に射影されると仮定する．このとき，N はハンケル行列

$$H_{M,\chi_0} \equiv \begin{pmatrix} \chi_0 & \cdots & \chi_{M-2} & \chi_{M-1} \\ \chi_1 & \cdots & \chi_{M-1} & \chi_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_{M-1} & \cdots & \chi_{2M-3} & \chi_{2M-2} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

のランクとして推定される．次に，射影位置 $T_1, T_2, \cdots, T_N$ は，

$$H_{N,\chi_1} x = \lambda H_{N,\chi_0} x \tag{25}$$

を満たす一般化固有値として求まる．但し

$$H_{N,\chi_1} = \begin{pmatrix} \chi_1 & \cdots & \chi_{N-1} & \chi_N \\ \chi_2 & \cdots & \chi_N & \chi_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_N & \cdots & \chi_{2N-2} & \chi_{2N-1} \end{pmatrix}, \quad H_{N,\chi_0} = \begin{pmatrix} \chi_0 & \cdots & \chi_{N-2} & \chi_{N-1} \\ \chi_1 & \cdots & \chi_{N-1} & \chi_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_{N-1} & \cdots & \chi_{2N-3} & \chi_{2N-2} \end{pmatrix} \tag{26}$$

である．更にソース強さは

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1^{N-1} & \ldots & T_N^{N-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \vdots \\ \chi_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

により，また第三成分は

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\Lambda_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1^{N-1} & \ldots & T_N^{N-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \vdots \\ \psi_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

により求まる．

注 1　リーマン球面射影法の場合，Λ_k は等価ソース強さ λ_k/d_k である．しかしながら，R_k, ζ_k が決まれば，式 (21) よりソースの 3 次元座標が決まり，従って d_k が決まり，λ_k も決まることになる．

注 2　ソース個数 N の推定において，ハンケル行列 H_{m,χ_0} の次の性質を用いることができる．

命題
$$\det H_{m,\chi_0} = \sum_{1\le l_1<\cdots<l_m\le N} \prod_{k=1}^{m} \Lambda_{l_k} \prod_{l_i>l_j} (T_{l_i}-T_{l_j})^2 \tag{29}$$

証明) $\boldsymbol{w}_{m,k} \equiv (1\ T_k\ T_k^2\ \cdots\ T_k^{m-1})^t$, ($t$: transpose) と置くと

$$H_{m,\chi_0} = \Big(\sum_{k_1=1}^{N} \Lambda_{k_1} T_{k_1}^0 \boldsymbol{w}_{m,k_1} \quad \sum_{k_2=1}^{N} \Lambda_{k_2} T_{k_2}^1 \boldsymbol{w}_{m,k_2} \quad \cdots \quad \sum_{k_m=1}^{N} \Lambda_{k_m} T_{k_m}^{m-1} \boldsymbol{w}_{m,k_m}\Big). \tag{30}$$

よって

$$\begin{aligned}
\det H_{m,\chi_0} &= \sum_{k_1=1}^{N}\sum_{k_2=1}^{N}\cdots\sum_{k_m=1}^{N} \Lambda_{k_1}\cdots\Lambda_{k_m} T_{k_1}^0 \cdots T_{k_m}^{m-1} \det(\boldsymbol{w}_{m,k_1}\ \cdots\ \boldsymbol{w}_{m,k_m}) \\
&= \sum_{k_1,\cdots,k_m\ (k_i\neq k_j)} \Lambda_{k_1}\cdots\Lambda_{k_m} T_{k_1}^0 \cdots T_{k_m}^{m-1} \det(\boldsymbol{w}_{m,k_1}\ \cdots\ \boldsymbol{w}_{m,k_m}) \\
&= \sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_m\le N} \sum_{\substack{\{k_1,\cdots,k_m\}\\=\{l_1,\cdots,l_m\}}} \Lambda_{k_1}\cdots\Lambda_{k_m} T_{k_1}^0 \cdots T_{k_m}^{m-1} \det(\boldsymbol{w}_{m,k_1}\ \cdots\ \boldsymbol{w}_{m,k_m}) \\
&= \sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_m\le N} \prod_{k=1}^{m} \Lambda_{l_k} \prod_{l_i>l_j}(T_{l_i}-T_{l_j}) \sum_{\substack{\{k_1,\cdots,k_m\}\\=\{l_1,\cdots,l_m\}}} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_m \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_m \end{pmatrix} T_{k_1}^0 \cdots T_{k_m}^{m-1} \\
&= \sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_m\le N} \prod_{k=1}^{m} \Lambda_{l_k} \prod_{l_i>l_j}(T_{l_i}-T_{l_j})^2 \qquad \text{Q.E.D}
\end{aligned} \tag{31}$$

系
$$\det H_{m,\chi_0} = \begin{cases} \prod_{k=1}^{N} \Lambda_k \prod_{i>j}(T_i-T_j)^2 & (m=N) \\ 0 & (m \ge N+1) \end{cases} \tag{32}$$

上記系を用い，以下の手順によりソース個数 N を推定する：

1. ハンケル行列 H_{m,χ_0} の首座小行列式 $(m=1,2,\cdots)$ を計算する．
2.
$$\det H_{k,\chi_0} \neq 0, \qquad \det H_{k+1,\chi_0} = 0 \tag{33}$$
を満たす k をソース個数の候補とする．

3. 十分大きい M に対し

$$\det H_{k+1,\chi_0} = \det H_{k+2,\chi_0} = \cdots = \det H_{M,\chi_0} = 0. \tag{34}$$

を確認する．

ソース個数 N の上限 M が与えられている場合は，式 (34) を M まで確認する．しかし実際の応用においては，むしろデータのノイズレベルにより M は決まる：M 個のソースの同定に $\chi_0 \sim \chi_{2M-1}$ まで用いる本アルゴリズムでは

$$|\delta\chi_{2M-1}/\chi_{2M-1}| \simeq 1 \tag{35}$$

となる M が推定可能な最大の個数と考えられる．M はデータ精度により増加する．

4 数値シミュレーション

本節では，xy-平面射影法とリーマン球面射影法の差異を明らかにするために，次の 6 つの場合を考える．それぞれの場合に仮定するソースパラメタは表 2 に示す．

1. Ω の中心付近 (深い位置) にある 2 つの近接したソース (図 3 case (i))
2. 北極付近 (浅い位置) にある 2 つの近接したソース (図 3 case (ii))
3. case (i) と case (ii) の中間の深さにある 2 つの近接したソース (図 3 case (iii))
4. Ω の中心付近にまばらに存在するソース (図 4 case (iv))
5. 北極付近に集中したソース (図 4 case (v))
6. 5 つのソース (図 4 case (vi))

	N	P_k	λ_k
(i)	2	$P_1(-0.02,0,0), P_2(0.02,0,0)$	$\lambda_1=1, \lambda_2=-1$
(ii)	2	$P_1(-0.02,0,0.8), P_2(0.02,0,0.8)$	the same as in case (i)
(iii)	2	$P_1(-0.02,0,0.5), P_2(0.02,0,0.5)$	the same as in case (i)
(iv)	3	$P_1(0.4,0.2,0.4)$, $P_2(-0.4,0.6,-0.4), P_3(-0.5,-0.3,0.1)$	$\lambda_1=1, \lambda_2=-0.6$, $\lambda_3=-0.4$
(v)	3	$P_1(0.2,0.2,0.8), P_2(-0.1,0.2,0.85)$, $P_3(-0.1,-0.2,0.8)$	the same as in case (iv)
(vi)	5	$P_1(0.2,0.2,0.8), P_2(-0.1,0.2,0.8), P_3(-0.2,-0.2,0.8)$, $P_4(0.1,-0.2,0.8), P_5(0.2,-0.1,0.8)$	$\lambda_1=-0.6, \lambda_2=0.4, \lambda_3=0.4$, $\lambda_4=0.4, \lambda_5=-0.6$

表 2: 仮定したソースパラメタの真値

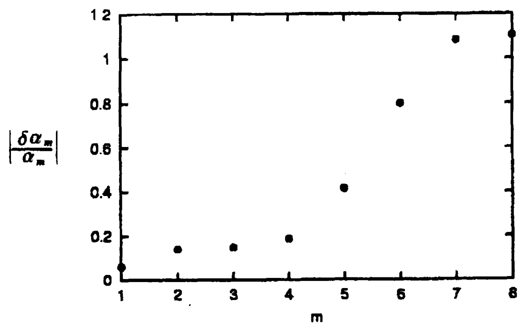
無限一様媒体中のポテンシャル値に，境界上での最大絶対振幅の $s=0.5\%$ の標準偏差でガウシアンノイズを加え，観測データとする．Ω は原点を中心とする半径 0.9 の球とする．観測点は $T=30$ 本の緯度線と $F=15$ 本の経線の交点上にとる．case (vi) の場合のみ，$T=F=30, s=0.1$ を用いる．$\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \delta_m$ は台形則により求める．

4.1 個数の推定

case (i) の場合に関し，個数推定の手続きを示す．他の場合は，ソース個数は既知とする．

図 2 左は，ノイズ入りデータから計算される $\alpha_m = \chi_m$ の相対誤差を示している．$2M-1=7$ のとき $|\delta\alpha_{2M-1}/\alpha_{2M-1}| \simeq 1$ となり，このノイズレベルでの最大推定個数は 5 個以下程度と考えられる．図

2 右に H_m の $m = 2, 3, \cdots, 5$ に対する首座小行列式の値を示す ($\sum_{k=1}^{3} \lambda_k = 0$ である case (i) の場合は, $\det H_1 = \alpha_0 = 0$ に注意.) $|\det H_4|$ において突然減少し，以降 $M = 5$ までほぼ $|\det H_M| \simeq 0$ と見なせることから $N = 3$ の推定値を得る．$|\det H_{N+1}| \simeq 0$ と見なし得る閾値の値は検討すべき課題である．



$\|\det H_2\|$	7.49 e−1
$\|\det H_3\|$	2.05 e−1
$\|\det H_4\|$	7.62 e−3
$\|\det H_5\|$	1.61 e−4

図 2: 左 $|\delta\alpha_m/\alpha_m|$ の相対誤差　右 $|\det H_m|$

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
$\|\delta\alpha_{2N-1}\|/\|\alpha_{2N-1}\|$	1.02 e+0	1.93 e+2	2.73 e+0	3.12 e−1	8.29 e+1	1.34 e+2
$\|\delta\gamma_{2N-1}\|/\|\gamma_{2N-1}\|$	1.21 e+2	2.74 e−1	2.42 e+0	1.65 e+2	3.39 e−1	2.76 e−1

表 3: xy-平面射影法で用いる $|\alpha_{2N-1}|$ の相対誤差とリーマン球面射影法で用いる $|\gamma_{2N-1}|$ の相対誤差

4.2 xy-平面射影法とリーマン球面射影法の比較

表 3 に $|\alpha_{2N-1}|$, $|\gamma_{2N-1}|$ の相対誤差を，図 3, 4 に再構成結果を示す．これらより次が観察される：

- 領域の中心部付近にソースが存在する case (i), (iv) の場合，$|\delta\alpha_{2N-1}|/|\alpha_{2N-1}| < |\delta\gamma_{2N-1}|/|\gamma_{2N-1}|$ である．この結果，xy-平面射影法の方がリーマン球面射影法よりも精度高くソースを推定する．
- 北極付近にソースが存在する case (ii)，(v) の場合，$|\delta\alpha_{2N-1}|/|\alpha_{2N-1}| > |\delta\gamma_{2N-1}|/|\gamma_{2N-1}|$ である．この結果，リーマン球面射影法の方が xy-平面射影法よりも精度高くソースを推定する．
- 中心と北極の中間付近の深さにソースが存在する case (iii) の場合，どちらの射影法も精度高くソースを推定する．
- N が大きく $|\alpha_{2N-1}|$ が小さくなる case (vi) の場合でも，$d_k \ll 1$ であれば，リーマン球面射影法によりソースの解像度が改善されうる．

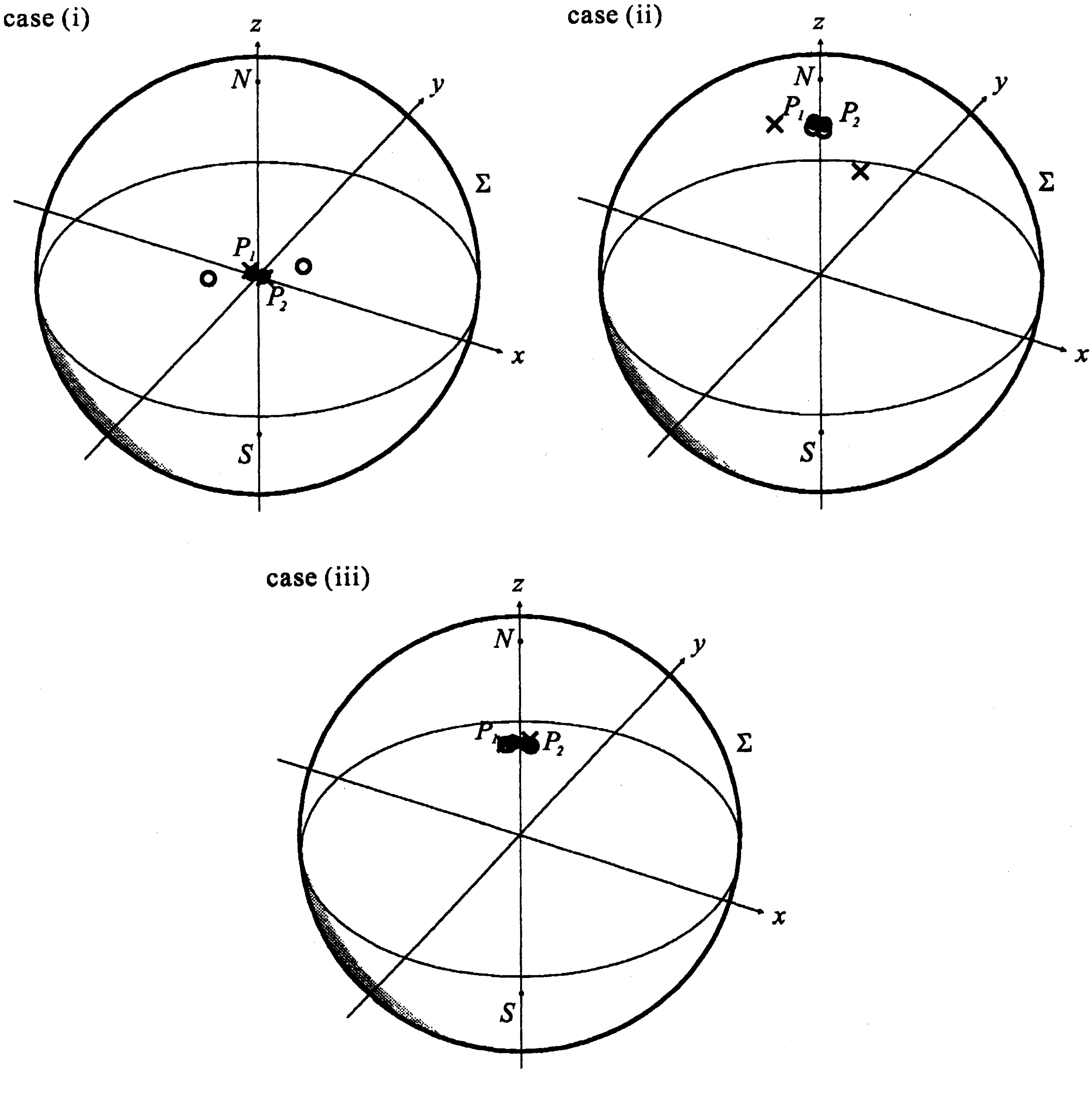


図 3: xy-平面射影法とリーマン球面射影法の比較. •: 真のソース. ×: xy-平面への射影法により推定されたソース. ○: リーマン球面 Σ への射影により推定されたソース. case (i): 領域 Ω の中心付近に 2 つのソースが隣接してある場合, xy-平面射影法の方が精度高く推定する. case (ii): 北極付近に 2 つのソースが隣接してある場合, リーマン球面射影法の方が精度高く推定する. case (iii): 中心と北極の中間付近の深さに 2 つのソースが隣接してある場合, 両射影法とも精度高く推定する.

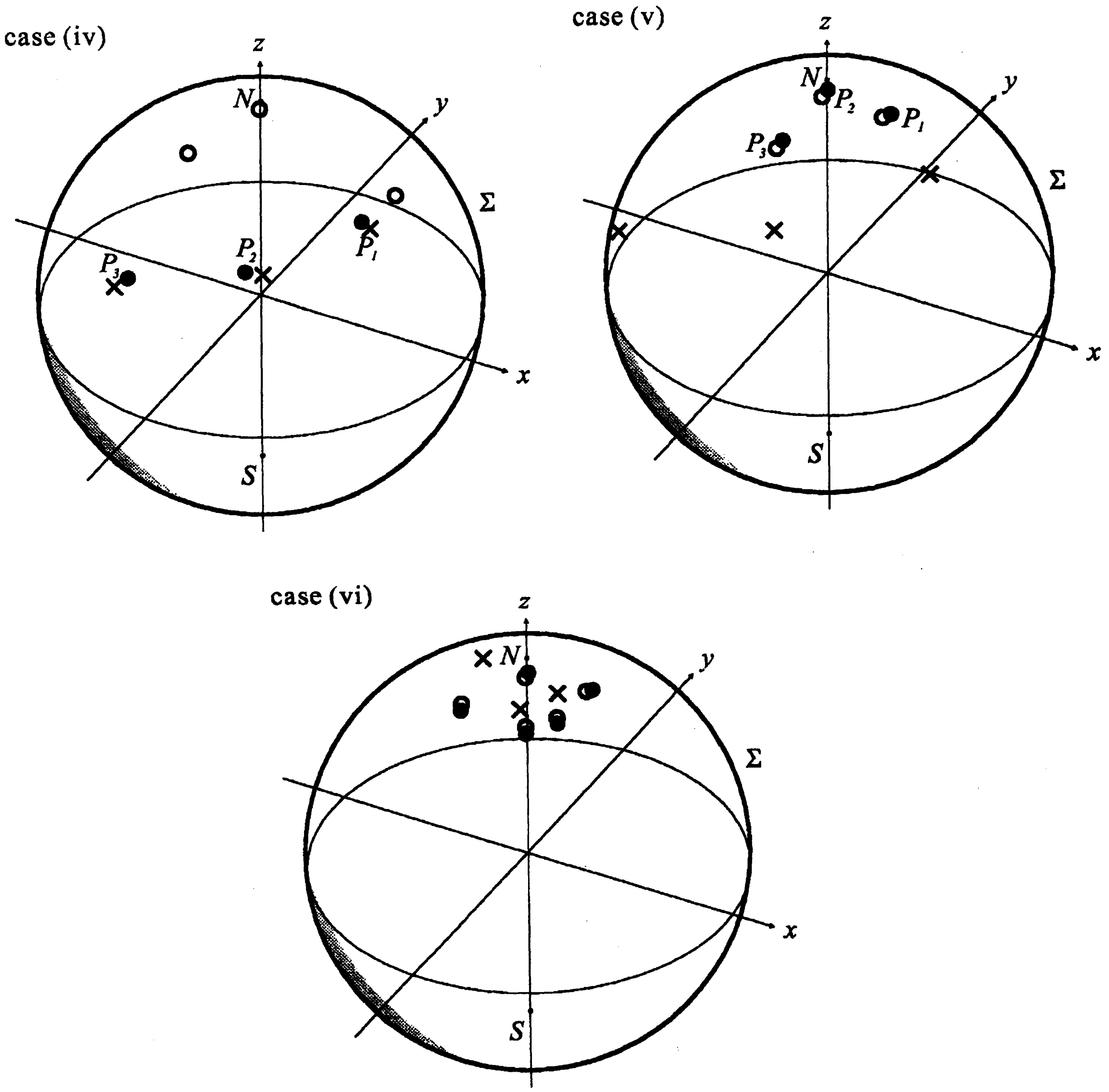


図 4: xy-平面射影法とリーマン球面射影法の比較. case (iv): Ω の中心付近にソースがに分布している場合, xy-平面射影法の方が精度高く推定する. case (v): 北極付近にソースが集中している場合, リーマン球面射影法の方が精度高く推定する. case (vi): 北極付近に 5 個のソースがある場合, リーマン球面射影法の方が精度高く推定する.

5 高階微分計測に基づくリーマン球面射影法

一様無限媒体中のポテンシャル

$$u'(x,y,z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k}{\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2+(z-z_k)^2}} \tag{36}$$

に対し，複素形式の空間高階微分

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m u'(x,y,z) = (-1)^m(2m-1)!!\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k\left((x-x_k)+i(y-y_k)\right)^m}{\left(\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2+(z-z_k)^2}\right)^{2m+1}}, \tag{37}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{\partial}{\partial z}u'(x,y,z) = (-1)^{m+1}(2m+1)!!\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k\left((x-x_k)+i(y-y_k)\right)^m(z-z_k)}{\left(\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2+(z-z_k)^2}\right)^{2m+3}}, \tag{38}$$

を考える．北極点 $N(0,0,1)$ において式 (37)，(38) の高階微分を計測できれば

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m u'(0,0,1) = (2m-1)!!\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k(x_k+iy_k)^m}{\left(\sqrt{x_k^2+y_k^2+(1-z_k)^2}\right)^{2m+1}}, \tag{39}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{\partial}{\partial z}u'(0,0,1) = -(2m+1)!!\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k(x_k+iy_k)^m(1-z_k)}{\left(\sqrt{x_k^2+y_k^2+(1-z_k)^2}\right)^{2m+3}}. \tag{40}$$

が得られる．従って左辺の高階微分を

$$\gamma_m \equiv \frac{2^m}{(2m-1)!!}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m u'(0,0,1), \tag{41}$$

$$\delta_m \equiv -\frac{2^m}{(2m+1)!!}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{\partial}{\partial z}u'(0,0,1), \tag{42}$$

と書けば，再び式 (15)，(16) と等価な

$$\gamma_m = \sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k}{d_k}R_k^m, \tag{43}$$

$$\delta_m = \sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k}{d_k}R_k^m\zeta_k, \tag{44}$$

を得る．すなわち，ソースが無限媒体中に存在する場合は，式 (15)，(16) の境界積分，もしくは式 (41)，(42) の高階微分によって得られる γ_m, δ_m に基づき，リーマン球面への射影点 R_k，および第三成分 ζ_k を求めることができる．

本節の議論は無限媒体中にソースが存在する場合に限定されたものであるが，脳磁図 (Magnetoencephalography; MEG) 逆問題におけるグラジオメータのようにノイズ環境下で場の空間高階微分を直接高感度に検出する様々な計測手法が開発されており [9]，これらとリーマン球面射影法を結びつけることで，局所的計測から浅いソースを安定に同定することが期待される．

6 結論

本論文では，ポアソン方程式における点ソースの個数，3 次元位置，強さを再構成する手法を述べた．ポテンシャルの多重極展開に注目し，低次モーメントを用いソースを xy-平面に射影する方法，高次モーメン

トの無限級数を用いソースをリーマン球面に射影する方法を提案した．両者の方法ともモーメント問題に帰着され，ソースパラメタを陽に再構成することができる．xy-平面射影法は領域中心部付近に存在するソースを，リーマン球面射影法は北極付近に存在するソースを精度良く推定することを数値シミュレーションで示した．またソースが無限媒体に存在する場合，リーマン球面射影法はポテンシャルの空間高階微分からも構成できることを示した．

参考文献

[1] K. Ohnaka and K. Uosaki: Boundary Element Approach for Identification of Point Forces of Distributed Parameter Systems, Int. J. Control, Vol. 49, No. 1, pp. 119-127, 1989.

[2] 久保 司郎，大中 幸三郎他：境界積分に基づく物体内の発熱源および荷重の同定，日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 54, No. 503, pp. 1329-1334, 1988.

[3] T. Ohe and K. Ohnaka : A Precise Estimation Method for Locations in an Inverse Logarithmic Potential Problem for Point Mass Models, Appl. Math. Modeling, Vol. 18, pp. 446-452, 1994.

[4] A. El-Badia and T. Ha-Duong : An Inverse Source Problem in Potential Analysis, Inverse Problems, Vol. 16, No.3, pp. 651-663, 2000.

[5] D.B.Geselowitz: Multipole Representation for an Equivalent Cardiac Generator, Proc. IRE, Vol. 48, pp. 75-79, 1960,

[6] P. Kravanja, T. Sakurai, and M. V. Barel: On locating clusters of zeros of analytic functions, BIT, Vol. 39, No. 4, pp. 646-682, 1999.

[7] T. Nara and S. Ando: A projective method for an inverse source problem of the Poisson equation, Inverse problems, Vol. 19, No. 2, pp. 355-369, 2003.

[8] E. W. Hobson : The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge University Press, 1931.

[9] M. Hämäläinen, R. Hari, R. J. Ilmoniemi, J. Knuutila, and O. V. Lounasmaa: Magnetoencephalography - theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain, Reviews of Modern Physics, Vol. 65, No. 2, pp. 413-497, 1993.