数理解析研究所講究録 1324 巻 2003 年 33-46

Introduction to p-adic multiple zeta values

京大数理研　古庄英和(Hidekazu Furusho)*

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University.
E-mail : furusho@kurims.kyoto-u.ac.jp

要約：多重ゼータ値の p 進版を考えてみたのでその紹介をします。

ch 1. 何故 p 進多重ゼータ値は簡単に定義できないのか？

(ふつうの)多重ゼータ値とは次で定義される実数のことをさします。
$$\zeta(k_1,\cdots,k_m):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_m}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_m^{k_m}}$$
ここで，$k_1,\cdots,k_m\in\mathbb{N}$，$k_m>1$ としています。これは $k_m=1$ のときは発散していますが，$k_m>1$ のときは必ず収束してくれます。多重ゼータ値は現在様々な数学者達(及び物理学者達)によって研究されていますが、これの p 進版(p：素数)を考えている人はいないみたいだったので p 進多重ゼータ値というものを考えたら何か面白い話が作れないだろうかと思ったのが私の p 進多重ゼータ値の研究の発端です。p 進版を考えるにあたってまず最初に直面するのは p 進多重ゼータ値をどう定義するかという問題でしょう。恐らく安直に浮かぶ案として「上の式の各項を $\mathbb{R}$ の元でなく $\mathbb{Q}_p$ の元と思い $\mathbb{Q}_p$ 内で和をとってその極

* 著者は日本学術振興会から援助をして頂いております。

限値としてp進多重ゼータ値を定義してみてはどうか」というのが挙げられるでしょうが残念なことに「この無限和は$\mathbb{Q}_p$内では絶対に収束してくれません」。その理由を簡単に説明しますと、このような無限和が$\mathbb{Q}_p$内で収束するためにはずうっと先の項はp進的に0に収束しなくてはいけないはず。ところが$\left\{\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_m^{k_m}}\right\}$は$\mathbb{R}$内では0に収束してくれているのに$\mathbb{Q}_p$内では全然0に近付いてくれません。だから収束しないのです。これがCh1のタイトル「なぜp進多重ゼータ値は簡単に定義できないのか？」の答えです。

というわけなので、p進多重ゼータ値をうまく定義するためには(ふつうの)多重ゼータ値の別解釈が必要とされます。今回私が採用した多重ゼータ値の解釈とは次です。

「多重ゼータ値は(一変数)多重ポリログの$z=1$での特殊値である。」――――(*)

他にも、「多重ゼータ値は多重ゼータ関数の格子点での特殊値である。」とか「多重ゼータ値は結び目不変量である。」とか「多重ゼータ値は射影直線引く3点の基本群の周期である。」とか色々別種の解釈もあるでしょうが、(*)のp進化，即ち

「p進多重ポリログというものを考え、それの$z=1$での値としてp進多重ゼータ値を定義する。」

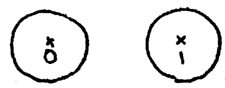
が私のここでの方針です。

(一変数)多重ポリログとは下の級数で定義される関数のことをさします。 $Li_{k_1,\cdots,k_m}(z) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_m} \frac{z^{n_m}}{n_1^{k_1}\cdots n_m^{k_m}}$

ここで、$k_i \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ としています。($k_m=1$ であっても構わない。)

これは、特に $m=1$ のときふつうのポリログになっています。

これが $|z|<1$ のとき絶対収束していることを見るのはたやすいでしょう。「これの $z \to 1$ での極限値が $k_m>1$ のとき多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\cdots,k_m)$ に収束する」というのが(*)のくわしい説明です。私は上の多重ポリログの定義式において $z\in\mathbb{C}$ を $z\in\mathbb{C}_p$ に置き換えて $\mathbb{C}_p$ 内で和をとって考えたものを p 進多重ポリログの定義にしました。面白いことにこの p 進多重ポリログも半径1の開円板内部、即ち $|z|_p<1$ のとき、(ここで $|\cdot|_p$ とは $\mathbb{C}_p$ の標準的な乗法付値のこと), $\mathbb{C}_p$ の位相で収束しています。そこで $\mathbb{C}$ と同様にするためにこの p 進多重ポリログの $z=1$ での極限値として p 進多重ゼータ値を定義してみようと思いたくなるわけですがこのままではまだ甘いです。何故かというと $z=1$ は $\{z : |z|_p<1\}$ から結構遠いからです。(私のいってることがよく分からない読者は右の図と p 進の世界で起こる $\{|z|_p<1\}\cap\{|z-1|_p<1\}=\emptyset$ という悲劇を思い浮かべてみて下さい。)



そこで困った私は p 進多重ポリログをある方法で全平面に p 進解析接続してみることにしました。ところがこのときブランチがあまりにも沢山派生してしまうという災難に

遭遇してしまうのですが、それにも動じず特異点 $z=1$ に近付くとその呪縛から逃れられることなどなどを次章で説明していきます。p進多重ゼータ値はふつうの多重ゼータ値とちがって簡単に定義できずその定義の仕方自身に既に充分に味わえるだけの面白さもあり、きっと面白い研究対象だと思います。私の研究が多重ゼータ値と同様数学の領域の1つに成長していって欲しいなと願っています。

Ch2. 多重ゼータ値 vs. p進多重ゼータ値

この章では各頁を右側と左側に分けて、左側は今まで考えられてきたふつうの多重ゼータ値に関する話をして右側は私が考えたp進多重ゼータ値の話をすることにしました。照らし合わせてみると面白いと思います。

① MPL: $k_1,\cdots,k_m\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}$ に対して(一変数)多重ポリログ(略してMPL*)とは次で定まる関数のことである。

$$Li_{k_1\cdots k_m}(z):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_m}\frac{z^{n_m}}{n_1^{k_1}\cdots\cdots n_m^{k_m}}$$

② 収束: MPLは $|z|<1$ で収束する。 pf 証明は容易。

① p-adic MPL: $k_1,\cdots,k_m\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}_p$ に対して(一変数)p進多重ポリログ(略してp-adic MPL*)とは次で定まる関数のことである。

$$Li_{k_1\cdots k_m}(z):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_m}\frac{z^{n_m}}{n_1^{k_1}\cdots\cdots n_m^{k_m}}$$

② 収束: p-adic MPLは $|z|_p<1$ で収束する。 pf 証明は容易。

*) MPLとはmultiple polylogarithmの略です。これは $m=1$ のときは、(古典的な)ポリログ　(Colemanの)p進ポリログ[Col]になっています。

③ 微分関係式：MPL の間には次の関係が成り立つ。

$$\cdot\ \frac{d}{dz}Li_{k_1\cdots k_m}(z)=\begin{cases}\frac{1}{z}Li_{k_1\cdots k_m-1}(z) & (k_m\neq 1)\\ \frac{1}{1-z}Li_{k_1\cdots k_{m-1}}(z) & (k_m=1)\end{cases}$$

特に $Li_1(z)$ は次を満たす。

$$\frac{d}{dz}Li_1(z)=\frac{1}{1-z}$$

pf 証明は①の定義から direct な計算で出る。//

④ 解析接続：③の微分関係式より MPL の反復積分表示

$$Li_{k_1\cdots k_m}(z)=\begin{cases}\int_0^z\frac{1}{t}Li_{k_1\cdots k_m-1}(t)dt & (k_m\neq 1)\\ \int_0^z\frac{1}{1-t}Li_{k_1\cdots k_{m-1}}(t)dt & (k_m=1)\end{cases}$$

が得られる。そして特に

$Li_1(z)=-\log(1-z)$ である。

③ 微分関係式：p-adic MPL の間には次の関係が成り立つ。

$$\cdot\ \frac{d}{dz}Li_{k_1\cdots k_m}(z)=\begin{cases}\frac{1}{z}Li_{k_1\cdots k_m-1}(z) & (k_m\neq 1)\\ \frac{1}{1-z}Li_{k_1\cdots k_{m-1}}(z) & (k_m=1)\end{cases}$$

特に $Li_1(z)$ は次を満たす。

$$\cdot\ \frac{d}{dz}Li_1(z)=\frac{1}{1-z}$$

pf 証明は①の定義から direct な計算で出る。//

④ 解析接続[F1]：基本的に左と同じ様に反復積分して解析接続をする。そのために Coleman の p 進積分論[Col]を用いるのだがこの積分論はログのブランチ $\log^a$ $(a\in\mathbb{C}_p)$ の取り方、即ち元 $a\in\mathbb{C}_p$ の取り方毎に決まる積分論であった([Col])。(ログのブランチ $\log^a$ とは $z=1$ でおきまりの Taylor 展開を持ち $\log^a(p)=a$ を満たす解析的群準同型 $\mathbb{C}_p^\times\to\mathbb{C}_p$ のこと。) そこで1つブランチ $a\in\mathbb{C}_p$ を固定して、以下ではこれに

この反復積分表示により、当初半径1の開円板でしか定義されていなかったMPLがそれを越えて解析接続することができる。

しかし、

⑤「MPLは全平面にうまく解析接続できない。でも普遍被覆 $\widetilde{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})-\{0,1,\infty\}}$ までいけばうまく解析接続できる。」

なぜかというと、MPLは $t=0, 1, \infty$ の3点で1位の極をもつ微分形式 $\frac{dt}{t}$ と $\frac{dt}{1-t}$ の反復積分であるためにこの3点の周りを回るとモノドロミーのずれが起こるからである。だから、

⑥「各MPLは解析接続すると無数にブランチが派生してしまう。」

attach するColemanの p 進積分論を用いることにする。すると左と同じ様にして当初半径1の開円板でしか定義されていなかった p-adic MPL がそれを越えて解析接続できる。

そしてこちらの場合だと

⑤「p-adic MPLは全平面に解析接続することができる。」

正確に言うと

「p-adic MPLは $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)-\{1,\infty\}$ にまで解析接続できる。」

ここが左と違う点！

⑥「各p-adic MPLは解析接続すると無数にブランチが派生してしまう。」

ここは左と同じ点！

$\left[\widetilde{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})-\{0,1,\infty\}} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C})-\{0,1,\infty\}\right] = \aleph_0$

なので

「このブランチは各々 $\aleph_0$ 個もある。」

⑦ $k_m > 1$ のとき

$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} Li_{k_1\cdots k_m}(z)$ は収束する。

何故ならColemanのp進積分論は各ブランチ $a\in\mathbb{C}_p$ の取り方に依存していたからであり、これに応じて解析接続されたp-adic MPLが決まるからである。以後、ブランチ $a\in\mathbb{C}_p$ に対して決まる全平面に解析接続されたp-adic MPLを $Li^{a}_{k_1\cdots k_m}(z)$ とかくことにする。$\#\mathbb{C}_p = \aleph$ なので

「このブランチは各々 $\aleph$ 個もある。」

ここが左と違う点!

⑦Th([F1]): $k_m>1$ のときすべての $a\in\mathbb{C}_p$ に対して、$\lim'_{z\to 1} Li^{a}_{k_1\cdots k_m}(z)$ は常に収束する。

(ここで $\lim'_{z\to 1}$ とは $\lim_{\substack{z_n\in\mathbb{C}_p\\ z_n\to 1\\ (\ast)}}$

条件 $(\ast)$:「点列の定義体 $\mathbb{Q}_p(z_1,z_2,\cdots)/\mathbb{Q}_p$ は finitely ramified (possibly infinite) extension field である。」という意味です。)

⑧ $k_m = 1$ のとき

$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} Li_{k_1\cdots k_m}(z)$ は発散する。

⑧[F1]: $k_m=1$ のとき $\lim'_{z\to 1} Li^{a}_{k_1\cdots k_m}(z)$ は常に発散するとは限らない。次頁の例⑪を参照せよ。

⑨ この$Li_{k_1\cdots k_m}(z)$を他のブランチで置き換えると$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} Li_{k_1\cdots k_m}(z)$の収束・発散条件は当然変わってくる。

⑩ Prop $k_m>1$のとき.(即ち,下の式で右辺が収束するとき)この極限は多重ゼータ値(略してMZV*)に収束する。即ち、

$$\zeta(k_1,\cdots,k_m)=\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} Li_{k_1\cdots k_m}(z)$$

である。

Notation index $(k_1,\cdots,k_m)$ $(k_i\in\mathbb{N})$に対して$k_1+\cdots+k_m$をこのindexのweightと呼ぶ。

⑪ 例:

⑨ Th([F1]) $\lim'_{z\to 1} Li^{a}_{k_1\cdots k_m}(z)$が収束するかしないかは$a\in\mathbb{C}_p$の取り方に依らない。そして収束する場合その極限値は$a\in\mathbb{C}_p$の取り方に依らない。

⑩ def([F1]):下の式で右辺が収束するような$(k_1,\cdots,k_m)$に対してp進多重ゼータ値(略してp-adic MZV*)を

$$\zeta_p(k_1,\cdots,k_m):=\lim'_{z\to 1} Li^{a}_{k_1\cdots k_m}(z)$$

で定義する。

Rmk (i) 上の⑨によりこの定義は$a\in\mathbb{C}_p$の取り方に依らない。

(ii) $k_m=1$のときもし右辺が収束するのであればその極限値は実は同じweightのp-adic MZVの$\mathbb{Q}$-linear combinationでかけてしまう([F1])。

⑪ 例:・$\zeta_p(n)=\frac{p^n}{p^n-1}L_p(n,\omega^{1-n})$ [Col]

ここでωはTeichmüller指標である。

これより特に、

---

* MZVとはmultiple zeta valueの略です。

• $\zeta(2k) = \dfrac{-(2\pi i)^{2k}}{2(2k)!} B_k$

• $\zeta(2k+1) \neq 0$

両式は、$\mathbb{C}$の世界では $\log(-1)$"="πiであることとp進の世界では $\log(-1)=0$ であることを使って説明できる。

• $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} Li_{2,1}(z)$ は発散する。即ち、

$$\zeta(2,1)=\infty.$$

• $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} Li_{3,1}(z)$ は発散する。即ち、

$$\zeta(3,1)=\infty.$$

• $n=2k$ のとき

$\zeta_p(2k)=0$ が従う。一方、

• $n=2k+1$ のときは $\zeta_p(2k+1)\neq 0$ をいうことさえ全然簡単なことではない。これは、

$$(L'_{2k+1}):\ H^2_{et}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-k))=0$$

をいうことと同値であり（これは岩沢理論の standard conjecture だと[KNQ]に書いてある。）、これは例えば p が正則素数のときや、$p-1 \mid 2k$ のときは示されている。

• $\lim\limits_{z\to 1}{}' Li^a_{2,1}(z)$ は発散せず $-2\zeta_p(3)$ に収束する。即ち、

$$\zeta_p(2,1) = -2\zeta_p(3).$$

• $$\lim_{z\to 1}{}' Li^a_{3,1}(z) = \begin{cases} 0 & \zeta_p(3)=0 \ (\Leftrightarrow (L'_3): \text{false}) \\ \text{発散} & \zeta_p(3)\neq 0 \ (\Leftrightarrow (L'_3): \text{o.k.}) \end{cases}$$

上の例を見ていると著者は、$\zeta_p(k_1,\dots,k_{m-1},1)$ が確定するかしないか（即ち、$\lim\limits_{z\to 1}{}' Li^a_{k_1\cdots k_{m-1},1}(z)$ が収束するかしないか）をいうことは何か整数論で深いことをい

⑫ Prop：MZVは複素関数MPLの特殊値なので複素数ということになるが、実際は実数である。

i.e. $MZV \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

$\boxed{\text{だとするとこちら側の世界の対応物って何なのだろう？}}$

⑬ 代数構造：$Z_0 := \mathbb{Q}$

Z_w：weightがwのMZVで生成された$\mathbb{R}$の$\mathbb{Q}$線型部分空間

$Z_\bullet := \bigoplus_{w=0}^{\infty} Z_w$: formal direct sum とせよ。

Prop この graded $\mathbb{Q}$-vector space $Z_\bullet$ は実は graded $\mathbb{Q}$-algebra の構造をしている。

うことになるのではとないかと思っている。

⑫ Prop([F1])：p-adic MZV は $\mathbb{C}_p$-値関数 p-adic MPL の特殊値なので $\mathbb{C}_p$ の元だが、実はより強く $\mathbb{Q}_p$ の元である。

i.e. p-adic $MZV \in \mathbb{Q}_p \subset \mathbb{C}_p$.

Question([F1]) 実はさらにより強く、p-adic MZV は全てp進整数でないだろうか？

i.e. p-adic $MZV \in \mathbb{Z}_p$?

という問題を筆者は今考えている。

⑬ 代数構造：$Z_0^p := \mathbb{Q}$

Z_w^p：weightがwのp-adic MZVで生成された$\mathbb{Q}_p$の$\mathbb{Q}$線型部分空間

$Z_\bullet^p := \bigoplus_{w=0}^{\infty} Z_w^p$: formal direct sum とせよ。

Prop([F1]) この graded $\mathbb{Q}$-vector space $Z_\bullet^p$ は実は graded $\mathbb{Q}$-algebra の構造をしている。

i.e. $Z_a \cdot Z_b \subset Z_{a+b}$ for $a, b \in \mathbb{N}$.

Rmk これの証明法は2通りある([Ka])。

・shuffle積和公式を用いる方法と

・harmonic積和公式を用いる方法

である。

⑭ Dimension Conjecture([Za]):

$\{d_w\}_{w=0}^{\infty}$ を $(d_0, d_1, d_2) = (1, 0, 1)$

$d_w = d_{w-2} + d_{w-3}$ で定まる数列としたとき

$\dim_{\mathbb{Q}} Z_w = d_w$ だろう.

⑮ 根拠: まず思いっ切り自明なことだが上のConjectureは $\dim_{\mathbb{Q}} Z_w \leq d_w$ (upper bounding) と

i.e. $Z_a^p \cdot Z_b^p \subset Z_{a+b}^p$ for $a, b \in \mathbb{N}$.

Rmk・筆者はp進KZ方程式というものを考えshuffle積和公式を示すことによってこのPropを証明した。

・こちら側の世界ではharmonic積和公式はまだ証明できていない。これを示すためには新しく'p-adic MZF'(p進多重ゼータ関数)を考え出す必要があるのかもしれない。

⑭ Dimension Guess([F-3]):

$\{d_w\}_{w=0}^{\infty}$ を左で定まる数列としたとき $\dim_{\mathbb{Q}} Z_w^p = d_{w-3}$ だろう(?).

・ちなみに $w=0$ のとき $Z_w^p = \mathbb{Q}$

$w=1$ のとき $Z_w^p = 0$

$w=2$ のとき $Z_w^p = \mathbb{Q} \cdot \zeta_p(2) = 0$.

⑬ 根拠: まず思いっ切り自明なことだが上のGuessは $\dim_{\mathbb{Q}} Z_w^p \leq d_{w-3}$ (upper bounding) と

$\dim_{\mathbb{Q}} Z_w \geq d_w$ (lower bounding) の2つに分けられる。

・upper bounding の方については Spec $\mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフのなす淡中圏の formulation ([De]) を用いて支持根拠が与えられる。

・一方, lower bounding の方についてもやはり Spec $\mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフのなす淡中圏の formulation を用いた支持理由があるにはあるのだが実はそれほど納得のいくものではない。

$\dim_{\mathbb{Q}} Z_w^p \geq d_{w-3}$ (lower bounding) の2つに分けられる。

・upper bounding の方については Spec $\mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフのなす淡中圏の formulation ([De]) を用いて支持根拠を与えることができる([F3])。

・一方、lower bounding の方についても左の $\mathbb{C}$ の場合と同様にして支持理由を与えることができるにはできるが、$\mathbb{C}$ の場合と比べてあまりにも楽観的すぎる気がする。

Rmk 個人的には $\dim_{\mathbb{Q}} Z_w^p \neq d_{w-3}$ であってもいいのではないかと思っているし $\dim_{\mathbb{Q}} Z_w^p$ は全ての素数 p に対して同じ値を取らずに各素数 p の整数論的性質に応じて違った値をとってくれてもいいのではと思ったりもしている。

⑯ MZV の線型・代数関係式

- duality formula (例えば[Ka]を参照)
- Drinfel'd associator の関係式([Dr], [F0])
- double shuffle relation (例えば[Ka]を参照)

その他にも、こちら側の世界ではいくつかの関係式が見つかっている。

⑰ 例:
- $\zeta(3)=\zeta(1,2)$
- $\zeta(4)=4\zeta(1,3)=\frac{4}{3}\zeta(2,2)=\zeta(1,1,2)=\frac{\pi^4}{90}$
- $\zeta(1,4)=2\zeta(5)-\zeta(2)\zeta(3)$

⑯ p-adic MZV の線型・代数関係式

- duality formula ([F3])
- p-adic Drinfel'd associator の関係式([F1], [F3])
- shuffle 積和公式は[F1]で示されているが harmonic 積和公式がまだ証明できていないので double shuffle relation はまだ。

同じ様にしてこちらの世界でも類似の関係式の成り立つことは当然期待される。

⑰ 例:
- $\zeta_p(3)=\zeta_p(1,2)=\frac{p^3}{p^3-1}L_p(3,\omega^{-2})$
- $\zeta_p(4)=\zeta_p(1,3)=\zeta_p(2,2)=\zeta_p(1,1,2)=0$
- $\zeta_p(1,4)=2\zeta_p(5)=\frac{2p^5}{p^5-1}L_p(5,\omega^{-4})$

他にも p 進 KZ 方程式の話や p 進 Drinfel'd associator の話についてもくわしくかきたかったのですが全部省かせて頂きます。これらを用いると p-adic MPL 間の函数等式が得られたりと色々と面白いのですがくわしくは[F1]を見て下さい。私の本研究集会における講演ではさらに Ch3 を設けて4つの実現(ℓ進エタール・ベッチ・ド・ラーム・p 進クリスタル)の世界における射影直線引く3点の基本群を図をかいて説明していき p 進多重ゼータ値の立場を明らかにしていったのですが(とても面白

かったと思うのですが）紙面が足りなくなったのでこれも省かせて頂きます。くわしくは[F2]を参照して頂くことにしたいと思います。

[参考文献]

[Col] Coleman, R. ; Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions, Inv. Math. 69 (1982), no.2, pp 171–208.

[De] Deligne, P. : Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, Galois groups over $\mathbb{Q}$, pp 79-297, MSRI Publ, Springer. 1989.

[Dr] Drinfel'd, V.G. : On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. 2. (1991), no 4, pp 829-860.

[F0] Furusho, H. : Multiple zeta values and Grothendieck-Teichmüller groups, RIMS-1357 (2002), submitted.

[F1] ________ : p-adic multiple zeta values I, submitted.

[F2] ________ : 〃 II, in preparation.

[F3] ________ : 〃 III, in preparation.

[Ka] 金子昌信 : 多重ゼータ値入門, 数理解析研究所講究録 1097「代数的整数論とその周辺」, (1999) pp. 50–68.

[KNQ] Kolster, M. and Nguyen Quang Do, T. : Syntomic regulators and special value of p-adic L-functions, Inv Math 133 (1998), no 2, pp 417–447.

[Za] Zagier, D. : Values of zeta functions and their applications, First European Congress of Math (Paris, 1992), pp 497-512, Birkhäuser, 1994.