

Title	$p$ -adic analogue of Shintani's formula (Algebraic Number Theory and Related Topics)
Author(s)	加塩, 朋和
Citation	数理解析研究所講究録 (2003), 1324: 47-57
Issue Date	2003-05
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/43145">http://hdl.handle.net/2433/43145</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## $p$ -adic analogue of Shintani's formula

京大理 加塩 朋和 (Tomokazu Kashio)  
Faculty of Science, Kyoto University

### Introduction

Shimura's CM-period と (多重) ガンマ函数, 及び (総実代数体上の)  $L$  函数の  $s = 0$  での微分とはそれぞれ関係がある. 例として the Chowla-Selberg formula と Yoshida's conjecture [14] を挙げる.

#### The Chowla-Selberg formula.

$$(0.1) \quad \pi p_K(\text{id}, \text{id})^2 \sim \prod_{a=1}^{d-1} \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{\omega_K \chi(a)/2h_K} = d \exp\left(\frac{L'(0, \chi)}{L(0, \chi)}\right).$$

ここに  $K$  は判別式  $-d$  の虚 2 次体,  $p_K$  は Shimura's CM-period symbol,  $\omega_K, h_K$  はそれぞれ  $K$  の類数と  $K$  に含まれる 1 のべき根の個数,  $\chi$  は  $K/\mathbb{Q}$  に対応する Dirichlet 指標とする. また  $a, b \in \mathbb{C}, b \neq 0$  に対し  $a \sim b$  は  $a/b \in \overline{\mathbb{Q}}$  を意味する.

**Yoshida's conjecture.**  $F$  を総実な体,  $K$  を  $F$  上 abelian な CM-field とする.  $G = \text{Gal}(K/F)$  と置き,  $\tau \in G$  に対して

$$(0.2) \quad \prod_{\sigma \in J_K} p_K(\sigma, \tau\sigma) \sim \pi^{-[K:\mathbb{Q}]\mu(\tau)/2} \exp\left(\sum_{\chi \in \hat{G}_-} \chi(\tau) \frac{L'(0, \chi)}{L(0, \chi)}\right).$$

また  $\tau$  が id, complex conjugation, その他の時, それぞれ  $\mu(\tau) = 1, -1, 0$  とする.

ここで Yoshida's conjecture はより精密な形の子想を持つ. すなわち Shintani's formula (§1) を用いて右辺を多重ガンマ函数で表し, 分解することにより (大まかに言うと) CM-period を多重ガンマ函数で表しているのである. つまり the Chowla-Selberg formula の一般化を与えている.

現在, この子想及び結果の  $p$  進化について吉田敬之教授と共同で研究を行っており, いくつかの成果が得られた. ここでは Shintani's formula の  $p$  進化について紹介したい.

## 1 Shintani's formula

この章では、総実体上の partial zeta 関数の  $s = 0$  での微分を多重ガンマ関数で表した Shintani's formula について復習しよう [13].  $r$  を正整数とする.  $a_i, x \in \mathbf{R}^+$  に対して  $r$  重 Riemann zeta 関数を

$$(1.1) \quad \zeta_r(s, (a_1, \dots, a_r), x) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \left\{ x + \sum_{i=1}^r a_i m_i \right\}^{-s}$$

で定義する. これは  $\operatorname{Re}(s) > r$  で収束し全  $s$  平面有理型に解析接続される. 更に

$$(1.2) \quad \log(\rho_r((a_1, \dots, a_r))) = -\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[ \frac{d}{ds} \zeta_r(s, (a_1, \dots, a_r), x) \right]_{s=0} + \log x \right\},$$

$$\left[ \frac{d}{ds} \zeta_r(s, (a_1, \dots, a_r), x) \right]_{s=0} = \log \left( \frac{\Gamma_r(x, (a_1, \dots, a_r))}{\rho_r((a_1, \dots, a_r))} \right)$$

と置くと  $\Gamma_r(x, (a_1, \dots, a_r))$  は Barnes [1] によって導入された  $r$  重ガンマ関数であり次を満たす.

$$(1.3) \quad \log \left( \frac{\Gamma_1(x, (1))}{\rho_1((1))} \right) = -\log(\sqrt{2\pi}) + \log(\Gamma(x)).$$

更に多重 zeta 関数の拡張を行う.  $A = (a_{ij})$  を  $n \times r$  行列 ( $a_{j,i} > 0$ ) とし,  $x = (x_1, \dots, x_r)$ ,  $x_i \geq 0, x \neq 0$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ ,  $\xi_i \in \mathbf{C}$ ,  $|\xi_i| \leq 1$  とする.

$$(1.4) \quad \zeta_r(s, A, x, \xi) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \xi^m \prod_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^r a_{j,i}(m_i + x_i) \right\}^{-s}$$

を考える. ここで  $\xi^m = \prod_{i=1}^r \xi_i^{m_i}$  とする. これは  $\operatorname{Re}(s) > r/n$  で収束し全  $s$  平面有理型に解析接続される. 今  $\zeta_r(s, A, x) = \zeta_r(s, A, x, (1, \dots, 1))$  と置こう. すると

$$(1.5) \quad \left[ \frac{d}{ds} \zeta_r(s, A, x) \right]_{s=0} = \sum_{j=1}^n \log \left( \frac{\Gamma_r(x^t A_j, A_j)}{\rho_r(A_j)} \right) + \frac{(-1)^r}{n} \sum_l C_l(A) \prod_{i=1}^r \frac{B_{l_i}(x_i)}{l_i!}$$

が成り立つ. ただし  $l$  は  $l = (l_1, \dots, l_r)$ ,  $l_1 + \dots + l_r = r$ ,  $l_i \geq 0$  を満たすもの全体を走り,  $B_l(x)$  は Bernoulli 多項式を表し,  $A_j = (a_{j,1}, \dots, a_{j,r})$ ,  $C_l(A) = \sum_{1 \leq j, k \leq n, j \neq k} C_{l,j,k}(A)$  であり

$$C_{l,j,k}(A) = \int_0^1 \left\{ \prod_{m=1}^r (a_{j,m} + a_{k,m} u)^{l_m-1} - \prod_{m=1}^r a_{j,m}^{l_m-1} \right\} \frac{du}{u}$$

である.

次に総実体上の partial zeta 関数を考える.  $F$  を  $n$  次の総実な体とし,  $J_F = \{\sigma_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ ,  $F$  の無限素点全体を  $\infty_1, \dots, \infty_n$  と置く.  $F$  の整 ideal  $\mathfrak{f}$  に対し,  $C_{\mathfrak{f}}$  を

$f\infty_1 \cdots \infty_n$  を法とする  $F$  の ideal 類群とする. また  $O_F$  を  $F$  の整数環,  $E_F^+$  を総正単数群,  $E_f^+ = \{u \in E_F^+, u \equiv 1 \pmod{f}\}$  と書くことにする.  $c \in C_f$  に対し partial zeta 関数を

$$\zeta_f(s, c) = \sum_{\mathfrak{g}} N\mathfrak{g}^{-s}$$

で定める. ただし  $\mathfrak{g}$  は  $c$  の類に含まれる整 ideal 全体を走る.

partial zeta 関数を上で拡張された多重 zeta 関数で表すために, cone 分解というものを考える.  $x \in F$  に対して  $x^{(i)} = \sigma_i(x)$  と書くことにする. すると  $x \mapsto (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$  により  $F$  を  $\mathbf{R}^n$  の部分環に埋め込むことが出来る. また  $\mathbf{R}^n$  中の  $r$  個の一次独立なベクトル  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) に対して  $C(v_1, v_2, \dots, v_r) = \{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_r v_r \mid t_i \in \mathbf{R}^+\}$  と置き,  $v_1, \dots, v_r$  を basis とする  $r$  次元の open simplicial cone と呼ぶ. すると次のことが言える.

**Lemma 1.** 有限集合  $J$  及び有限個の元  $v_{j,i} \in O_F$  ( $j \in J, i = 1, 2, \dots, r(j)$ ) が次のように取れる. すなわち各  $j$  について  $v_{j,1}, \dots, v_{j,r(j)}$  は一次独立で, かつ

$$\mathbf{R}^n = \bigsqcup_{j \in J} \bigsqcup_{u \in E_f^+} uC(v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,r(j)}).$$

ただし  $\bigsqcup$  は非交和を表す.

**Lemma 2.** 記号は上記の通りとし, 更に整 ideal  $\mathfrak{a}$  を  $\mathfrak{a}^{-1} \in c$  となるように取る. 必要なら取り変えて  $v_{j,i} \in \mathfrak{a}f$  とする.  $v_j = (v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,r(j)})$  と置き, 次のように定義する.

$$\begin{aligned} R(\mathfrak{a}^{-1}, j) &= R(\mathfrak{a}^{-1}, C(v_j)) \\ &= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{r(j)}) \in \mathbf{Q}^{r(j)} \mid 0 < x_i \leq 1, \sum_{i=1}^{r(j)} x_i v_{j,i} \in \mathfrak{a}, \equiv 1 \pmod{f}\}, \end{aligned}$$

この時,  $R(\mathfrak{a}^{-1}, j)$  は有限集合であり, 次が成り立つ.

$$\zeta_f(s, c) = N\mathfrak{a}^s \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \zeta(s, A_{v_j}, x).$$

ただし  $A_{v_j}$  は  $(i, l)$  成分を  $v_{j,i}^\sigma$  とする  $n \times r(j)$  行列とする.

さて, この Lemma と式 (1.5) より次を得る.

**Shintani's formula.** 記号は上記の通りとする. 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d'}{ds} \zeta_f(s, c) \right]_{s=0} &= \log(N\mathfrak{a}) \zeta_f(0, c) \\ &+ \sum_{\sigma \in J_F} \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \cdot \log \left( \frac{\Gamma_{r(j)}(x^\dagger v_j^\sigma, v_j^\sigma)}{\rho_{r(j)}(v_j^\sigma)} \right) \\ &+ \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \frac{(-1)^{r(j)}}{n} \sum_l C_l(A_{v_j}) \prod_{i=1}^{r(j)} \frac{B_{l_i}(x_i)}{l_i!}. \end{aligned}$$

## 2 p-adic multiple gamma functions

この章では、古典的な多重ガンマ関数の定義 [1] に習い、 $p$  進多重 zeta 関数 [3] の  $s = 0$  での微分により  $p$  進多重ガンマ関数を定義する.  $p$  を素数, その上にある  $F$  の素 ideal を一つ固定して  $\mathfrak{p}$  と置く.  $F$  には  $\mathfrak{p}$  による位相が入っていると考え, 完備化した体を  $F_{\mathfrak{p}}$  と置く.  $|\cdot|_p$  は  $|p|_p = 1/p$  で正規化した  $p$  進乗法付値を表すものとする.  $r$  を正整数とする. この時連続関数  $f(X) = f(X_1, \dots, X_r) : \mathbb{Z}_p^r \rightarrow F_{\mathfrak{p}}$  に対して

$$(2.1) \quad J_X(f(X)) = \lim_{l_1 \rightarrow \infty} \lim_{l_2 \rightarrow \infty} \cdots \lim_{l_r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{l_1+l_2+\cdots+l_r}} \sum_{n_1=0}^{p^{l_1}-1} \sum_{n_2=0}^{p^{l_2}-1} \cdots \sum_{n_r=0}^{p^{l_r}-1} f(n).$$

と定義する. これは必ずしも収束するとは限らない.  $r = 1$  の時以下の性質を持つ.

$$(2.2) \quad x \in F_{\mathfrak{p}} \text{ に対して, } J_X((X+x)^m) = B_m(x).$$

$$(2.3) \quad J_X\left(\binom{X}{m}\right) = \frac{(-1)^m}{m+1}.$$

ただし, 多項式環  $F_{\mathfrak{p}}[X]$  の元は  $\mathbb{Z}_p^r$  上の連続関数とみなし,  $\binom{X}{0} = 1$ ,  $m \geq 1$  の時  $\binom{X}{m} = \frac{X(X-1)\cdots(X-m+1)}{m!}$  とする. 更に  $\mathbb{Z}_p^s$  上の連続関数  $f(X_1, \dots, X_s)$  及び  $\mathbb{Z}_p^{r-s}$  上の連続関数  $g(X_{s+1}, \dots, X_r)$  がある時

$$(2.4) \quad \begin{aligned} J_{X_1, \dots, X_r}(f(X_1, \dots, X_s)g(X_{s+1}, \dots, X_r)) \\ = J_{X_1, \dots, X_s}(f(X_1, \dots, X_s))J_{X_{s+1}, \dots, X_r}(g(X_{s+1}, \dots, X_r)). \end{aligned}$$

ここで  $a_i, a \in O_{F_{\mathfrak{p}}}$ ,  $a_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ),  $s \in \mathbb{Z}_p$  に対し  $p$  進多重 zeta 関数を次で定義する.

$$(2.5) \quad \zeta_{p,r}(s, (a_1, a_2, \dots, a_r), a) = \frac{(-1)^r J_X \left( \theta_p^{(0)}(f(X)) f(X)^r \left( \theta_p^{(-1)}(f(X)) f(X) \right)^{-s} \right)}{(r-s)(r-1-s)\cdots(1-s)a_1 a_2 \cdots a_r}.$$

ただし記号は  $f(X) = \sum_{i=1}^r a_i X_i + a$ ,  $\theta_p$  は Teichmüller character, つまり  $\theta_p : O_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$  で次で定められるものである.  $|x|_p < 1$  の時  $\theta_p(x) = 0$ ,  $|x|_p = 1$  ならば  $\mathbb{Q}_p$  の有限次拡大体  $K$  で  $K \ni x$  となるものを取り,  $f$  を  $O_K$  の剰余体と  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  との拡大次数と置く. この時  $\theta_p(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} x^{p^l}$  で定める. これを用いて,  $|x|_p < 1$  ならば  $\theta_p^{(n)}(x) = 0$ ,  $|x|_p = 1$  ならば  $\theta_p^{(n)}(x) = (\theta_p(x))^n$  と定める. 更に  $y \in 1 + \overline{\mathfrak{p}}$  に対して  $y^s$  は  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} (y-1)^k$  で定義する. この  $p$  進多重 zeta 関数は次の性質を持つ.

**Lemma 3.**  $a_i, a \in O_{F_{\mathfrak{p}}}$ ,  $a_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ),  $s \in \mathbb{Z}_p$  に対し  $p$  進多重 zeta 関数は収束し,  $s = 0$  で解析的である. 更に  $a_i, a \in F$ ,  $a_i, a > 0$ ,  $|a_i|_p, |a-1|_p < 1$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ),  $k = 0, 1, 2, \dots$  に対して

$$\zeta_{p,r}(-k, (a_1, a_2, \dots, a_r), a) = \zeta_r(-k, (a_1, a_2, \dots, a_r), a).$$

次に  $p$  進  $r$  重ガンマ函数を次で定義する.  $a_i, a \in O_{F_p}, a_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, r)$  に対して

$$(2.6) \quad L\Gamma_{p,r}(a, (a_1, a_2, \dots, a_r)) = \frac{d\zeta_{p,r}(s, (a_1, a_2, \dots, a_r), a)}{ds} \Big|_{s=0}$$

と置く. この  $p$  進  $r$  重ガンマ函数は次の性質を持つ.

**Lemma 4.**  $L\Gamma_{p,r}((a_1, \dots, a_r), a)$  は  $a_i, a \in O_{F_p}, a_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, r)$  で連続であり,  $a \in \mathbb{Z}_p$  に対して

$$L\Gamma_{p,1}(a, (1)) = \log_p(\Gamma_p(a)).$$

ここで  $\log_p : C_p^\times \rightarrow C_p$  は Iwasawa  $p$  進 log 函数を表しており,  $\Gamma_p$  は Morita  $p$  進ガンマ函数であり  $\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{i=1, p \nmid i}^{n-1} i (n = 1, 2, \dots)$  で定義され  $\mathbb{Z}_p$  上の連続函数に延ばしたものである. この定義と性質は古典的な多重ガンマ函数のそれを踏襲している.

### 3 p-adic zeta functions over totally real fields

この章では  $p$  進 partial zeta 函数の構成を Cassou-Noguès [5] に習って行う.  $\zeta_r(s, A, x)$  の形の多重 zeta 函数は (少なくとも簡単には)  $p$  進での類似を持たない. そのためまずは  $p$  進化できる形への変形を行う. 記号は §1 と同じとする.  $c \in C_f$  に対して整 ideal  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  を次の様にする.  $\mathfrak{a}^{-1} \in \mathfrak{c}$  を固定する. それに対して open simplicial cones を Lemma 1, 2 の様にする.  $\mathfrak{b}$  は  $f$  と互いに素であり,  $\mathfrak{b} \neq (1)$  かつ  $C_f$  の中で  $\mathfrak{b} = 1$ , 更に次を満たすものを取る.

- (i)  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{D}) = 1$ ,
- (ii)  $(\mathfrak{b}, (v_{i,j})) = 1$  for all  $j \in J, i = 1, 2, \dots, r(j)$ ,
- (iii)  $O_F/\mathfrak{b} \simeq \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ .

ここで  $\mathfrak{D}$  は  $F$  の共役差積,  $b$  は  $\mathfrak{b} \cap \mathbb{Z}$  の正整数の生成元とする. 次に

$$(3.1) \quad \zeta_f(s, \mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{b}) = (Nb^{1-s} - 1)\zeta_f(s, \mathfrak{c})$$

と置こう.  $e(x) = \exp(2\pi ix)$  と表すことにする. 次の Lemma 及び Theorem が成り立つ.

**Lemma 5.**  $\nu \in \mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$  を次を満たすように取れる.  $Tr(\nu) = c/b, 0 \neq c \in \mathbb{Z}, (b, c) = 1$  であり, かつ

各  $i, j$  に対して  $e(Tr(v_{i,j}\nu))$  は 1 の原始  $b$  乗根,

$$\sum_{\mu=0}^{b-1} e(Tr(\alpha\mu\nu)) = \begin{cases} 0 & \alpha \in O_F, \notin \mathfrak{b} \text{ の時,} \\ Nb = b & \alpha \in \mathfrak{b} \text{ の時.} \end{cases}$$

**Theorem 6.**  $\xi_{j,i} = e(Tr(v_{j,i}\nu)), \xi_x = e(Tr(\nu \sum_{i=1}^{r(j)} x_i v_{j,i}))$  と置く時,

$$\zeta_f(s, \mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{b}) = Na^s \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \xi_x^\mu \zeta_{r(j)}(s, A_{v_j}, x, (\xi_{j,1}^\mu, \dots, \xi_{j,r(j)}^\mu)).$$

$\zeta_r(s, A, x, \xi)$  の形の多重 zeta 関数は (ある条件の下で)  $p$  進化できる. これを見て行こう.  $P$  を  $r$  変数の関数とする. この時  $r$  変数の形式的べき級数を次の様に定める.

$$R(P)(T) = \sum_k \frac{\lambda_k(P)}{(1-T)^k}.$$

ここで  $k = (k_1, \dots, k_r)$  は  $k_i = 0, 1, \dots$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ),  $k \neq 0$  を満たす  $k$  全体を走り,  $T = (T_1, T_2, \dots, T_r)$ ,  $(1-T)^k = (1-T_1)^{k_1} (1-T_2)^{k_2} \dots (1-T_r)^{k_r}$ ,

$$\lambda_k(P) = \sum_{l_1=0}^{k_1} \dots \sum_{l_r=0}^{k_r} \left\{ \begin{matrix} k_1 \\ l_1 \end{matrix} \right\} \dots \left\{ \begin{matrix} k_r \\ l_r \end{matrix} \right\} P(-l_1, -l_2, \dots, -l_r),$$

$$\left\{ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\} = \begin{cases} (-1)^{b-1} \binom{a-1}{b-1} & a, b \geq 1 \text{ の時,} \\ 1 & a = 0 \text{ の時,} \\ 0 & a \geq 1, b = 0 \text{ の時,} \end{cases}$$

と置いた. この時次が成り立つ.

**Lemma 7.**  $A = (a_{i,j})$  は  $n \times r$  行列 ( $a_{j,i} > 0$ ),  $x = (x_1, \dots, x_r)$ ,  $x_i \geq 0, x \neq 0$ , また各  $i$  において  $\xi_i \neq 1$  は 1 のべき乗根であるとする. この時  $k = 0, 1, \dots$  に対して

$$\zeta_r(-k, A, x, \xi) = R\left(\prod_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^r a_{j,i} (X_i + x_i) \right\}^k\right)(\xi).$$

ここで (ある種の)  $p$  進多重 zeta 関数を定義する.  $p$  は odd prime とする ( $p = 2$  でも条件を厳しくすれば同様の議論ができる).  $a_{j,i}, x_i \in O_{\mathfrak{p}}$  は  $|a_{j,i}|_p, |\prod_{j=1}^n \{\sum_{i=1}^r a_{j,i} x_i\} - 1|_p < 1$  を満たす元,  $\xi_i \neq 1$  は  $p$  がその位数を割らない 1 のべき乗根 ( $j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, r$ ) としたとき

$$(3.2) \quad \zeta_{p,r}(s, A, x, \xi) = R\left(\prod_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^r a_{j,i} (X_i + x_i) \right\}^{-s}\right)(\xi)$$

と定義する. ただし右辺の収束は  $p$  進位相で考える. この  $p$  進  $r$  重 zeta 関数は次の性質を満たす.

**Lemma 8.** 上記の条件で  $\zeta_{p,r}(s, A, x, \xi)$  は収束する. 更に  $a_{j,i}, x_i \in F, a_{j,i} > 0, x_i \geq 0$  と仮定すると  $k = 0, 1, 2, \dots$  に対して

$$\zeta_{p,r}(-k, A, x, \xi) = \zeta_r(-k, A, x, \xi)$$

が成り立つ.

この  $p$  進多重 zeta 関数を使って  $p$  進 partial zeta 関数を構成する. ( $p$ ) の上の prime ideal は全て  $f$  を割っていると仮定する. この時

$$(3.3) \quad \zeta_{p,f}(s, a^{-1}, b) = (\theta_p^{(-1)}(Na)(Nb))^s \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(a^{-1}, j)} \xi_x^\mu \zeta_{p,r}(s, A_{v_j}, x, \xi_j^\mu),$$

$$(3.4) \quad \zeta_{p,f}(s, c) = \frac{\zeta_{p,f}(s, a^{-1}, b)}{(\theta_p^{(-1)}(Nb)Nb)^{1-s} - 1}$$

と定義する. すると次の性質を持つ.

**Theorem 9.** 上記の条件で  $k = 0, 1, 2, \dots$   $k \equiv 0 \pmod{p^f - 1}$  に対して

$$\zeta_{p,f}(-k, c) = \zeta_f(-k, c).$$

ただし  $f$  は  $O_F/\mathfrak{p}$  と  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  の拡大次数とする. 更に  $\chi$  を  $C_f$  の odd character, また  $\Theta_p$  を  $\Theta_p(c) = \theta_p(N(c))$  で定義される character とする. すると  $p$  進  $L$  関数は

$$L_{p,f}(1 - m, \chi) = L_f(1 - m, \chi \Theta_p^{-m}), \quad (1 \leq m \in \mathbf{Z})$$

で特徴付けられ, 次で表せる.

$$L_{p,f}(s, \chi) = \sum_{c \in C_f} \chi \Theta_p^{-1}(c) \zeta_{p,f}(s, c).$$

#### 4 the derivatives at $s=0$ of $p$ -adic zeta functions

$p$  進 partial zeta 関数の微分を計算する. 中心となるアイデアは Cassou-Noguès [4] が用いている, 式 (3.2) の形の  $p$  進多重 zeta 関数が項別微分できて分解できる, ということである. すなわち次のが成り立つ.

**Lemma 10.**  $a_{j,i}, x_i \in O_{\mathfrak{p}}$  は  $|a_{j,i}|_p, |\sum_{i=1}^r a_{j,i} x_i - 1|_p < 1$  を満たす元,  $\xi_i \neq 1$  は  $p$  がその位数を割らない 1 のべき乗根 ( $j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, r$ ) としたとき

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \zeta_{p,r}(s, A, x, \xi)|_{s=0} &= R(-\log_p(\prod_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^r a_{j,i}(X_i + x_i) \right\}))(\xi) \\ &= \sum_{j=1}^n R(-\log_p(\left\{ \sum_{i=1}^r a_{j,i}(X_i + x_i) \right\}))(\xi) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{ds} \zeta_{p,r}(s, A_j, x, \xi)|_{s=0} \end{aligned}$$

この Lemma と cone の取替え等の操作, 及び若干の計算により次の主定理を得る.



Theorem 11.  $f, c, a, b, v_{j,i}, b$  を上記の様にする,  $\alpha \in O_F$  は  $b = (\alpha)$  となる元とする  
ここで新しく *open simplicial cones*  $\{C(v_{j'}) | j' \in J'\}$  を次を満たすように取る.

(a)  $v_{j',i} \in \mathfrak{a}f$  であり各々総正である.

(b)  $\{C(v_{j'}) | j' \in J'\}$  は  $\{C(v_j) | j \in J\}$  の細分である.

(c)  $u_{j'} \in E_f^+$  が存在し,  $\{C(u_{j'}v_{j'}) | j' \in J'\}$  が  $\{C((b/\alpha)v_j) | j \in J\}$  の細分となる.

この時

$$\left[ \frac{d}{ds} \zeta_f(s, c) \right]_{s=0} = \log(N\mathfrak{a}) \zeta_f(0, c) + \sum_{\sigma \in J_F} \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \log \left( \frac{\Gamma_{r(j)}(x^t v_j^\sigma, v_j^\sigma)}{\rho_{r(j)}(v_j^\sigma)} \right) + T_0(\mathfrak{a}^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}).$$

ただし

$$T_0(\mathfrak{a}^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}) = \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \frac{(-1)^{r(j)}}{n} \sum_l C_l \left( \begin{matrix} v_j^{\sigma_1} \\ \vdots \\ v_j^{\sigma_n} \end{matrix} \right) \prod_{i=1}^{r(j)} \frac{B_{l_i}(x_i)}{l_i!}.$$

次に (p) の上の *prime ideal* は全て  $f$  を割っていると仮定する. この時

$$\left[ \frac{d}{ds} \zeta_{p,f}(s, c) \right]_{s=0} = \log_p(N\mathfrak{a}) \zeta_{p,f}(0, c) + \sum_{\sigma \in J_F} \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} L \Gamma_{p,r(j)}(x^t v_j^\sigma, v_j^\sigma) + T_p(\mathfrak{a}^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}),$$

ただし

$$T_p(\mathfrak{a}^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}) = \frac{-b}{b-1} \sum_{\sigma \in J_F} \sum_{j' \in J', u_{j'} \neq 1} \sum_{x' \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j')} \log_p(u_{j'}^\sigma) \zeta_{r(j')}(0, v_{j'}^\sigma, x'^t v_{j'}^\sigma).$$

更に同じ記号を用いて

$$T_0(\mathfrak{a}^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}) = \frac{-b}{b-1} \sum'_{\sigma \in J_F} \sum_{j' \in J', u_{j'} \neq 1} \sum_{x' \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j')} \log(u_{j'}^\sigma) \zeta_{r(j')}(0, v_{j'}^\sigma, x'^t v_{j'}^\sigma)$$

と表せる.

ここで “ $\{C(v_{j'}) | j' \in J'\}$  は  $\{C(v_j) | j \in J\}$  の細分である” とは

$$\text{全射 } m: J' \rightarrow J \text{ が存在し } C(v_j) = \bigsqcup_{j' \in m^{-1}(\{j\})} C(v_{j'}) \text{ を満たす}$$

事とする ([14, §5]).

この Theorem は Ferrero-Greenberg の結果 [7, Proposition 1] を含んでいる。この結果を求めてみよう。  $F = \mathbb{Q}$ ,  $d \geq 1$  とすると次を同一視できる。

$$\begin{aligned} C_{(d)} &= (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \\ \overline{(a/b)} &\mapsto ab' \pmod{d\mathbb{Z}} \\ \overline{(a)} &\mapsto a \pmod{d\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

ここで  $a, b = 1, 2, \dots$  は  $(a, d) = (b, d) = 1$  となる数で  $b' = 1, 2, \dots$  は  $bb' \equiv 1 \pmod{d}$  を満たす数とする。これにより conductor  $d$  の primitive Dirichlet character  $\chi$  を  $C_{(d)}$  の character とみなす。  $d$  は  $p$  で割れないとし、  $f = (pd)$  と置く。  $\{(a) \mid 1 \leq a \leq pd-1, (a, pd) = 1\}$  により  $C_{(pd)}$  の元を表すことにする。  $C_{(v^{(a)})}$ ,  $(v^{(a)} := apd)$  で open simplicial cone を定義でき  $b = (b)$ ,  $(b \geq 1)$  としては  $1 \leq a \leq pd$  の範囲の  $a$  に対して  $(b, a) = 1$  であり、  $b \equiv 1 \pmod{pd}$  である数を取ればよい。すると Theorem 11 により

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{ds} \zeta_{p,(pd)}(s, (a')) \right]_{s=0} &= \log_p(a) \zeta_{p,1}(0, apd, aa') + L\Gamma_{p,1}(aa', (apd)) \\ &= L\Gamma_{p,1}(a', (pd)), \end{aligned}$$

ただし  $a'$  は  $1 \leq a' \leq pd$ ,  $aa' \equiv 1 \pmod{pd}$  を満たす数とする。更に  $\chi$  を conductor  $d$  の primitive Dirichlet character とすると次を得る。

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{ds} L_{p,(pd)}(s, \chi\theta_p) \right]_{s=0} &= \sum_{1 \leq a \leq pd-1, (a, pd)=1} \chi((a')) L\Gamma_{p,1}(a', (pd)) \\ &= \sum_{1 \leq a \leq d-1, (a, d)=1} \chi(a) L\Gamma_{p,1}(a, (d)) \\ &= \sum_{1 \leq a \leq d-1, (a, d)=1} \chi(a) L\Gamma_{p,1}(a/d, (1)) - \log_p(d) L_{p,(pd)}(0, \chi\theta_p). \end{aligned}$$

よって次を得た。

$$(4.1) \quad \left[ \frac{d}{ds} L_{p,(pd)}(s, \chi\theta_p) \right]_{s=0} = \sum_{1 \leq a \leq d-1, (a, d)=1} \chi(a) \log_p(\Gamma(a/d)) - \log_p(d) L_{p,(pd)}(0, \chi\theta_p).$$

## 5 two applications

### 5.1 p-adic CM-periods

本来の目標である  $p$  進 CM-period との関係について触れたい。すでに我々は簡単な場合の Yoshida's conjecture の  $p$  進化を得ている。すなわち  $F = \mathbb{Q}$ ,  $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ ,  $(p, m) = 1$  の場合である。ここで  $\zeta_m$  は 1 の原始  $m$  乗根を表す。この時次が成り立つ。

$$(5.1) \quad \Omega_p^K(\text{id}, \tau) \sim \exp_p \left( \sum_{\chi} \frac{-\chi(\tau)}{[K : \mathbb{Q}]} \frac{L'_p(0, \chi\theta_p)}{L(0, \chi)} \right).$$

ただし  $\chi$  は odd Dirichlet characters modulo  $m$  全体を走り,  $\Omega_p^K$  は Ogus [9] の定めた  $p$  進 CM-period symbol に多少手を加えたものを使っている.  $L_p$  は Kubota-Leopoldt  $p$  進  $L$  函数であり,  $\sigma_p$  は  $\text{Gal}(K/F)$  の元で  $\zeta_m \mapsto \zeta_m^p$  と移すもの,  $\exp_p$  は (拡張された)  $p$  進指数函数としている. introduction にも書いた通り, 更なる一般化について (適当な  $p$  進 CM-period の定義も含めて) 吉田敬之教授と共同で研究中である.

## 5.2 the order at $s = 0$ of $p$ -adic $L$ -functions

$K/F$  は abelian であるとし, その conductor を  $f_0$  と置く.  $f_0$  と  $p$  は互いに素であるとし,  $f = f_0 * \prod_{p|f_0} p$  と定める.  $\chi$  を conductor  $f_0$  の primitive, odd な character とする時, 次の予想がある.

$$(5.2) \quad L_{p,f}(s, \chi\theta_p) \text{ の } s = 0 \text{ での order} = \#\{p|(p) \mid \chi(p) = 1\}.$$

ただし  $\#$  は集合の元の個数を表す記号とする. (この予想はもっと精密な形を持つ.) 自明な結果として次がある.

$$(5.3) \quad L_{p,f}(s, \chi\theta_p) \text{ の } s = 0 \text{ での order} = 0 \Leftrightarrow \#\{p|(p) \mid \chi(p) = 1\} = 0.$$

更に Theorem 11 で与えられる式により, 次の事が証明できる.

$$(5.4) \quad L_{p,f}(s, \chi\theta_p) \text{ の } s = 0 \text{ での order} \geq 2 \Leftrightarrow \#\{p|(p) \mid \chi(p) = 1\} \geq 2.$$

この問題も応用を研究中である.

## References

- [1] E. W. Barnes, The theory of the multiple gamma function, Trans. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904), 374-425.
- [2] P. Berthelot, A. Ogus, F-isocrystals and de Rham cohomology. I, Inv. Math. 72, 159-199 (1983).
- [3] P. Cassou-Noguès, Analogues  $p$ -adiques de quelques fonctions arithmétiques, Publ. Math. Bordeaux, p. 1-43, 1974-1975.
- [4] P. Cassou-Noguès, Analogues  $p$ -adiques des fonctions  $\Gamma$ -multiples, Société Mathématique de France Astérisque 61 (1979) p. 43-55.
- [5] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta  $p$ -adiques, Inv. Math. 51, 29-59 (1979).
- [6] P. Deligne, K. Ribet, Values of Abelian  $L$ -functions at negative integers over totally real fields, Inv. Math. 59 (1980), 227-286.

- [7] B. Ferrero, R. Greenberg, On the Behavior of  $p$ -adic  $L$ -Functions at  $s = 0$ , *Inv. Math.* 50, 91-102 (1978).
- [8] K. Iwasawa, *Lectures on  $p$ -adic  $L$ -function*, Princeton University Press and University of Tokyo Press (*Annals of Mathematics Studies*, 74), 1972.
- [9] A. Ogus, A  $p$ -adic Analogue of the Chowla-Selberg Formula,  *$p$ -adic Analysis* (F. Baldassarri, S. Bosch and B. Dwork editors), *Lecture Notes in Math.* 1454; Springer-Verlag 1990. pp. 319-341.
- [10] J.-P. Serre, *Formes modulaires et fonctions zêta  $p$ -adiques*, Proc. 1972 Antwerp Summer School, Springer *Lecture Notes in Math.* 350, 191-268 (1973).
- [11] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 23 (1976), 393-417.
- [12] T. Shintani, On special values of  $L$  functions of algebraic number fields, *Sûgaku* 29 (1977), 204-216 (in Japanese).
- [13] T. Shintani, On values at  $s = 1$  of certain  $L$  functions of totally real algebraic number fields, *Algebraic Number Theory, Proc. International Sympos., Kyoto, 1976*, Kinokuniya, Tokyo, 1977, pp. 201-212.
- [14] H. Yoshida, On absolute CM-periods II, *Amer. J. Math.* 120 (1998), 1199-1236.
- [15] H. Yoshida, *Lectures on absolute CM-periods*, book manuscript, 2002.