Title	剰余体が完全とは限らない局所体の分岐群 : A. Abbes氏との共同研究 (代数的整数論とその周辺)
Author(s)	斎藤, 毅
Citation	数理解析研究所講究録 (2003), 1324: 142-148
Issue Date	2003-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/43154
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1324 巻 2003 年 142-148

剰余体が完全とは限らない局所体の分岐群 (A.Abbes 氏との共同研究)

東京大学 数理科学研究科 斎藤 毅 (Takeshi SAITO)
Departmentt of Mathematical Sciences
University of Tokyo

K を完備離散付値体とし, $G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ をその絶対 Galois 群とする. [5] では、K の剰余体 F が完全という仮定のもとで、G_K の分岐群によるフィルトレイションが定義されている. ここでは, 剰余体が一般の完備離散付値体に対し, G_K の分岐群によるフィルトレイションの定義を解説し, その性質をいくつか紹介する。詳細は論文 [1],[2] にあるので、ここではおもに考え方を説明する.

1. 上つき分岐群

1.1 定義.

L を完備離散付値体 K の有限次 Galois 拡大とし, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ をその Galois 群とする. O_L を L の整数環, m_L を極大イデアルとすると、G の下つき分岐群およびその log 版は

$$\begin{aligned} G_i =& \mathrm{Ker}(G \to \mathrm{Aut}(O_L/m_L^i)),\\ G_{i,\log} =& \mathrm{Ker}(G \to \mathrm{Aut}(L^\times/(1+m_L^i)) \end{aligned}$$

$(i \in \mathbb{Z}, \geq 1)$ で定義される. $G_i \supset G_{i,\log} \supset G_{i+1}$ であり, G_1 は惰性群, $G_{1,\log}$ は暴分岐群つまり G_1 の p-Sylow 部分群である.

下つき部分群はこのように簡明な定義をもつが、商とは両立せず、したがって絶対 Galois 群のフィルトレイションを定めない。ここでは、これと対照的な性質をもつ上つき分岐群を扱う。上つき分岐群は定義の簡明さでは劣るが、商と両立し、絶対 Galois 群のフィルトレイションを定める。剰余体が完全体なら、これらは Herbrand 関数で結びつくが一般にはそうではない。そこで、上つき分岐群を直接定義する。

手始めに、下つき分岐群の定義を幾何的に言い換えてみる。整数環 O_L の生成系と関係式をとり, $O_L = O_K[T_1, \ldots, T_n]/(f_1, \ldots, f_m)$ と表す. すると

$$G = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in O_{\bar{K}}^n | f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0\} \subset O_{\bar{K}}^n$$

と同一視される. K の正規離散付値の $\bar{K}$ への延長も ord で表し, $x, y \in O_{\bar{K}}^n$ に対し, $d(x,y) = \exp(-\min_{i=1,\ldots,n} \mathrm{ord}(x_i - y_i))$ とおく。すると $x, y \in G$ と正の整数 $i \in \mathbb{Z}, > 0$ に対し,

$$x \equiv y \bmod G_i \iff -\log d(x,y) \geq i$$

である. この意味で、下つき分岐群は、Galois 群の元どうしの近さを距離で計って定まるものである。

上つき分岐群を定義するには、Galois 群の元どうしの近さを距離とは異なる概念を用いて次のように測る。有理数 $j > 0$ に対し, 部分集合 $X^j(\bar{K}) \subset O_{\bar{K}}^n$ を

$$X^j(\bar{K}) = \{x \in O_{\bar{K}}^n | \mathrm{ord} f_i(x) \geq j,\ i = 1, \ldots, m\}$$

で定義する. $X^j(\bar{K})$ は次の節でみるように, K 上のあるアフィノイド多様体 X^j の $\bar{K}$ 有理点全体の集合である. $G = \bigcap_{j>0} X^j(\bar{K})$ である.

定理 1 K を完備離散付値体とし，L をその有限次 Galois 拡大とする

1. 条件

$x, y \in \mathrm{Gal}(L/K)$ に対し，

(1) $$x \equiv y \bmod G^j \iff x, y \text{ は } X^j_{\bar{K}} \text{ の同じ連結成分に属する}$$

をみたす Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ の正規部分群の減小族 $(\mathrm{Gal}(L/K)^j)_{j\in\mathbb{Q},>0}$ が定まる．減小族 $(\mathrm{Gal}(L/K)^j)_{j\in\mathbb{Q},>0}$ は O_L の生成系や関係式のとり方によらない．

2. M を L を含む K の有限次 Galois 拡大とすると，$\mathrm{Gal}(M/K)$ の上つき分岐群によるフィルトレイション $(\mathrm{Gal}(M/K)^j)_{j\in\mathbb{Q},>0}$ は商群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ の上つき分岐群によるフィルトレイション $(\mathrm{Gal}(L/K)^j)_{j\in\mathbb{Q},>0}$ をひきおこす．

ここでは証明しないが，$0 < j \leq 1$ に対し G^j は G の惰性群である．また $G^{1+} = \bigcup_{j>1} G^j$ は G の暴分岐群である．K の剰余体が完全なら $\mathrm{Gal}(L/K)$ の上つき分岐群は古典的なものと一致する．

log 構造を使って，log 上つき分岐群 $(G^j_{\log})_{j\in\mathbb{Q},>0}$ も定義され，こちらの方が重要と考えられる。$G^{0+}_{\log} = \bigcup_{j>0} G^j_{\log}$ は G の暴分岐群である．しかし、こちらの定義には log 構造について復習する必要があるのでここでは省略する．

1.2 アフィノイド多様体.

定理 1 の証明の方針を述べる前に、アフィノイド多様体について簡単にまとめておく。詳しくは本 [3] がある．日本語による解説としては [4] がある．

π を完備離散付値環 O_K の素元とする．O_K 上有限生成平坦な環 A の π 進完備化 $\hat{A}$ の係数拡大 $\hat{A} \otimes_{O_K} K$ と同型な K 上の環を K 上のアフィノイド環という．アフィノイド環は Noether 環である．K 上のアフィノイド環がスムースであるとは，形式的にスムースであることをいう．

K 上のアフィノイド多様体は点集合としては，K 上のアフィノイド環 $\mathcal{A}_K$ の極大イデアルの集合 $\mathrm{Spm}\,\mathcal{A}_K$ である．K 上のアフィノイド多様体の圏は，K 上のアフィノイド環とその K 上の連続準同型がなす圏の反転圏である．$A = O_K[T_1, \ldots, T_n]$ のとき，$\mathcal{A}_K$ を $K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ で表し，Tate 環とよぶ．アフィノイド環は Tate 環の商環と同型である．Tate 環 $K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ の定めるアフィノイド多様体が K 上の n 次元閉円板 D^n である．

アフィノイド多様体 X の $\bar{K}$ 有理点は、K 上の連続環準同型 $\mathcal{A}_K \to \bar{K}$ と 1 対 1 に対応する．これはさらに O_K 上の環準同型 $A \to O_{\bar{K}}$ と 1 対 1 に対応する．例えば，n 次元閉円板 $D^n_{\bar{K}}$ の $\bar{K}$ 有理点全体の集合は $O^n_{\bar{K}}$ である．

アフィノイド多様体 $X_{\bar{K}}$ の連結成分は、Zariski 位相に関するもの，つまり座標環 $\mathcal{A}_K \otimes_K \bar{K}$ の既約な巾等元で定義されるものとなる．$x, y \in X(\bar{K})$ を、環の準同型 $f_x, f_y : \mathcal{A}_K \otimes_K \bar{K} \to \bar{K}$ に対応する X の $\bar{K}$ 有理点とすると、x, y が $X_{\bar{K}}$ の同じ連結成分にはいるとは、環 $\mathcal{A}_K \otimes_K \bar{K}$ の任意の巾等元 e に対し $f_x(e) = f_y(e)$ となることである．

全射 $A = O_K[T_1, \ldots, T_n] \to O_L$ をとり，その核を I とする．有理数 $j = m/n > 0$ に対し，$\mathcal{A}^j_K$ を $A \otimes_{O_K} K$ の部分環 $A[I^n/\pi^m]$ の π 進完備化の K への係数拡大とする．これは素元 π のとり方や有理数 j の分数表示によらず、全射 $A \to O_L$ と j だけで定まる K 上のスムースなアフィノイド環である．前節のアフィノイド多様体 X^j はアフィノイド環 $\mathcal{A}^j_K$ が定めるアフィノイド多様体 $\mathrm{Spm}\,\mathcal{A}^j_K$ である．X^j の $\bar{K}$ 値点は、O_K 上の

環準同型 $A \to O_{\bar{K}}$ で I の像がイデアル $\mathfrak{m}^j = \{x \in O_{\bar{K}} | \mathrm{ord}\ x \geq j\}$ に含まれるものと1対1に対応する.

1.3 ファイバー関手.

定理1は, Galois群を直接考えるかわりに、ファイバー関手の言葉でいいかえて証明される。

Et_K を K の有限次分離拡大有限個の直積環のなす圏の反転圏とし, G_K-(Sets) で絶対 Galois群 G_K の連続な作用をもつ有限集合のなす圏を表す. 関手 $\Phi : Et_K \to G_K$-(Sets) を $\Phi(L) = Hom_{K\text{ 上の環準同型}}(L, \bar{K})$ で定めると、これは圏の同値を与える. この関手をファイバー関手とよぶ.

Galois 群 G_K の閉正規部分群 N は, ファイバー関手 Φ の商関手 Φ_N を $\Phi_N(L) = N \backslash \Phi(L)$ とおくことにより定める. 逆に次がなりたつ.

命題 2 ファイバー関手 $\Phi : Et_K \to G_K$-(Sets) の商関手 Φ' が, 条件

(1) $\Phi'(L \times M) = \Phi'(L) \coprod \Phi'(M)$.

(2) $L \subset M$ ならば, $\Phi'(L)$ は $\Phi(L)$ と $\Phi'(M)$ の $\Phi(M)$ 上のファイバー和である.

をみたすとする. Galois 群 G_K の閉正規部分群 N を $N = \bigcap_L \mathrm{Ker}(G_K \to \mathrm{Aut}\Phi'(L))$ で定めると, Φ' は Φ_N と同型である.

定理1の証明は, 有理数 $j > 0$ に対し, ファイバー関手 Φ の商関手 Φ^j が $\Phi^j(L) = \pi_0(X^j_{\bar{K}}) = \{X^j_{\bar{K}}$ の連結成分$\}$ とおくことで定まり, これが命題2の条件をみたすことを示すことに帰着される. 商関手 Φ^j が定まり, 命題2の条件をみたしたと仮定して, 定理1を導く. 命題2で定まる G_K の閉正規部分群を G^j_K とおく. K の有限次 Galois 拡大 L に対し, $\mathrm{Gal}(L/K)^j$ を G^j_K の $\mathrm{Gal}(L/K)$ の像と定義する. $\Phi(L)$ を $\mathrm{Gal}(L/K)$ と同一視すると, 命題2より, $\Phi^j(L)$ は $\mathrm{Gal}(L/K)^j \backslash \mathrm{Gal}(L/K)$ と同一視される. よって1が示された. 2は定義より明らかである.

商関手 Φ^j が定まり, 命題2の条件をみたすことの証明の詳細は論文 [1] に譲る. 証明の要点は次のとおりである。上の記号で $I = (f_1, \ldots, f_n)$ としたとき, $S_i \mapsto f_i$ で定義される環の準同型 $O_K[S_1, \ldots, S_n] \to A = O_K[T_1, \ldots, T_n]$ は, アフィノイド多様体 X^j から n 次元閉円板の有限平坦射 $X^j \to D^j$ を定め、さらにこの射による D^j の原点の逆像が $\Phi(L)$ となること、およびこれの相対版である.

2. 次数商

2.1 可換性. ここでは次の定理の証明を解説する.

定理 3 L を局所体 K の有限次 Galois 拡大とし, G をその Galois 群とする. 素数 p が K の素元でないならば, 有理数 $j > 0$ に対し, 商群 $G^j / \bigcup_{j'>j} G^{j'}$ は可換群である。

log 版については, 任意の局所体 K と有理数 $j > 0$ に対し, 商群 $G^j_{\log} / \bigcup_{j'>j} G^{j'}_{\log}$ は可換群である。

定理3の証明の方針は次のとおりである。$j \leq 1$ なら簡単なので、以下 $j > 1$ とする. $\bar{F}$ で K の分離閉包 $\bar{K}$ の剰余体を表す. $\bar{F}$ は K の剰余体 F の代数閉包である. G_K-$(\mathrm{Aff}/\bar{F})$ で, 次の条件をみたす G_K の連続な作用をもつ $\bar{F}$ 上有限生成な環の圏の反転圏を表す.

K の有限次 Galois 拡大 L の剰余体 E 上有限生成な環 A_E と A_E への Galois 群の $\mathrm{Gal}(L/K)$ の作用で E への作用と両立するものを $\bar{F}$ へ定数拡大してえられる。

定理1の証明では，関手 $\Phi^j : Et_K \to G_K$-(Sets) を使った。定理3を証明するには，まず関手 $\Phi^j : Et_K \to G_K$-(Sets) を

$$Et_K \xrightarrow{\bar{X}^j} G_K\text{-}(\mathrm{Aff}/\bar{F}) \xrightarrow{\pi_0} G_K\text{-}(\mathrm{Sets})$$

のように分解する。ここで π_0 は連結成分の集合を対応させる関手を表す.

L を K の有限次 Galois 拡大とすると，$\bar{F}$ 上の有限型アファイン・スキーム $\bar{X}^j(L)$ は次のように絶対 Galois 群 G_K の左作用と Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ の右作用をもつ. G_K の左作用は $\bar{X}^j(L)$ が圏 G_K-$(\mathrm{Aff}/\bar{F})$ の対象として定義されることから定まる. この左作用を数論的な作用とよぶ. Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ の右作用は、$\bar{X}^j$ の関手性より定まる. この右作用を幾何的な作用とよぶ. $\bar{X}^j(L)$ を集合 $F(L) = Hom_{K\text{上の準同型}}(L, \bar{K})$ の類似と考えれば，幾何的作用は合成 $Hom(L,\bar{K}) \times \mathrm{Gal}(L/K) \to Hom(L,\bar{K}) : (f,\sigma) \mapsto f\circ\sigma$ に対応し，数論的作用は $G_K \times Hom(L,\bar{K}) \to Hom(L,\bar{K}) : (\sigma, f) \mapsto \sigma\circ f$ に対応する. 定義より，数論的作用と幾何的作用は可換である.

K の有限次分離拡大 L と有理数 $j > 0$ に対し，$\Phi(L) \to \Phi^j(L)$ が全単射であるとき，つまり，G_K^j が L に対応する開部分群に含まれるとき，L の分岐は j でおさえられるという. j より大きい任意の有理数 $j' > j$ に対し，L の分岐が j でおさえられるとき，L の分岐は $j+$ でおさえられるという.

定理3を示すには，L が K の有限次 Galois 拡大で、その分岐が $j+$ でおさえられるとき，Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ の分岐群 $\mathrm{Gal}(L/K)^j$ が可換群であることを示せばよい. したがって定理3は次の補題から従う.

補題 4 L を K の有限次 Galois 拡大，$j > 1$ を有理数とし，L の分岐が $j+$ でおさえられるとする。$\bar{X}^j(L)_0$ を $\bar{X}^j(L)$ の連結成分とする.

分岐群 $\mathrm{Gal}(L/K)^j, G_K^j$ はそれぞれ幾何的作用，数論的作用に関し，$\bar{X}^j(L)_0$ を保つ。さらに，幾何的作用が定める準同型 $\mathrm{Gal}(L/K)^j \to \mathrm{Aut}\ (\bar{X}^j(L)_0/\bar{X}^j(K))$ は同型であり，数論的作用が定める準同型 $G_K^j \to \mathrm{Aut}\ (\bar{X}^j(L)_0/\bar{X}^j(K))$ は全射である.

以下，関手 $\bar{X}^j$ の構成と，補題4の証明を解説する. 簡単のため，K は次の条件をみたすと仮定する。

(F) K は標数 $p > 0$ である. K の剰余体 F はその完全な部分体 F_0 上有限生成である.

条件 (F) のもとでは、関手 $\bar{X}^j : Et_K \to G_K$-$(\mathrm{Aff}/\bar{F})$ は、合成関手

$$Et_K \xrightarrow{X^j} (\mathrm{Affinoid}/K) \xrightarrow{X \mapsto \bar{X}} G_K\text{-}(\mathrm{Aff}/\bar{F})$$

として定義される. ここで $(\mathrm{Affinoid}/K)$ は K 上のスムースなアフィノイド多様体の圏を表す. 次の 2.2 節で関手 $X^j : Et_K \to (\mathrm{Affinoid}/K)$ を、2.3 節で関手 $(\mathrm{Affinoid}/K) \to G_K$-$(\mathrm{Aff}/\bar{F}) : X \mapsto \bar{X}$ を構成する。

2.2 アフィノイド多様体の関手的構成.

第1節では，多項式環からの全射 $O_K[T_1, \ldots, T_n] \to O_L$ を使ってアフィノイド多様体 X^j を構成した. $\mathfrak{m} \in O_K[T_1, \ldots, T_n]$ を O_L の極大イデアルのひきもどしとすると，

これは$O_K[T_1,\dots,T_n]$の$\mathfrak{m}$での完備化$\mathbf{A}$と全射$\mathbf{A}\to O_L$にしかよらない．環$\mathbf{A}$はO_K上スムースな環の極大イデアルでの完備化である．このような環とO_Lへの全射の対を関手的に構成し，有理数$j>0$に対し，関手$X^j: Et_K\to(\mathrm{Affinoid}/K)$を定義する．

LをKの有限次分離拡大とし、$A=O_L$を付値環とする．環Aに対し，$(A\otimes_{F_0}O_K)^\wedge$を，$\varprojlim_n(A/\mathfrak{m}_A^n\otimes_{F_0}O_K)_\mathfrak{m}$と定める．ここで$\mathfrak{m}_A$は$A$の極大イデアルで，$(A/\mathfrak{m}_A^n\otimes_{F_0}O_K)_\mathfrak{m}$は，商環$A/\mathfrak{m}_A^n\otimes_{F_0}O_K$の極大イデアル$\mathrm{Ker}(A/\mathfrak{m}_A^n\otimes_{F_0}O_K\to A/\mathfrak{m}_A)$での局所環を表す．恒等写像$A\to A$と標準単射$O_K\to O_L$は全射$\mathbf{A}\to A=O_L$をひきおこす．

$\mathbf{A}$はO_K上スムースな環の極大イデアルでの局所環の完備化であることを示す．剰余体Fの完全部分体F_0上の超越次数をdとする．条件(F)より，AはF_0上スムースな$d+1$次元の環A_0の高さ1の素イデアル$\mathfrak{p}$での局所環$A_{0,\mathfrak{p}}$の完備化と同型である．よって$\mathbf{A}$はO_K上スムースな環$A_0\otimes_{F_0}O_K$の，準同型$A_0\otimes_{F_0}O_K\to A: x\otimes y\mapsto xy$による極大イデアルの逆像$\mathfrak{m}$での局所環$(A_0\otimes_{F_0}O_K)_\mathfrak{m}$の完備化と同型である．

環の全射準同型$\mathbf{A}\to A$を使ってアフィノイド多様体X^jを1.2節と同様に定義する．$j=m/n$とし，$\mathcal{A}_K^j$を$\mathbf{A}$の部分環$\mathbf{A}[I^n/\pi^m]$のπ進完備化のKへの係数拡大とする．$\mathcal{A}_K^j$はK上のアフィノイド環であり，K上のアフィノイド多様体$X^j=\mathrm{Spm}\ \mathcal{A}_K^j$を定める．環の準同型$\mathbf{A}\to A$は$O_L$だけで定まるから，アフィノイド多様体$X^j=X^j(L)$は$L$と$j$だけで定まる．有限次分離拡大$L$に対しアフィノイド多様体$X^j(L)$を対応させることにより，関手$X^j: Et_K\to(\mathrm{Affinoid}/K)$が定義される．$X^j(L)_{\bar K}$の連結成分の集合$\pi_0(X^j(L)_{\bar K})$は1.3節で定義された$\Phi^j(L)$と一致する．いいかえると関手$\Phi^j: Et_K\to G_K\text{-(Sets)}$は、合成関手

$$Et_K \xrightarrow{X^j} (\mathrm{Affinoid}/K) \xrightarrow{X\mapsto\pi_0(X_{\bar K})} G_K\text{-(Sets)}$$

と一致する．

O_K加群$\hat\Omega^1_{O_K/F_0}=\varprojlim_n\Omega^1_{(O_K/\mathfrak{m}_K^n)/F_0}$は階数$d+1$の自由$O_K$加群である．有理数$j$に対し，$\mathfrak{m}_{\bar K}^j=\{x\in O_{\bar K}|\mathrm{ord}\ x\geq j\}$とおく．アフィノイド多様体$X^j(K)$の$\bar K$有理点全体は，標準的に$d+1$次元閉円板$Hom_{O_K}(\hat\Omega^1_{O_K/F_0},\mathfrak{m}_{\bar K}^j)$と同一視される．$K$の有限次分離拡大$L$に対し，標準写像$X^j(L)\to X^j(K)$による，原点$0\in Hom_{O_K}(\hat\Omega^1_{O_K/F_0},\mathfrak{m}_{\bar K}^j)$の逆像は標準的に$\Phi(L)=Hom(L,\bar K)$と同一視される．

2.3 安定正規整構造.

ここでは関手$(\mathrm{Affinoid}/K)\to G_K\text{-}(\mathrm{Aff}/\bar F)$について解説する．

基礎となるのは次の定理である．K上のアフィノイド環$\mathcal{A}_K$に対し，$\mathcal{A}_K$の部分環$\mathcal{A}$で，O_K上有限生成な環のπ進完備化と同型かつ$\mathcal{A}_K=\mathcal{A}\otimes_{O_K}K$となるものを$\mathcal{A}_K$の整構造とよぶ．

定理 5 (Grauert-Remmertの有限性定理) $\mathcal{A}_K$をK上のスムース・アフィノイド環とする．このときKの有限次拡大K'と，係数拡大$\mathcal{A}_{K'}=\mathcal{A}_K\otimes_K K'$の整構造$\mathcal{A}_{O_{K'}}$で，$\mathcal{A}_{O_{K'}}\otimes_{O_{K'}}\bar F$が被約であるものが存在する．

さらにK''をK'の有限次拡大とし，$\mathcal{A}_{O_{K''}}$を係数拡大$\mathcal{A}_{K''}$の整構造で，$\mathcal{A}_{O_{K''}}\otimes_{O_{K''}}\bar F$が被約なものとすると，$\mathcal{A}_{O_{K''}}=\mathcal{A}_{O_{K'}}\otimes_{O_{K'}}O_{K''}$である．

定理5のような整構造$\mathcal{A}_{O_{K'}}$を安定正規整構造とよぶ．定理5の後半部分より，$\bar F$上有限生成な環$\mathcal{A}_{O_{K'}}\otimes_{O_{K'}}\bar F$は，安定正規整構造のとり方によらない．さらにこれは，

自然な Galois 群 G_K の連続作用をもつ．K 上のスムース・アフィノイド環 $\mathcal{A}_K$ に対し，G_K のこの連続作用をもつ $\bar{F}$ 上有限生成な環 $\mathcal{A}_{O_{K'}} \otimes_{O_{K'}} \bar{F}$ を対応させることにより関手 $(\text{Affinoid}/K) \to G_K\text{-}(\text{Aff}/F)$ が定まる．

環 $\mathcal{A}_{O_{K'}}$ は正規だから，$\mathcal{A}_{K'} = \mathcal{A}_{O_{K'}} \otimes_{O_{K'}} K'$ の巾等元は，$\mathcal{A}_{O_{K'}}$ に含まれる．F' を K' の剰余体，π' を K' の素元とすると，$\mathcal{A}_{O_{K'}}$ は π' 進完備だから，$\mathcal{A}_{O_{K'}}$ の巾等元は $\mathcal{A}_{F'} = \mathcal{A}_{O_{K'}} \otimes_{O_{K'}} F'$ の巾等元と 1 対 1 に対応する．したがってアフィノイド多様体 $X = \text{Spm } \mathcal{A}_K$，とアファイン・スキーム $\bar{X} = \text{Spec } \mathcal{A}_{O_{K'}} \otimes_{O_{K'}} \bar{F}$ に対し，連結成分の集合 $\pi_0(X_{\bar{K}})$ と $\pi_0(\bar{X})$ は標準的に同一視される．以上のことより，関手 $\Phi^j : Et_K \to G_K\text{-}(\text{Sets})$ は、合成関手

$$Et_K \xrightarrow{X^j} (\text{Affinoid}/K) \xrightarrow{X \mapsto \bar{X}} G_K\text{-}(\text{Aff}/\bar{F}) \xrightarrow{\pi_0} G_K\text{-}(\text{Sets})$$

として表される．関手 $\bar{X}^j : Et_K \to G_K\text{-}(\text{Aff}/\bar{F})$ は、左 2 つの関手の合成関手 $Et_K \xrightarrow{X^j} (\text{Affinoid}/K) \xrightarrow{X \mapsto \bar{X}} G_K\text{-}(\text{Aff}/\bar{F})$ として定義する．

2.4　可換性の証明.

G_K^{1+} が暴惰性群 P_K だから，$j \leq 1$ の場合は簡単なので，$j > 1$ とする．

補題 4 の証明の鍵となるのは次の命題である．1 次元 $\bar{F}$ 線型空間 $\{x \in O_{\bar{F}} | \text{ord } x \geq j\}/\{x \in O_{\bar{F}} | \text{ord } x > j\}$ を N^j で表す．$\bar{F}$ 上のアファイン・スキーム $\bar{X}^j(K)$ は，$\bar{F}$ 上の線型空間 $\Theta^j = Hom_F(\hat{\Omega}^1_{O_K/F_0} \otimes_{O_K} F, N^j)$ と標準的に同一視される．特に，数論的作用に関し暴分岐群 $P_K \subset G_K$ は $\bar{X}^j(K) = \Theta^j$ に自明に作用する．原点 $0 \in \Theta^j$ に対応する $\bar{X}^j(K)$ の点は，K の恒等写像に対応する $X^j(K)$ の点の還元である．

命題 6 L を分岐が $j+$ でおさえられる K の有限次分離拡大とする．$\bar{F}$ 上のアファイン・スキームの射 $\bar{X}^j(L) \to \bar{X}^j(K) = \Theta^j$ は有限エタールである．$0 \in \Theta^j = \bar{X}^j(K)$ の逆像は $\Phi^{j+}(L) = \Phi(L) = Hom(L, \bar{K})$ と同一視される．

命題 6 の証明は省略する．命題 6 から補題 4 は次のように導かれる．L を分岐が $j+$ でおさえられる K の有限次 Galois 拡大とする．命題 6 により，$Hom(L, \bar{K}) \subset \bar{X}^j(L)$ と考える．G_K の数論的作用の $Hom(L, \bar{K})$ への制限は $G_K \times Hom(L, \bar{K}) \to Hom(L, \bar{K}) : (\sigma, f) \mapsto \sigma \circ f$ であり，$\text{Gal}(L/K)$ の幾何的作用の $Hom(L, \bar{K})$ への制限は $Hom(L, \bar{K}) \times \text{Gal}(L/K) \to Hom(L, \bar{K}) : (f, \sigma) \mapsto f \circ \sigma$ である．

分岐群の定義により，G_K^j は数論的作用に関し各連結成分を保つ．$G_K^j \subset P_K$ で P_K の $\bar{X}^j(K) = \Theta^j$ への作用は自明だから，数論的作用は準同型 $G_K^j \to \text{Aut}(\bar{X}^j(L)_0/\bar{X}^j(K))$ を定める．命題 6 より，$\text{Aut}(\bar{X}^j(L)_0/\bar{X}^j(K))$ の位数は $\text{Gal}(L/K)^j$ の位数以下だから，上の作用の記述より，$G_K^j \to \text{Aut}(\bar{X}^j(L)_0/\bar{X}^j(K))$ は全射である．

命題 6 と上の作用の記述より，$\bar{X}^j(L)$ は $\text{Gal}(L/K)$ の幾何的作用に関し，$\bar{X}^j(K)$ 上の $\text{Gal}(L/K)$-捻子である．さらに，$\text{Gal}(L/K)^j$ は各連結成分をたもち，各連結成分は $\bar{X}^j(K)$ 上の $\text{Gal}(L/K)^j$-捻子である．したがって，幾何的作用は同型 $\text{Gal}(L/K)^j \to \text{Aut}(\bar{X}^j(L)_0/\bar{X}^j(K))$ を定める．

2.5 標準全射 $\pi_1^{\text{ab}}(\Theta^j) \to G_K^j/G_K^{j+}$.

有理数 $j \geq 0$ に対し，G_K^{j+} を $\bigcup_{j'>j} G_K^{j'}$ の閉包とする．$G_K^{1+} = P_K$ である．最後に標準全射 $\pi_1^{\text{ab}}(\Theta^j) \to G_K^j/G_K^{j+}$ の定義を述べる．

$Et_K^{<j+}$ で，K の分岐が $j+$ でおさえられる有限次分離拡大有限個の直積環のなす Et_K の充満部分圏を表す．$Et_K^{<j+}$ は Galois 圏でその Galois 群は G_K/G_K^{j+} である．定理 3 の証明より，関手 $\bar{X}^j$ の $Et_K^{<j+}$ への制限は，関手

$$Et_K^{<j+} \longrightarrow (\Theta^j \text{の有限エタール Abel 被覆})$$

を定める．これは Galois 群の写像 $\pi_1^{\mathrm{ab}}(\Theta^j) \to G_K/G_K^{j+}$ をひきおこす．分岐群の定義より，これの像は G_K/G_K^{j+} である．

References

[1] A. Abbes, T. Saito, *Ramification of local fields with imperfect residue fields*, American J. of Math. 124.5 (2002), 879-920.

[2] ——, *Ramification of local fields with imperfect residue fields II*, preprint.

[3] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, Non-Archimedean Analysis, Fundamental Principles of Math. Sciences, vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[4] 加藤 文元, Rigid 解析入門, 数理研講究録 1073, 1998, 1-48.

[5] J.-P. Serre, Corps Locaux, Hermann, Paris, 1968.