数理解析研究所講究録 1327 巻 2003 年 21-27

On certain sharp characters with rational values

千葉大学院自然科学研究科　　波多野　順 (Jun Hatano)
Graduate School of Science and Technology
Chiba University

1. Introduction

χ を有限群 G の degree n の character とし L を代数的整数の集合とする．そのとき，$L=\{\chi(g) \mid 1 \neq g \in G\}$ ならば，L を (G,χ) の type と呼ぶ．一般に $|G|$ は $\prod_{l\in L}(\chi(1)-l)$ を整除する (Blichfeldt [2]) ことから，type L の (G,χ) が $|G|=\prod_{l\in L}(\chi(1)-l)$ を満たすとき，(G,χ) は sharp (pair) と呼ばれる．Cameron-Kiyota [4] により，type L の sharp pair (G,χ) を分類する問題が提起された．

この問題は部分的には解決されており，特に $L \not\subset \mathbb{Z}$ のときは Alvis-Nozawa [1] により完全に分類されている．ここでは $L \subset \mathbb{Z}$ の場合について得られている結果と研究結果をまとめた．

2. sharp character

(G,χ) を sharp pair とすると，任意の有理整数 m に対し $(G,\chi+m1_G)$ もまた sharp となる．そこで $(\chi,1_G)=0$ であるとき，(G,χ) は normalized であるといい，sharp pair の分類について考察するときは，(G,χ) は normalized であると仮定してよい．

以後，$L \subset \mathbb{Z}$ とし，(G,χ) は type L の normalized sharp pair と仮定する．さらに，$|L|=2$ のとき，$L=\{l_1,l_2\}$ かつ $l_1<l_2$ と仮定する．

$|L|=1$ ならば，$\chi=\rho_G-1_G$ であることが容易にわかる．以下，$|L|=2$ の場合について考察する．このとき，次の等式が成り立つ．

Proposition 1.

(1) $(\chi,\chi)_G=1-l_1l_2$.

(2)

$$c_1=|\{g\in G|\chi(g)=l_1\}|,$$
$$c_2=|\{g\in G|\chi(g)=l_2\}|$$

とおく．このとき

$$c_1=\frac{(n-l_2)(nl_2-l_1l_2+1)}{l_2-l_1},$$
$$c_2=\frac{(n-l_1)(nl_1-l_1l_2+1)}{l_1-l_2}$$

が成り立つ．

Proposition 1(1) により，$(\chi,\chi)=1$ であることは L が 0 を含むことと同値である．

(χ,χ) が十分に小さい場合には，いくつかの結果が知られている．まず初めに，$(\chi,\chi)=1$ の場合として，次の結果がある．

Theorem 2 (Cameron-Kiyota [4]). $L=\{0,l\}$ ならば，G は *2-transitive Frobenius group.*

次に，$(\chi,\chi)=2$ の場合であるが，これは $L=\{-1,1\}$ と同値である．さらに，χ が可約で，$l_2-l_1=2$ を満たすこととも同値である．この場合に関しては，次の定理が得られている．

Theorem 3 (Cameron-Kataoka-Kiyota [3]). $L=\{-1,1\}$ ならば，以下のいずれかが成立する:

(1) G : 位数 8 の *dihedral* または *quaternion group*, $n=3$,
(2) G : S_4 または $SL(2,3)$，$n=5$,
(3) G : $GL(2,3)$ または *binary octahedral*, $n=7$,
(4) G : S_5 または $SL(2,5)$，$n=11$,
(5) G : $L_2(7)$，$n=13$,
(6) G : A_6，$n=19$,
(7) G : A_7 の *double cover* $\hat{A}_7$，$n=71$,
(8) G : M_{11}，$n=89$.

$(\chi,\chi)=3$ の場合は，$L=\{-2,1\}$ または $\{-1,2\}$ であることと同値であり，また，χ が可約で $l_2-l_1=3$ となる場合とも同値である．この場合には，次の 2 つの定理が得られている．

Theorem 4 (Iiyori [6]). $L=\{-2,1\}$ または $\{-1,2\}$ とし，$|G|$ は 3 と素で，χ は *generalized* でもよいとする．このとき G は位数 10 の *dihedral group* と同型である．

Theorem 5 (Nozawa-Uno [8]). $Z(G)\neq\{1\}$ とする．もし $L=\{-2,1\}$ または $\{-1,2\}$ ならば，次のいずれかが成り立つ:

(1) G : $Z_3\times S_3$，$n=4, 5$,
(2) G : $Z_3\times A_5$，$n=13, 14$
(3) G : $Z_3\times L_2(7)$，$n=22, 24$
(4) $|G|=2\cdot 3^3$，$|G'|=3^3$，$n=7, 8$
(5) $|G|=2^2\cdot 3^3$，$|G'|=3^3$，$n=10$

上記の 3 つの定理は，いずれも l_2-l_1 の値が (χ,χ) を決定している．そこで，ある素数 p に対して，$(\chi,\chi)=p$ かつ $l_2-l_1=p$ を満たしている場合を考察し，次の結果を得た．

Theorem 6. $L=\{1-p,1\}$ または $\{-1,p-1\}$ とする．このとき，$|G|$ が p と素な *type* L の *sharp pair* (G,χ) は存在しない．

3. PRIME GRAPH

この節では，Theorem 6 の証明において大切な概念となる prime graph について定義と定理を述べる．群 G の prime graph とは，素因数集合 $\pi(G)$ を点集合とし，異なる 2 点 p, q が隣接しているということを G が位数 pq の元を持つということで定めた graph と定義する．また，Com(G) で G の prime graph の connected component 全体を表すものとし，π_1 は $|G|$ の最小素因数 を含む connected component とする．

一般に，次のことが示せる．

Proposition 7. 有限群 G に対して，次が成り立つ．

(1) *H を G の subgroup とし，ρ を H の prime graph の connected component とすると，G の prime graph の connected component で ρ を含むものが存在する．*

(2) *N を G normal subgroup とし，ρ を G/N の prime graph の connented component とすると，G の prime graph の connected component で ρ を含むものが存在する．*

次の結果は，Theorem 6 の証明において重要な役割を果たす定理である．

Theorem 8 (K. W. Gruenberg and O. Kegel). 有限群 G が $|\mathrm{Com}(G)| \geq 2$ を満たすならば，G は次のいずれかと同型である:

(1) *Frobenius* または *2-Frobenius,*

(2) *simple,*

(3) *simple* による π_1*-group* の拡大,

(4) π_1 による *simple* の拡大,

(5) π_1 の *simple* による拡大の π_1 による拡大.

4. The case $L = \{1-p, 1\}$ or $\{-1, p-1\}$

ここからは，ある奇素数 p に対して，$L = \{1-p, 1\}$ または $\{-1, p-1\}$ が成り立つものと仮定する．

このとき，明らかに，$(n-l_1, n-l_2) = 1$ または $(n-l_1, n-l_2) = p$ が成り立つ．

r_1 と r_2 を p と異なる素数とし，r_1 は $n-l_1$ を r_2 は $n-l_2$ をそれぞれ割り切るとする．

もし G が位数 r_1r_2 の元 x を持つならば，y と z をそれぞれ x の r_1-part，r_2-part とおく．χ は有理数値しかとらないので，$\chi(y) \equiv n \pmod{r_1}$ が成り立つ．したがって，$r_1 \neq p$ より，$\chi(y) = l_1$ がわかる．よって，$\chi(x) \equiv l_1 \pmod{r_2}$ となり，$\chi(x) = l_1$ が得られる．同様にして，$\chi(x) = l_2$ も得られる．これは矛盾である．よって，G は位数 r_1r_2 の元を持たない．

もし x が G の p'-element ならば，(G,χ) は sharp なので，x の位数は $n-l_1$ または $n-l_2$ の約数である．r を x の位数の素因数とし，x' を x の r'-part とする．すると $\chi(x) \equiv \chi(x') \pmod{r}$ が成り立つ．よって，x の位数の素因数の個数に関する帰納法から，$\chi(x) \equiv n \pmod{r}$ が得られる．

以上のことをまとめると，次の propositon が得られる．

Proposition 9. ある素数 p に対して $l_2 - l_1 = p$ となるとき，(G,χ) は次の性質を満たす:

(1) r_1 と r_2 を p と異なる素数とし，r_1 は $n-l_1$ を r_2 は $n-l_2$ をそれぞれ割り切るとする．このとき G は位数 r_1r_2 の元を持たない．

(2) G の p'*-element* x の位数が $n-l_1$ を割り切るならば，$\chi(x) = l_1$.

(3) G の p'*-element* x の位数が $n-l_2$ を割り切るならば，$\chi(x) = l_2$.

特に，$|G|$ が p と素ならば，$|\mathrm{Com}(G)| \geq 2$ である．

$(n-l_1, n-l_2) = 1$ の場合には，Proposition 9 から $|\mathrm{Com}(G)| \geq 2$ が成り立つので，Theorem 8 を用いて，2 つの場合に分けて考察する．

case 1a: G が Frobenius または 2-Frobenius group.

case 1b: G は noncyclic composition factor S を持つ．

また，$(n-l_1, n-l_2)=p$ の場合には，次の 2 つの場合に分ける．

case 2a: $n-l_1$ と $n-l_2$ のいずれかは p の冪である．
case 2b: $n-l_1$ と $n-l_2$ のいずれも p の冪でない．

Case 1a

K を G の subgroup，N を G の normal subgroup で K を含むものとする．さらに，H を K の G における complement で，HN が N を Frobenius kernel，H をその Frobenius complement にもつような Frobenius group になるようにとる．このとき，$K=N$ あるいは G/N は Frobenius kernel HN/N とその Frobenius complement K/N を持つような Frobenius group としてよい．

Frobenius kernel は nilpotent で，Frobenius complement は 単位群でない center を持つ．したがって，Proposition 7 から，$\pi(N)$ と $\pi(H)$，$\pi(K/N)$ はそれぞれ connected である．さらに，H は G で isolated となり，$\pi(H)$ は G の prime graph の connected component となる．

もし $\pi(K)$ が connected でないと仮定すると，N は G の normal isolated subgroup である．これは N が G の Frobenius kernel であることを示している．M を G の Frobenius complement とおく．M は G/N と同型であるから，$Z(M)=\{1\}$ となり，M が Frobenius complement であることに反する．したがって，$\mathrm{Com}(G)=\{\pi(K),\pi(H)\}$ を得る．

$|G|=|H||K|=(n-l_1)(n-l_2)$ かつ $|H|<|N|\leq|K|$ であるから，Proposition 9 により，$|H|=n-l_2$，$|K|=n-l_1$ を得る．

χ の irreducible constituent への分解を

$$\chi=\sum_{\eta\in\mathrm{Irr}(G)}a_\eta\eta,$$

と表し，$\chi_{HN}=\chi_1+\chi_2$ を

$$\chi_1=\sum_{N\subseteq\ker\eta}a_\eta\eta_{HN},$$
$$\chi_2=\sum_{N\not\subseteq\ker\eta}a_\eta\eta_{HN}.$$

とおく．

HN は Frobenius group であるから，次の表が得られる;

	1	$N\backslash\{1\}$	$HN\backslash N$
χ_{HN}	n	l_1	l_2
χ_1	$\chi_1(1)$	$\chi_1(1)$	l_2
χ_2	$n-\chi_1(1)$	$l_1-\chi_1(1)$	0

χ_2 の irreducible constituent の degree は全て $|H|$ で整除されるから，$|H|$ は $n-\chi_1(1)$ をも整除する．さらに，$|H|=n-l_2$ であり，$0<n-\chi_1(1)$ であるから，$\chi_1(1)-l_2$ は $|H|$ で整除され，かつ $\chi_1(1)-l_2<|H|$ を満たす．χ_1 は非負整数値 l_2 をとるので，$\chi_1(1)=l_2$ を得る．したがって，$\chi_{HN}=l_2 1_{HN}+\chi_2$．特に，$\chi_2(1)=|H|$ である．これは χ_2 が HN

の irreducible character であることを示している．(HN, χ_2) は type $\{-p, 0\}$ となるから，

$$
\begin{aligned}
|K/N| &= (|K/N|\rho_{HN},\, 1_{HN})_{HN} \\
&= \bigl((\chi_2 + p1_{HN})\cdot\chi_2,\, 1_{HN}\bigr)_{HN} \\
&= (\chi_2^2,\, 1_{HN})_{HN} = 1.
\end{aligned}
$$

これは χ が normalized であることに反する．よって Case 1a は起きない．

Case 1b

S を G の唯一の π_1'-regular composition factor とする．p は奇素数であるから，明らかに $\min(\pi(G)) = 2$ である．χ によって involution と同じ値をとる位数 r の元が存在するような $|G|$ の素因数 r 全体の集合を Γ とおく．また，$a = |G|_{\Gamma'}$，$b = |G|_{\Gamma}$ とする．

Proposition 9 により，π_1 は Γ に含まれるので $a = |S|_{\Gamma'}$ がいえる．(G,χ) は sharp であるから，$ab = (n-l_1)(n-l_2)$ となる．さらに，Proposition 9 から，$b - a = \varepsilon(l_2 - l_1) = \varepsilon p$ となる．ここで，$\varepsilon = \pm 1$ とする．したがって，

$$
\begin{aligned}
a(a+\varepsilon p) &= n^2 - (l_1 + l_2)n + l_1 l_2 \\
&= n^2 + (2a + \varepsilon p - 2n)n + 1 - p.
\end{aligned}
$$

より，$n = a + \varepsilon$ または $a + \varepsilon(p-1)$ を得る．また，$(\chi,\chi)_G = p$ と Proposition 1 より，n は p で割り切れる．したがって，$n = kp$ とおくと，

(1) $kp = a + \varepsilon$ で，

$$
b = a + \varepsilon\frac{a+\varepsilon}{k} \le (1+\varepsilon)a + 1,
$$

または

(2) $kp = a + \varepsilon(p-1)$ で，

$$
b = a + \varepsilon\frac{a-\varepsilon}{k-\varepsilon} \le \frac{2a-1}{2-\varepsilon}.
$$

特に，(1) の場合で $\varepsilon = -1$ のときは，$b \le 1$ となり，$\min(\pi(G)) = 2$ であることに反する．このことと，$p = \varepsilon(b-a)$ に注意すると，次のいずれかが成り立つことがわかる．

i) $\varepsilon = 1$,　$n = a+1$,　$a < b$ のとき，
　$b < 2a+1$ であり，$b - a$ は p と等しく，$a+1$ を整除する．

ii) $\varepsilon = 1$,　$n = a+p-1$,　$a < b$ のとき，
　$b < 2a-1$ であり，$b - a$ は p と等しく，$a-1$ を整除する．

iii) $\varepsilon = -1$,　$n = a-p+1$,　$a > b$ のとき，
　$a - b$ は p と等しく，$a+1$ を整除する．

いずれの場合も，$b < 2a+1$ が成り立っている．したがって，proposition 7 より，$|S|_\Gamma < 2a+1$ を得る．しかし，ほとんどの simple group は $|S|_\Gamma > 2a+1$ となっている．

[5], [7], [9] から，具体的に $|S|_\Gamma < 2a+1$ を満たす可能性のある finite simple group を確認すると，S は次のいずれかを満たすことが分かる:

(1) sporadic simple group J_1,　$|S|_\Gamma = 2^3\cdot 3\cdot 5$,

(2) alternating group A_5,　$|S|_\Gamma = 2^2$,

(3) alternating group A_6, $|S|_\Gamma = 2^3$,
(4) Lie type の simple group $L_2(q)$ (q : even), $|S|_\Gamma = q$,
(5) Lie type の simple group $L_2(q)$ ($q \equiv 1 \pmod 4$), $|S|_\Gamma = q-1$,
(6) Lie type の simple group $L_2(q)$ ($q \equiv -1 \pmod 4$), $|S|_\Gamma = q+1$,
(7) Lie type の simple group $L_3(2)$, $|S|_\Gamma = 2^3$,
(8) Lie type の simple group $L_3(4)$, $|S|_\Gamma = 2^6$,
(9) Lie type の simple group ${}^2B_2(2^{2m+1})$, $|S|_\Gamma = q^2$.

$b-a$ は素数であることから，J_1, A_5, A_6, $L_3(2), L_3(4)$ は不適となることがわかる．

Proposition 7, Proposition 9 そして Theorem 8 から，G の Γ'-element の個数は S の Γ'-element の個数の倍数である．そのことから Proposition 1 (2) が適用でき，S は $L_2(11)$ と同型で，G は Theorem 8 の (4) の場合で，$|G| = 4|S|$ と $p=7$ が成り立つことが得られる．しかし，$L_2(11)$ は位数 5 の元を含む共役類を 2 個しか持たないので，$|G| = 4|S|$ に反する．よって，case 1b も起きない．これで Theorem 6 は証明された．

Case 2

この場合は，まだ部分的な結果しか得られていない．前述したように 2 つの場合に分けた理由は，case 2b のときには，$\pi(n-l_1)\backslash\{p\}, \pi(n-l_2)\backslash\{p\} \neq \emptyset$ と $(\frac{n-l_1}{p}, \frac{n-l_2}{p}) = 1$ を満たすので，G は $\mathrm{Com}(G/N) \geq 2$ となるような normal subgroup N を持っている可能性があり，再び Theorem 8 が適用できると考えられることによる．case 2b で，$Z(G) \neq \{1\}$ の仮定をすると，次の結果が得られる．

Proposition 10. $(n-l_1, n-l_2) = p$ かつ $\pi(n-l_1)\backslash\{p\}, \pi(n-l_2)\backslash\{p\} \neq \emptyset$ を満たし，$Z(G) \neq \{1\}$ とする．このとき，ζ を原始 p-乗根とし，$\mathcal{G}_p = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ とおくと，以下のことが成り立つ:

(1) $\chi = \chi_0 + \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_p} \eta^\sigma$. ここで，$\chi_0, \eta$ は G の *irreducible character* で，かつ χ_0 は *real.*
(2) $|Z(G)| = p$.

proof.

case 2b の仮定と Proposition 9 により，$Z(G)$ は p-group である．x を位数 p の $Z(G)$ の元とする．χ は faithful であるから，$\langle x \rangle$ を kernel に含まない irreducible constituent η が存在する．特に，$\eta(x) = \zeta\eta(1)$ としてよい．χ は real であるから，任意の $\sigma \in \mathcal{G}_p$ に対して，$(\chi, \eta) = (\chi, \eta^\sigma)$ と $\eta \neq \eta^\sigma$ が成り立つ．したがって，χ は同じ multiplicity の $p-1$ 個の異なる irrducible constituent を持つ．さらに，$(\chi, \chi) = p$ より，$(\chi, \eta) = 1$ が得られる．よって，χ はちょうど p 個の irreducible constituent を持つ．

n は p で整除されないから，χ は 1 つだけ degree の異なる irreducible constituent χ_0 を持つ．したがって，$\chi = \chi_0 + \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_p} \eta^\sigma$ となる．特に，$\mathrm{Ker}\,\chi \leq Z(G)$ であるから，任意の $Z(G)$ の位数 p の元 x, y に対して，$\eta(x) = \eta(y^i) = \zeta^j\eta(1)$ とおける．したがって，$\langle x \rangle = \langle y \rangle$ となり，$|\Omega_1(Z(G))| = p$ が示された．

また，任意の $Z(G)$ の元 z に対して，ある原始 p^m-乗根 ζ_{p^m} を用いて $\eta(z) = \zeta_{p^m}\eta(1)$ と表すことができる．したがって，

$$p = |\mathrm{Irr}(\chi)| \geq p^{m-1}(p-1)$$

より，$m=1$ が得られる．これは $z^p \in \mathrm{Ker}\,\eta$ を示している．よって，χ の分解から $z^p=1$ を得る．

χ_0 が *real* であることは，χ_0 の degree から明らかである． □

case 2a のときは，l_1，l_2 のいずれかが p-element 上にしか現れないことになり，他の場合に比べて p-subgroup の構造以外に G の構造に影響を及ぼす条件が少ないと考えられる．したがって，予想外の群が出てくる可能性が一番高い場合であると思われる．特別な場合として，最小位数のときを決定した．

Proposition 11. $|G|=2p^2=p(p+p)$ ならば，G は $Z_p\times D_{2p}$ または $(Z_p\times Z_p)\cdot 2$ と同型になる．

proof.

G は abelian でないとしてよい．$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$ とし，t を G の involution とする．

P が isolated のとき，G は Frobenius group である．$\chi(t)$ と同じ値をとる G の元の個数に Proposition 1 (2) を適用すると，P は cyclic でないことがわかる．よって，$G\simeq (Z_p\times Z_p)\cdot 2$ となる．

P が $C_G(x)\not\subseteq P$ を満たす元 x を持つとき，P は abelian であるから，cyclic でない．よって，$G\simeq Z_p\times D_{2p}$ となる．

どちらの場合も，$\chi(1)=2p-1$ となる type $\{-1,p-1\}$ の sharp pair (G,χ) が存在する． □

Proposition 11 から，center が単位群になる sharp pair (G,χ) も実際に存在することがわかる．Theorem 5 の center に関する仮定はできれば取り除き，一般の素数 p の場合に拡張できることが望ましい．

References

[1] D. Alvis and S. Nozawa: *Sharp characters with irrational values*, J. Math. Soc. Japan, **48**(1996), 567-591.

[2] H. F. Blichfeldt: *A theorem concerning the invariants of linear homogeneous groups with some applications to substitution groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **5**(1984), 461-466.

[3] P. J. Cameron, T. Kataoka and M. Kiyota: *Sharp characters of finite groups of type* $\{-1,\ 1\}$, J. Algebra, **152**(1967), 248-258.

[4] P. J. Cameron and M. Kiyota: *Sharp characters of finite groups*, J. Algebra **115** (1988), 125-143.

[5] J. H. Conwawy, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Paker and R. A. Wilson: *ATLAS of finite groups*, Claredon Press, Oxford (1985).

[6] N. Iiyori: *Sharp characters and Prime Graphs of Finite Groups*, J. Algebra, **163**(1976), 1-8.

[7] N. Iiyori and H. Yamaki: *Prime Graph Components of the Simple Groups of Lie Type over the Field of Even Characteristic*, J. Algebra, **155**(1993), 335-343.

[8] S. Nozawa and M. Uno: *On sharp characters of rank 2 with rational values*, preprint.

[9] J. S. Williams: *Prime Graph Components of Finite Groups*, J. Algebra, **69**(1981), 487-513.